УДК 532.137.3

ОЦЕНИВАНИЕ МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛОТНОСТИ НЬЮТОНОВСКОЙ СРЕДЫ ОДНОВРЕМЕННО С ВЯЗКОСТЬЮ

Г.П. Вяткин, И.В. Елюхина

Рассмотрены не обсуждаемые ранее вопросы, возникающие при одновременном оценивании вязкости и плотности ньютоновской среды в экспериментах с крутильным вискозиметром, и выполнены практические приложения предлагаемых методов параметрической идентификации.

Возможности измерения плотности ρ одновременно с вязкостью ν в различных вискозиметрических экспериментах рассмотрены, а также детально изучены для случая внешней гидродинамической задачи, в [1]. Подобное обсуждение для крутильно-колебательного вискозиметра [2] выполнено в [3], но эти результаты не свободны от недостатков [4], затрудняющих их использование, например, для проверки согласованности вискозиметрических данных. Работоспособная методика одновременной оценки свойств к настоящему времени не реализована на практике. В [4] были изложены некоторые аспекты такого оценивания, а в настоящей работе детально рассмотрим основные из них и продемонстрируем эффективность применения разработанных методов для решения практических задач.

Математическая формулировка задачи, и в т.ч. рабочее вискозиметрическое уравнение представлены в [4]. Далее все размерные величины даны в системе СГС; под чувствительностью понимается $\psi_{y,x} = |(\partial y/\partial x)\cdot x/y|$, а под ошибками Δ_x параметров x – их относительные величины. Неизвестные параметры ν и ρ определяются из условия минимума функции качества вида

$$f(\nu,\rho) = \sqrt{\tilde{n}_{\mathrm{Re}}\cdot \mathrm{Re}^2(F) + \tilde{n}_{\mathrm{Im}}\cdot \mathrm{Im}^2(F)}\,, \qquad (1)$$

где $c_{\mathrm{Re}}, c_{\mathrm{Im}}$ – весовые коэффициенты; Re, Im – действительная и мнимая части от функции F [4].

Введем также безразмерные комплексы

$$A = 0{,}5MR^2/K\,,\ \xi_0 = R/d\,,\ \chi = 2H/R\,, \qquad (2)$$

где $d = \sqrt{\nu\tau_0/2\pi}$ – толщина пограничного слоя, H – полувысота столба жидкости, K – момент инерции пустой подвесной системы, M – масса жидкости; R – внутренний радиус цилиндра, τ_0 – период собственных колебаний в отсутствии среды.

Особенности одновременного оценивания вязкости и плотности

Причинами, затрудняющими решение задачи, в приведенной постановке являются овражистый характер функции (1) на плоскости (ν,ρ) и высокая чувствительность рассчитываемых через $\mathrm{Im}(F)$ свойств к изменению периода. Тангенс угла между касательной к оси криволинейного оврага и осью плотности близок по значению к $\psi_{\nu,\rho}$. Заметим, что

$$\psi_{\rho,x} \sim \psi_{\nu,x}\,\psi_{\rho,\nu}\,. \qquad (3)$$

В вискозиметрическое уравнение плотность входит только в слагаемые, отражающие трение на торцах вискозиметра, не содержится в слагаемом, выражающем трение на боковой поверхности, и поэтому значение $\psi_{\rho,\nu}$ зависит, прежде всего, от отношения высоты к радиусу. Так, например, для длинного цилиндра овраг параллелен оси ρ и значение ρ не влияет на оценку ν; если число смачиваемых жидкостью торцов $a = 1$, то величина $\psi_{\rho,\nu}$ приблизительно в 2 раза выше по сравнению с таковой для $a = 2$. На рис. 1а показан поворот оси в зависимости от отношения вкладов в момент трения от торцов и боковой поверхности при базовом расчетном варианте задачи (*): $R = 1$, $K = 50$, $\tau_0 = 5$, $M_1 = 3$, $\nu = 0{,}01$, $\rho = 1$, $a = 2$ ($A = 0{,}03$, $\xi_0 = 11{,}21$, $\chi = 0{,}956$) – кривая 1; кривая 2 – $a = 1$, $M_1 = 3$; 3 – $a = 2$, $M_2 = 30$ ($A = 0{,}3$, $\chi = 9{,}56$).

