УДК 517.9

ЗАДАЧИ СТАРТОВОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

М.В. Плеханова, В.Е. Федоров

В работе исследованы задачи минимизации квадратичных функционалов на решениях дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве с вырожденным оператором при производной, удовлетворяющих начальному условию Коши или обобщенному условию Шоуолтера – Сидорова. Речь идет о задачах стартового управления, то есть задачах, в которых функцией управления является начальное значение функции состояния. Абстрактные результаты проиллюстрированы на примере задач стартового управления для системы уравнений фазового поля.

Введение

Пусть X и Y – гильбертовы пространства, операторы $L \in L(X;Y)$ (линейный и непрерывный), $M \in Cl(X;Y)$ (линейный и замкнутый с областью определения dom*M*, плотной в X). В предположении $\ker L \neq \{0\}$ задача Коши

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + y(t), \qquad x(0) = u \tag{1}$$

представляет собой абстрактную форму многих начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных, встречающихся в естествознании. Уравнение (1) с вырожденным оператором при производной часто называют уравнением соболевского типа [1–3]. Настоящая работа посвящена исследованию задачи оптимального управления

$$u \in U_\partial, \tag{2}$$

$$J(x,u) = \frac{1}{2}\|x - w\|^2_{H^1(0,T;X)} + \frac{N}{2}\|u - u_0\|^2_X \to \inf \tag{3}$$

для системы (1). Здесь заданы U_∂ – выпуклое замкнутое подмножество пространства X, константа $N>0$, функции $w \in H^1(0,T;X)$, $u_0 \in X$. Поскольку функция управления определяет начальное значение функции состояния, то задача называется задачей стартового управления. Такие задачи для уравнений вида (1) с оператором $L=I$ рассматриваются, например, в [4].

Для уравнений соболевского типа ранее, по-видимому, рассматривались только задачи с распределенным управлением, когда функция управления u определяет правую часть уравнения (см. [5–10]). В перечисленных работах рассмотрены случаи, когда уравнение $L\dot{x}(t) = Mx(t)$ обладает аналитической в плоскости разрешающей группой операторов [6], аналитической в секторе полугруппой [5, 8], сильно непрерывной разрешающей полугруппой [7, 9, 10].

Используемое в данной работе условие сильной (L,p)-радиальности оператора M гарантирует существование сильно непрерывной разрешающей полугруппы операторов однородного уравнения (1), вырождающейся на M-присоединенных векторах оператора L высоты не больше p [3, 11]. При этом все пространство распадается в прямую сумму ядра и образа полугруппы. Проектор на образ полугруппы вдоль ее ядра обозначим через P. При исследовании некоторых уравнений соболевского типа, описывающих реальные процессы, более естественным оказывается задание в начальный момент времени не условия Коши $x(0) = x_0$, а так называемого обобщенного условия Шоуолтера – Сидорова $Px(0) = Px_0$ (обоснование термина см. в [1, 12]). Именно такое условие используется при исследовании системы уравнений фазового поля, моделирующей фазовые переходы первого рода [13]. В работе помимо задачи (1)–(3) рассмотрена аналогичная задача со стартовым управлением $Px(0) = u$. Ранее задача оптимального управления для уравнения соболевского типа с распределенным управлением в правой части уравнения и с обобщенным условием Шоуолтера – Сидорова в случае существования аналитической полугруппы однородного уравнения была рассмотрена в работе [14].

Пространство Z составляют пары функций $(v,w)\in(H^1(0,T;(L_2(\Omega)))^2$ такие, что $v_t-\Delta v+\Delta w\in H^1(0,T;L_2(\Omega))$, $(1-\alpha-\Delta)w-v\in H^1(0,T;L_2(\Omega))$. Применение теоремы 5 приводит к следующему результату.

Теорема 8. *Пусть* $U_\partial\cap H^2_{\frac{\partial}{\partial n}+\lambda}(\Omega)\neq\varnothing$. *Тогда существует единственное решение* $((\hat v,\hat w),\hat u)\in Z\times L_2(\Omega)$ *задачи* (20)–(26).

Рассмотрение аналогичной задачи с жестким управлением

$$J(v,w)=\frac{1}{2}\|v-z_{01}\|^2_{H^1(0,T;L_2(\Omega))}+\frac{1}{2}\|w-z_{02}\|^2_{H^1(0,T;L_2(\Omega))}\to\inf \qquad (27)$$

приводит к следующему результату.

Теорема 9. *Пусть* U_∂ *– ограниченное множество в пространстве* $L_2(\Omega)$, $U_\partial\cap H^2_{\frac{\partial}{\partial n}+\lambda}(\Omega)\neq\varnothing$. *Тогда существует единственное решение* $((\hat v,\hat w),\hat u)\in Z\times L_2(\Omega)$ *задачи* (20)–(25), (27).

Литература

1. Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов// Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49. – № 4. – С. 47–74.

2. Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. – Новосибирск: Научная книга, 1998.

3. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. – Utrecht; Boston: VSP, 2003.

4. Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. – Новосибирск: Научная книга, 1999.

5. Свиридюк Г.А., Ефремов А.А. Оптимальное управление линейными уравнениями типа Соболева с относительно p-секториальными операторами// Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31. – № 11. – С. 1912–1919.

6. Свиридюк Г.А., Ефремов А.А. Задача оптимального управления для линейных уравнений типа Соболева// Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 12. – С. 75–83.

7. Плеханова М.В. Задача оптимального управления с относительно p-радиальным оператором// Уравнения соболевского типа: Сб. науч. работ. – Челябинск: Челяб. гос. ун-т. – 2002. – С. 206–214.

8. Fedorov V.E., Plekhanova M.V. Problem of Optimal Control for a Class of Degenerate Equations// Modelling and Analysis of Logic Controlled Dynamic Systems. IFAC Workshop. – Irkutsk, Russia. – 2003. – P. 215–221.

9. Федоров В.Е., Плеханова М.В. Слабые решения и проблема квадратического регулятора для вырожденного дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве// Вычислительные технологии. – 2004. – Т. 9. – № 2. – С. 92–102.

10. Федоров В.Е., Плеханова М.В. Оптимальные управление линейными уравнениями соболевского типа// Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40. – № 11. – С. 1548–1556.

11. Федоров В.Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов// Алгебра и анализ. – 2000. – Т. 12. – Вып. 3. – С. 173–200.

12. Свиридюк Г.А., Федоров В.Е. Линейные уравнения соболевского типа. – Челябинск: Челяб. гос. ун-т, 2003.

13. Плотников П.И., Клепачева А.В. Уравнения фазового поля и градиентные потоки маргинальных функций// Сиб. мат. журн. – 2001. – Т. 42. – № 3. – С. 651–669.

14. Плеханова М.В., Федоров В.Е. Задача оптимального управления для одного класса вырожденных уравнений// Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2004. – № 5. – С. 40–44.

15. Федоров В.Е., Уразаева А.В. Обратная задача для одного класса сингулярных линейных операторно-дифференциальных уравнений// Тр. Воронежской зимней мат. школы. – Воронеж: ВГУ – 2004. – С. 161–172.

Поступила в редакцию 19 мая 2005 г.