

ТЕНЗОРНАЯ ДРОБЬ КАК ОПЕРАТОР ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ТЕНЗОРНОЙ ФУНКЦИИ

О.С. Садаков

Известно, что тензорная алгебра – это алгебра сложений и умножений. Однако в выкладках бывает удобно использовать символическое деление. Вместо «слепого» обозначения тензора можно использовать функциональное, в явном виде показывающее роль данного тензора как оператора некоторой линейной функции. Он может быть представлен в виде дроби, знаменатель которой обозначает область аргументов, а числитель – область функций [1]. В частности, похожее обозначение по умолчанию используют для градиента тензорной функции, однако оно не всегда однозначно. Ниже делается попытка обосновать более строгое обозначение, расширяющее, в частности, роль оператора дифференцирования Гамильтона.

1. Любой тензор T может рассматриваться как оператор однородной линейной функции

$$Y = T * X, \quad (1)$$

где X , Y – тензор-аргумент и тензор-функция, символ «*» означает n -кратное скалярное произведение, если n – валентность тензора X – больше нуля, иначе «*» означает тензорное произведение (обычное умножение тензора на число).

Иногда удобно применить функциональное обозначение тензора T – в виде «дроби»

$$T = Y/X, \quad (2)$$

что позволяет обратить основное внимание на роль этого тензора в преобразовании (1). Например, тензор напряжений σ может быть записан в виде p/n , если вектор напряжения на площадке с нормалью n обозначается как p . Заметим, что существование тензора p/n следует доказать (существование такой линейной функции следует из условий равновесия части тела, находящейся в однородном напряженном состоянии). С другой стороны, для тензора так называемой инженерной деформации мы при использовании символической записи получаем относительно привычное для инженера выражение $\Delta l/l$. Существование этого линейного оператора легко доказывается из анализа однородного деформированного состояния (а в более актуальном случае неоднородного состояния – из допущения о дифференцируемости поля смещений).

В приведенных частных примерах дробь – это двухвалентный тензор, определяющий вектор-функцию векторного аргумента и, соответственно, в выражении вида (1) символ «*» означает однократное скалярное произведение «*».

Удобство предлагаемого обозначения связано с его довольно очевидными и простыми свойствами. Например, для вектор-функции векторного аргумента справедливы выражения [2]:

$$x/x = I$$

(I – единичный тензор, или тензор тождественного преобразования),

$$(z/y) \cdot (y/x) = z/x$$

(произведение операторов). Отсюда, в частности, следует, что $y/x \cdot x/y = I$, эти тензоры взаимно обратны. Кроме того,

$$(z + y) / x = z/x + y/x;$$

скаляры в числителе и в знаменателе сокращаются:

$$6y/(2x) = 3y/x;$$

справедливо и такое выражение (T – некоторый тензор):

$$T \cdot (y/x) = (T \cdot y) / x.$$

2. Однородным линейным оператором является, в частности, градиент тензор-функции тензорного аргумента $Y=f(X)$. Если функция дифференцируема, то в малой окрестности любого аргумента X_0 она может быть аппроксимирована в виде линейной

$$Y = f(X_0) + F*(X - X_0) \quad (3)$$

$$\partial \varphi_2 / \partial X = X \cdot X + X \cdot X^T + X^T \cdot X. \quad (11)$$

6. Вместо дифференцирования по координатам, можно использовать инвариантные выражения, например, дифференцирование произведения в виде суммы производных. В частности,

$$f \nabla = (X \cdot X) \nabla = 2 (X \cdot (X \nabla)). \quad (12)$$

Для расшифровки этого выражения нужен градиент двухвалентной функции двухвалентного аргумента. Его находим по прежней схеме (8):

$$\begin{aligned} f &= X = X_{ij} e_i e_j, \\ f \nabla &= X \nabla = (\partial f / \partial X_{ij}) e_i e_j = e_i e_j e_i. \end{aligned} \quad (13)$$

Получившийся тензор представляет тензор тождественного преобразования для двукратного скалярного произведения:

$$T \cdot e_i e_j e_i = T_{mn \dots kl} e_m e_n \dots e_k e_l \cdot e_i e_j e_i = T_{mn \dots kl} \delta_{li} \delta_{kj} e_i e_j = T_{mn \dots ji} e_m e_n \dots e_i e_j = T. \quad (14)$$

Из выражения (12) находим: $f \nabla = 2 X \cdot e_i e_j e_i = 2 X$, что, естественно, совпадает с прежним результатом (9).

7. В заключение напомним еще раз, что «операция деления» (например, дробь y/x) не представляет результата деления двух векторов; это лишь удобное функциональное обозначение тензора, если мы хотим подчеркнуть его роль в качестве линейного оператора (аргумент – функция). Удобство состоит в простоте и очевидности выкладок (см. п. 1), что может оказаться немаловажным, например, при проведении подготовительной работы в механике сплошной среды. В настоящей работе это качество дроби использовано для корректной записи производных тензорных (в частности, скалярных и векторных) функций тензорного аргумента. Подобная запись встречается в технической литературе в неопределенном виде (например, $\partial y_i / \partial x^k$), не отличающем правый и левый градиент, что, на наш взгляд, не только вредит строгости языка, но и может приводить к ошибкам. В статье представлено естественное обобщение предложенного ранее обозначения «дробь» на операторы дифференцирования, исключающее неоднозначность.

Литература

1. Буслаева О.С., Садаков О.С., Шапиро А.А. Скаляр и тензор логарифмической деформации // Научно-технические ведомости СПбГТУ. – 2003. – № 3 (33). – С. 125–129.
2. Садаков О.С. Символическое «деление» векторов в механике сплошной среды // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2005. – Вып. 5. – № 2(42). – С. 115–118.
3. Роговой А.А. Дифференцирование скалярных и тензорных функций тензорного аргумента // Вестник ПГТУ «Динамика и прочность машин». – Пермь, 2001. – № 2. – С. 83–90.

Поступила в редакцию 9 сентября 2005 г.