Таблица

K	$M=0$			$M_1=15{,}115$ ($\chi=1{,}357$)			$M_2=20{,}197$ ($\chi=1{,}813$)			$M_3=25{,}259$ ($\chi=2{,}267$)		
	τ_0	δ_0	ξ_0	τ	δ	A	τ	δ	A	τ	δ	A
118	7,131	0,0216	14,3	7,263	0,101	0,149	7,292	0,133	0,199	7,316	0,149	0,249
146	7,922	0,0208	13,6	8,045	0,086	0,12	8,053	0,111	0,161	8,088	0,13	0,201
196	9,158	0,0138	12,6	9,294	0,072	0,089	9,233	0,0904	0,12	9,271	0,106	0,15
236	9,998	0,0126	12,1	10,078	0,0639	0,074	10,09	0,0792	0,099	10,22	0,097	0,124
274	10,773	0,0137	11,6	10,853	0,0578	0,064	10,85	0,0726	0,086	10,92	0,084	0,107

В примере наблюдается ситуация иная, чем на рис. 2: точки пересечения оврага расположены дальше от истинного значения, чем минимум $\mathrm{Re}(F)$ на оси оврага. Традиционный вариант здесь совершенно не применим к одновременной оценке свойств: помимо достаточно высоких значений Δ_ρ от ошибок в K и R ($\sim 15\,\%$) ошибки Δ_τ ведут или к $\rho \sim 0$, или к $\Delta_\rho > 500\%$; при оценке только вязкости $\Delta_\nu \sim 5\%$. Итак, ошибки Δ_x оказали такое влияние (т.е. некоторые из них увеличили значения вязкости и плотности, а некоторые уменьшили), что даже традиционный вариант оказался лучше предлагаемого (например, точка 12 и пр.); эти ошибки легко прогнозируемы и контролируемы при математическом моделировании условий крутильных колебаний.

Заключение

Итак, в настоящей работе показано, что

1) в зависимости от ошибок наблюдаемых параметров и условий эксперимента лучшим может быть вариант идентификации по действительной части вискозиметрического уравнения с использованием одной или двух точек и для проверки согласованности следует выбрать именно его, а затем путем моделирования оценить доверительные интервалы для оценок свойств в этих случаях и посмотреть, укладываются ли в них найденные из эксперимента значения ν и ρ;

2) для исключения эффектов вторичных течений и возможности использования традиционных расчетных выражений эксперименты по проверке согласованности вискозиметрических данных рекомендуется проводить в области слабовязкого приближения при высотах тигля, не меньших радиуса, и в предлагаемом методе идентификации свойств принять $\chi_{\min} \sim 1$.

Авторы признательны Бескачко В.П. за предоставление обсужденных выше опытных данных.

Литература

1. Krall A.H., Sengers J.V. Simultaneous measurement of viscosity and density with an oscillating-disk instrument// Int. J. of Thermophys. – 2003. – V. 24. – № 2. – P. 337–359.
2. Швидковский Е.Г. Некоторые вопросы вязкости расплавленных металлов. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 206 с.
3. Nieuwoudt J.C., Sengers J.V., Kestin J. On the theory of oscillating-cup viscometers// Physica A. – 1988. – V. 149. – P. 107–122.
4. Елюхина И.В. Планирование оптимального эксперимента по одновременному определению вязкости и плотности ньютоновской среды// Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2001. – Вып. 1. – № 7(07) – С. 71–76.
5. Grouvel J.M., Kestin J. Working equations for the oscillating-cup viscometer// Appl. Sci. Res. – 1978. – V. 34. – P. 427–443.
6. Folse R.F. Observations of secondary flows generated by a torsionally oscillating sphere in linearly stratified fluids// Phys. Fluids. – 1994. – V. 6. – P. 537–540.
7. Vollmann J., Riedel D. The viscosity of liquid Bi–Ga alloys// J. Phys.: Condens. Matter. – 1996. – V. 8. – P. 6175–6184.
8. Wang D., Overfelt R.A. Oscillating cup viscosity measurements of aluminum alloys: A201, A319 and A356// Int. J. of Thermophys. – 2002. – V. 23. – № 4. – P. 1063–1076.

Поступила в редакцию 27 октября 2005 г.