УДК 539.37

КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

О.С. Садаков

Механика деформируемого твердого тела в значительной мере наследует тензорный аппарат механики жидкости, в которой преобладает подход Эйлера. Однако физические (механические) свойства твердых тел принципиально отличаются от свойств жидких необходимостью сопоставлять недеформированное и деформированное состояния. В рассмотрение должны включаться, кроме скорости изменения текущей конфигурации среды, и деформации (дисторсии), определяемые сопоставлением начальной, недеформированной, конфигурации и актуальной, деформированной. В статье сделана попытка на основе анализа скоростей изменения деформаций и поворотов элементарных объемов среды очертить минимально необходимый для этого круг тензоров, если не ограничиваться допущением о бесконечной малости смещений, поворотов и деформаций.

1. Известно, что решение задач деформирования твердых тел требует рассмотрения трех сторон механики:

- геометрической (анализ движения материальных частиц и волокон),
- статической или динамической (условия равновесия действующих на частицы сил, в том числе, сил инерции),
- «физической» (свойства материала).

В случае отказа от стесняющей иногда гипотезы о бесконечной малости смещений, поворотов и деформаций соответствующая система представлений существенно усложняется по сравнению с геометрически линейным подходом. Усложнение главным образом касается геометрической стороны. Статическая вполне решается на основе тензора напряжений Коши, практически без изменения наследуемого из геометрически линейного подхода – если мы не хотим проблем с выяснением смысла тензоров Пиолы–Кирхгофа. Модели деформационных свойств материала, также наследуемые, пока не вступают в противоречие с известными экспериментальными данными.

Конечно, процесс синтеза и численной реализации названных трех сторон механики, даже в случае обретения ясности в каждой из них в отдельности, поставит дополнительные непростые задачи (например, задачу разделения деформации на упругую и неупругую, когда и аддитивность, и мультипликативность выглядят весьма сомнительно; еще сложнее проблема вычисления изменений неупругой деформации за шаг по нагрузке). Пока, однако, судя по публикациям, недостает ясности даже в выборе и использовании базисного арсенала одной только геометрической стороны механики деформируемого тела. Удручает также унаследованное из механики сплошной среды стремление с первых шагов затруднить и без того трудный анализ введением косоугольного базиса, криволинейных координат и, вдобавок, использовать алгебраический тензорный аппарат, требующий для каждого нового построения непростого доказательства того, что оно действительно представляет тензорную величину. Если, однако, использовать определение тензора как суммы полиад, то результат обычных действий с тензорами представит инвариантную тензорную величину по определению.

2. При анализе кинематических соотношений мы опираемся на понятие абсолютного неподвижного пространства с неподвижной же системой отсчета, в которой каждая точка пространства идентифицируется уникальным радиус-вектором $\boldsymbol{X}=X_k\boldsymbol{e}_k$, k=1..3. Начало отсчета $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ и базис $\{\boldsymbol{e}_k\}$ мы выбираем сами. Пока не вынудят обстоятельства, будем использовать ортонормированный базис. Зная координаты вектора в одном базисе, нетрудно найти, при необходимости, его координаты и в любом другом. Привлекать криволинейные координаты нам не понадобится.

Кроме радиус-векторов (измеряемых в метрах) в пространстве рассматриваются и другие векторы с различной физической размерностью. При анализе кинематических соотношений нам понадобятся безразмерные величины и обратные секунды.

откуда

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\bullet} = \boldsymbol{U}^{\bullet} = \boldsymbol{R}^{T} \cdot (\boldsymbol{F}^{\bullet} - \boldsymbol{R}^{\bullet} \cdot \boldsymbol{U}). \qquad (20)$$

19. Высказанные выше сомнения в отношении интегрирования тензора $\boldsymbol{L}$ заставляют нас вернуться к подходу Лагранжа (выражение (6)). Зная $\boldsymbol{F}^{\bullet}$, трудно сказать, как изменяется, и изменяется ли вообще, тензор $\boldsymbol{R}$ или тензор $\boldsymbol{\varepsilon}$, но интеграл (6) дает актуальное значение $\boldsymbol{F}$. Выражение (10) показывает, что и тензор $\boldsymbol{L}$ может сыграть при интегрировании свою роль.

Зная $\boldsymbol{F}$, можно найти все интересующие нас тензоры, например, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, а также и тензор логарифмической деформации $\boldsymbol{e} \equiv \ln \boldsymbol{U}$ (или, при желании, $\ln \boldsymbol{V}$).

Добавим, что при решении начальных и краевых задач для *неупругих* тел тензор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$, в отличие от тензора $\boldsymbol{F}$, не входит в число параметров состояния [4, 5].

20. Основные выводы

1. Симметричная часть тензора $\boldsymbol{L}$, используемая в некоторых конечно-элементных оболочках в качестве скорости деформации, дает при интегрировании тензор Генки лишь в исключительных случаях. В общем случае компоненты этого интеграла не характеризуют ни деформации какого-либо волокна, ни какого-либо сдвига.

2. Диагональный элемент тензора Генки не характеризует линейной деформации какого-либо волокна [2] – кроме случая, когда все боковые равны нулю.

3. Боковые элементы матрицы тензора Генки не характеризуют сдвига – кроме случая, когда все они равны нулю.

4. Выражения для скорости деформации и скорости жесткого поворота слишком громоздки для практического использования. Проще интегрировать скорость дисторсии. Зная дисторсию, нетрудно найти все остальные тензоры (в том числе, и тензор Генки). Поскольку в геометрически нелинейный расчет безусловно входят смещения, а тензор $\boldsymbol{F}$ представляет их градиент (то есть линейно связан со смещениями), он находится без труда.

Литература

1. Садаков О.С. Символическое «деление» векторов в механике сплошной среды// Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2005. – Вып. 5. – № 2(42). – С. 115–118.

2. Буслаева О.С., Садаков О.С., Шапиро А.А. Скаляр и тензор логарифмической деформации// Научно-технические ведомости СПбГТУ. – 2003. – № 3(33). – С. 125–129.

3. Belytschko T., Liu W.K., Moran B. Finite Elements for Nonlinear Continua and Structures. McCormick School of Engineering and Applied Science Northwestern University Evanston, IL 60208 copyright 1996. Published by Wiley.

4. Волков С. А., Садаков О.С. К учету геометрической нелинейности в расчетах неупругого деформирования конструкций. Сообщение 1: Напряженно-деформированное состояние тела// Динамика, прочность и износостойкость машин (Международный журнал на электронных носителях). – Челябинск–Москва. – 2000. – Вып. 6. – С. 99–106.

5. Садаков О.С. К расчетам напряженно-деформированного состояния конструкций в геометрически нелинейной постановке// Труды Международной конференции «Снежинск и наука – 2003. Современные проблемы атомной науки и техники». – Снежинск: СГФТА, 2003. – С.73–74.

Поступила в редакцию 9 сентября 2005 г.