УДК 517.948

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОВОЙ ДИАГНОСТИКИ

В.П. Танана, Е.В. Худышкина

Предложен оптимальный по порядку алгоритм для решения обратной задачи тепловой диагностики и получены точные оценки погрешности этого алгоритма.

Введение

Необходимость постановки и решения обратных задач теплообмена возникает при оптимизации тепловых режимов технологических процессов, связанных с нагревом или охлаждением материалов. Непосредственно измерить изменяющиеся во времени плотности тепловых потоков, как правило, не представляется возможным. В то же время можно измерить температуру в отдельных точках внутри тела. Отметим, что большое число обратных задач теплообмена приведены в [1].

Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial v(y,s)}{\partial s}=\frac{\partial^2 v(y,s)}{\partial y^2}, \tag{1}$$

где $y\in[0,h(s)]$, $s\geq 0$. Функция $h(s)\in C^2[0,\infty)$ известна, причем $h(0)=1$ и для нее существует $S>2$ такое, что при $s\geq S$ $h(s)=y_1>0$. На отрезке $[0,S]$ функция $h(s)$ строго убывает. Кроме того, заданы условия:

$$v(y,0)=0, \quad y\in[0,1], \tag{2}$$

$$v(0,s)=0, \quad s\geq 0, \tag{3}$$

$$v(y_0,s)=f(s), \quad 0<y_0<1, \tag{4}$$

а граничное значение

$$v'_y(h(s),s)=\bar{v}(s) \tag{5}$$

подлежит определению.

Эта задача является некорректно поставленной (неустойчивой), но имеющей при естественных ограничениях на функцию $f(s)$ (см. [2]) не более одного решения. Предположим, что существует $S_1>S$ такое, что

$$\forall s\geq S_1 \quad \bar{v}(s)=0, \quad \bar{v}(s)\equiv 0, \tag{6}$$

$$\bar{v}(0)=\bar{v}'(0)=0, \tag{7}$$

$$\bar{v}(s)\in C^1[0,\infty). \tag{8}$$

Будем считать, что искомая функция $\bar{v}_0(s)=[v_0(h(s),s)]'_y$ в задаче (1)–(5) удовлетворяет условиям (6)–(8), а соответствующее ей значение $f_0(s)=v_0(y_0,s)$ нам не известно. Вместо него задано некоторое непрерывно - дифференцируемое приближение $f_\delta(s)$ из пространства $L_2[0,\infty)$ и уровень погрешности δ такие, что

$$\int_0^\infty (f_\delta(s)-f_0(s))^2\,ds\leq\delta^2 . \tag{9}$$

Требуется по паре (f_δ,δ) определить приближённое решение $\bar{v}_\delta(s)$ задачи (1)–(5) наиболее близкое к $\bar{v}_0(s)$ на классе корректности M_r, определяемом формулой

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{ch}^{-1/2}\sqrt{2\lambda} \le \frac{\sqrt{\mathrm{ch}\sqrt{2\lambda}+\cos\sqrt{2\lambda}}}{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\sqrt{2\lambda}} \le \sqrt{2}\,\mathrm{ch}^{-1/2}\sqrt{2\lambda} \tag{35}$$

и из формул (33)–(34) следует, что $\sqrt{C^*C} = G(B)$, где $G(\sigma) \sim \ln^{-2}\left(\frac{1}{\sigma}\right)$ при $\sigma \to 0$.

Используя для решения уравнения (31) метод проекционной регуляризации, изложенный в [3], сведём его к уравнению

$$A_1\hat{z}(\lambda) = \frac{\mathrm{ch}\sqrt{2\lambda} + \cos\sqrt{2\lambda}}{2\,\mathrm{ch}^2\sqrt{2\lambda}}\,\hat{z}(\lambda) = A^*\hat{\zeta}_\delta(\lambda), \tag{36}$$

где $A_1 = A^*A$, а

$$A^*\hat{\zeta}_\delta(\lambda) = \frac{\mathrm{ch}\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\cos\sqrt{\frac{\lambda}{2}} - i\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\sin\sqrt{\frac{\lambda}{2}}}{\mathrm{ch}\sqrt{2\lambda}}\,\hat{\zeta}_\delta(\lambda). \tag{37}$$

Далее, регуляризуем исходные данные $(\hat{\zeta}_\delta(\lambda), \delta)$ задачи. Для этого определим функцию $\hat{\zeta}_\delta(\lambda, \overline{\alpha}(\delta))$ следующим образом: при условии $\left\|\hat{\zeta}_\delta\right\| > 3\|A\|\delta$

$$\hat{\zeta}_\delta(\lambda, \overline{\alpha}(\lambda)) = \begin{cases} \hat{\zeta}_\delta(\lambda) & \text{ï ðè} \quad \lambda \le \overline{\alpha}(\delta), \\ 0 & \text{ï ðè} \quad \lambda > \overline{\alpha}(\delta), \end{cases} \tag{38}$$

где $\overline{\alpha}(\delta)$ определим формулой $\int\limits_{\overline{\alpha}(\delta)}^{\infty} \left|\hat{\zeta}_\delta(\lambda)\right|^2 d\lambda = 9\|A\|^2\delta^2$, а при условии, что $\left\|\hat{\zeta}_\delta\right\| \le 3\|A\|\delta$, $\hat{\zeta}_\delta(\lambda, \overline{\alpha}(\delta)) \equiv 0$. Тогда приближённое решение $\hat{z}_\delta(\lambda)$ уравнения (31) определим формулой

$$\hat{z}_\delta(\lambda) = A_1^{-1}\hat{\zeta}_\delta(\lambda, \overline{\alpha}(\delta)) \tag{39}$$

и для него, следуя [3], справедлива оценка

$$\left\|\hat{z}_\delta - \hat{z}_0\right\| \le l_2 \ln^{-2}\left(\frac{1}{\delta}\right). \tag{40}$$

Здесь l_2 – некоторая константа, а $\hat{z}_0$ – соответствующее точное решение уравнения (31). Заметим, что оценка (40) является точной по порядку на классе $C\overline{S}_r$, а используемый для решения уравнения (31) метод проекционной регуляризации оптимален по порядку на этом классе.

Применяя к $\hat{z}_\delta(t)$ преобразование F^{-1}, обратное к F, и выделяя действительную часть, получим приближённое решение $z_\delta(s)$ задачи (18)–(22): $u_\delta(s) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}[F^{-1}(\hat{u}_\delta)]$. Ввиду изометричности оператора F, для $z_\delta(s)$ будет выполняться оценка (40).

Наконец, сделав соответствующие замены переменных в $z_\delta(s)$, получим приближённое решение $\overline{u}_\delta(t)$ задачи (1)–(5), для которого оценка (40) также останется справедливой, но с некоторой другой константой l_3.

Литература

1. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. – М.: Машиностроение, 1988. – 290 с.

2. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1988. – 288 с.

3. Танана В.П. Об оптимальности по порядку метода проекционной регуляризации при решении обратных задач// Сибирский журнал индустриальной математики. – 2004. – Т. 7. – № 2. – С. 117–132.

4. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Наука, 1961. – 524 с.

Поступила в редакцию 26 апреля 2005 г.