УДК 532.137.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СВОЙСТВ ЖИДКОСТЕЙ КРУТИЛЬНЫМ ВИСКОЗИМЕТРОМ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

И.В. Елюхина

Проведено математическое моделирование движения крутильно-колебательного вискозиметра конечной длины, заполненного жидкостями Оствальда–Вейля. Оценены границы применимости приближения длинного цилиндра и рассмотрены вопросы идентификации постоянной и показателя степенного реологического закона.

В [1] были обсуждены возможности идентификации неньютоновских свойств с использованием техники крутильных колебаний заполненного такими средами бесконечно длинного цилиндра. В реальных экспериментах длина тигля конечна, и поэтому в настоящей работе при изучении его движения учтем неоднородность полей азимутальной скорости и касательного напряжения по высоте, а также исследуем границы применимости этого приближения.

Математическая формулировка задачи

Исследования выполним на примере нелинейно вязких сред. Математическая модель включает в себя

1) уравнение движения цилиндра

$$\frac{d^2\alpha}{dT^2}+\alpha=P; \tag{1}$$

2) уравнение движения жидкости

$$\frac{\partial U}{\partial T}=\frac{\partial\sigma_{\xi\varphi}}{\partial\xi}+\frac{2\sigma_{\xi\varphi}}{\xi}+\frac{\partial\sigma_{\eta\varphi}}{\partial\eta}; \tag{2}$$

3) уравнение состояния жидкости (реологическая модель Оствальда–Вейля)

$$\sigma_{\xi\varphi(\eta\varphi)}=bD_{\xi\varphi(\eta\varphi)}D^{m-1}; \tag{3}$$

4) начально-краевые условия для (1), (2)

$$T=0:\ \alpha\sim6^\circ,\ {d\alpha}/{dT}=0,\ U=0;\ \eta=0,\ \eta=\eta_0:\ U={d\alpha}/{dT}\,\xi;\ \xi=0:\ U=0;\ \xi=\xi_0:\ U={d\alpha}/{dT}\,\xi_0. \tag{4}$$

Здесь

$$D_{\xi\varphi}=\frac{\partial U}{\partial\xi}-\frac{U}{\xi},\ D_{\eta\varphi}=\frac{\partial U}{\partial\eta},\ D=\sqrt{D_{\xi\varphi}^2+D_{\eta\varphi}^2};$$

$$P=-\frac{4Ab}{\xi_0^2\eta_0}\int_0^{\eta_0}\left(\frac{\partial U}{\partial\xi}-\frac{U}{\xi}\right)\left|\frac{\partial U}{\partial\xi}-\frac{U}{\xi}\right|^{m-1}\Bigg|_{\xi_0}d\eta+\frac{4Ab}{\xi_0^4\eta_0}\left[\int_0^{\xi_0}\left(\frac{\partial U}{\partial\eta}\right)\left|\frac{\partial U}{\partial\eta}\right|^{m-1}\Bigg|_0\xi^2d\xi-\int_0^{\xi_0}\left(\frac{\partial U}{\partial\eta}\right)\left|\frac{\partial U}{\partial\eta}\right|^{m-1}\Bigg|_{\eta_0}\xi^2d\xi\right];$$

$$b=\frac{q_0^{m-1}k}{\nu\rho},\ U=\frac{V}{dq_0},\ A=\frac{MR^2}{2K},\ T=q_0t,\ d=\sqrt{\frac{\nu}{q_0}},\ \xi_0=\frac{R}{d},\ \xi=\frac{r}{d},\ \eta_0=\frac{H}{d},\ \eta=\frac{z}{d}; \tag{5}$$

A – отношение моментов инерции жидкости в вискозиметре и пустой подвесной системы K; d – толщина пограничного слоя; D – безразмерный второй инвариант тензора скоростей деформации; $D_{\xi\varphi(\eta\varphi)}$ – безразмерная $\xi\varphi(\eta\varphi)$-я компонента тензора скоростей деформации; k и m – постоянная и показатель степенного реологического закона; M – масса среды; H и R – внутренние высота и радиус цилиндра; t – время; P – момент сил, приложенных к цилиндру со стороны среды; q_0 – циклическая частота колебаний пустого цилиндра; r – радиальная координата ($r=0$ на оси цилиндра); z – осевая координата ($z=0$ на нижнем торце цилиндра, $z=H$ – на верхнем); V – азимутальная компонента скорости; α – угловое смещение цилиндра из положеа при $m=1$ эти значения параметров колебаний выше, чем при $m=2$, ввиду реализации бóльших значений $\xi_{0_{\text{нв}}}$ в последнем случае. Заметим, что для псевдопластичных сред влияние вторичных течений на колебания сильнее, чем для ньютоновских (и тем более дилатантных) сред, и граница по высоте, когда их можно не учитывать, смещается вверх (это связано с глубиной проникновения, пропорциональной γ и пр.); высота χ для таких сред обычно также больше (так как $\xi_{0_{\text{нв}}}$ меньше); переходные процессы, определяемые начальными условиями (4), протекают дольше.

