УДК 517.53

ЗАМЕЧАНИЕ О МОНОТЕТИЧЕСКИХ ПОДГРУППАХ ТОРА

Н.Н. Неряхин

Пусть $\{\xi^n\}_{n\in Z}$ – циклическая подгруппа группы $\mathbf{T}^\nu$, порожденная вектором $\xi=(e^{2\pi i\Theta_1},\ldots,e^{2\pi i\Theta_\nu})$. Ее замыкание $\mathbf{F}=\overline{\{\xi^n\}_{n\in Z}}$ по определению является монотетической подгруппой тора $\mathbf{T}^\nu$. Группа $\mathbf{F}$ с точностью до изоморфизма определяется параметрами r и σ. Параметр r является рангом над $\mathbf{Q}$ системы Θ_0 = 1, Θ_1, …, Θ_ν. В работе получена формула, позволяющая явно находить параметр σ.

Эта заметка посвящена уточнению одной теоремы из теории аппроксимаций Паде [1]. В связи с изучением равномерной сходимости последней промежуточной строки таблицы Паде в [1] была получена теорема о структуре монотетических подгрупп тора.

Введем необходимые определения. Пусть G – топологическая группа, H – подгруппа G. H называется монотетической, если она является замыканием некоторой циклической подгруппы G [2]. Пусть G = $\mathbf{T}^\nu$. Введем вектор $\xi=(e^{2\pi i\Theta_1},\ldots,e^{2\pi i\Theta_\nu})$, принадлежащий тору $\mathbf{T}^\nu$. Он порождает циклическую подгруппу $\{\xi^n\}_{n\in Z}$ группы $\mathbf{T}^\nu$. Её замыкание $\mathbf{F}=\overline{\{\xi^n\}_{n\in Z}}$ является монотетической подгруппой тора $\mathbf{T}^\nu$. В теореме 2.1 из [1] показано, что $\mathbf{F}$ изоморфна группе $\mathbf{Z}_\sigma\times\mathbf{T}^r$. Таким образом, $\mathbf{F}$ с точностью до изоморфизма определяется параметрами r и σ. В [1] дана процедура, позволяющая явно вычислить группу $\mathbf{F}$. Показано, что число $r+1$ является рангом над полем рациональных чисел $\mathbf{Q}$ системы аргументов Θ_0 = 1, Θ_1, …, Θ_ν, а σ вычисляется следующим образом.

Пусть $\Theta_0=1$, Θ_1, …, Θ_r – максимальная линейно независимая над $\mathbf{Q}$ подсистема системы Θ_0, Θ_1, …, Θ_ν, и $\Theta_j=\sum_{k=0}^{r}q_{kj}\Theta_k$, $q_{kj}\in\mathbf{Q}$, $j=r+1,\ldots,\nu$. Пусть α_{kk} – наименьшее общее кратное знаменателей рациональных дробей q_{kj} и $\alpha_{kj}=\alpha_{kk}q_{kj}$ для $k=0,\ldots,r,\ j=r+1,\ldots,\nu$. Составим целочисленную матрицу

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{00} & \ldots & 0 & \alpha_{0,r+1} & \ldots & \alpha_{0,\nu}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \ldots & \alpha_{rr} & \alpha_{r,r+1} & \ldots & \alpha_{r,\nu}\end{pmatrix}$$

и приведем ее к форме Смита над кольцом целых чисел $\mathbf{Z}$

$$A=S_1\Delta S_2^{-1}.$$

Здесь S_1, S_2 – обратимые над $\mathbf{Z}$ целочисленные матрицы. Обозначим через S матрицу, полученную из S_2 вычеркиванием первой строки и первых $r+1$ столбцов. Приведем теперь S к форме Смита:

$$S=T_1\Delta_0T_2^{-1}.$$

Тогда инвариантные факторы матрицы S обязательно имеют вид $1,\ldots,1,\sigma$, где σ – наибольший общий делитель миноров порядка $\nu-r$ матрицы S.

Цель заметки – получить явное выражение для σ в терминах матрицы A.

Теорема. *Параметр σ вычисляется в терминах матрицы A по формуле*

$$\sigma=\frac{\alpha_{00}\overline{\delta_r}}{\delta_{r+1}},$$

$$S_2\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & \dots & n_{\nu-r} \\ r+2 & r+3 & \dots & \nu+1 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^N \alpha_{00}\, \overline{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \\ l_1 & l_2 & \dots & l_r \end{pmatrix}}{\delta_{r+1}}.$$

Отсюда $\sigma = \text{НОД}\left\{ \dfrac{\alpha_{00}\, \overline{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \\ l_1 & l_2 & \dots & l_r \end{pmatrix}}{\delta_{r+1}} \,|\, 1 \le l_1 < \dots < l_r \le \nu \right\} = \dfrac{\alpha_{00}\overline{\delta_r}}{\delta_{r+1}}$, где $\overline{\delta_r}$ – наибольший общий делитель миноров порядка r матрицы $\overline{A}$. Теорема доказана.

В заключение автор выражает благодарность В.М. Адукову за постановку задачи и помощь в работе.

Литература

1. Adukov V.M. The uniform convergence of subsequences of the last intermediate row of the Padé table// J. Approx. Theory. – 2003. – V. 122. – P. 160–207.

2. Моррис С.А. Двойственность Понтрягина и строение локально-компактных абелевых групп. – М.: Мир, 1967. – 117 с.

3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 345 с.

Поступила в редакцию 15 сентября 2005 г.