Оценивание свойств жидкостей. Очевидной в общем случае цилиндра некоторой конечной длины представляется методика оценивания свойств по закону колебаний с учетом в т.ч. и переходных процессов. Тогда оценка свойств проводится путем минимизации функции качества, являющейся критерием соответствия экспериментальных $y_{\text{э}}$ и расчетных $y_{\text{р}}$ значений наблюдаемых в эксперименте параметров и построенной, например, по методу наименьших квадратов: $f(m,b)=\sum(y_{\text{р}j}-y_{\text{э}j})^2$, где j – номер экспериментальной точки; вектор $\mathbf{y}=\boldsymbol{\alpha}$, можно принять также $\mathbf{y}=[\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\delta}]$. В рамках матрицы Якоби необходимо выбрать условия для оптимального эксперимента исходя из большей наблюдаемости неньютоновских эффектов (в т.ч. большей разницы в значениях параметров колебаний в начале ($\Delta_{\text{н}}$ и $\lambda_{\text{н}}$) и конце ($\Delta_{\text{к}}$ и $\lambda_{\text{к}}$) колебательного процесса) и меньшей чувствительности m и b к ошибкам в измеряемых в эксперименте величинах.

При выборе таких условий необходимо принимать во внимание, что при прочих равных условиях эксперимента с увеличением η_0 растут A и разница между $\Delta_{\text{н}}$ и $\Delta_{\text{к}}$, $\lambda_{\text{н}}$ и $\lambda_{\text{к}}$. При малом декременте затухание более долгое (больше разница во времени между значениями α : α_0 и $\alpha_{\text{к}}$ в конце колебаний, когда уверенная регистрация α уже невозможна), т.е. больше число колебаний N до затухания и меньше локальная чувствительность $\partial\Delta/\partial N$ и $\partial\lambda/\partial N$. При большом декременте колебания затухают быстрее, чем завершаются переходные процессы, что может вносить ошибку от неучтенных начальных факторов, и, помимо этого, чем менее длителен колебательный процесс, тем меньше данных для методов параметрической идентификации, так как при равенстве дисперсий в различных точках замера здесь берется максимально возможное их число. Чем меньше A, тем Δ и λ в зависимости от $\xi_{0_{\text{нв}}}$ для среды Оствальда–Вейля (от ξ_0 для ньютоновской среды) изменяются слабее и наблюдаемость нелинейных свойств хуже, но с другой стороны тогда слабее чувствительность свойств к ошибкам в параметрах установки и колебаний. При обсуждении чувствительности можно в начальном приближении воспользоваться результатами, полученными по вязкости для ньютоновской среды.

Заметим, что использование приближения длинного цилиндра для оценки свойств обладает рядом преимуществ. Так, например, ошибки в плотности и высоте тигля слабее влияют на вязкостные свойства среды, вдоль оси оврага на плоскости (m,b) минимум функции качества $f(m,b)$ обычно более выражен, а также численная реализация модели (1)–(5) в этом случае проще, что обеспечивает бóльшую точность, устойчивость и эффективность решения и пр.

Заключение

Итак, при изучении нелинейных свойств жидких сред крутильно-колебательным методом при известной конфигурации тигля целесообразно использовать модель, соответствующую бесконечно длинному цилиндру, с предварительной оценкой высоты тигля, отвечающей ему, а также необходимо выполнить планирование оптимального эксперимента с учетом всех определяющих при заданных условиях факторов.

Литература

1. Елюхина И.В., Вяткин Г.П., Бескачко В.П. Новые возможности крутильно-колебательного метода Швидковского Е.Г.: идентификация реологической принадлежности среды// Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2003. – Вып. 3. – № 6 (22). – С. 108–115.

2. Вяткин Г.П., Елюхина И.В. Оценивание методом крутильных колебаний плотности ньютоновской среды одновременно с вязкостью// См. в настоящем выпуске.

Поступила в редакцию 27 октября 2005 г.