# Математика

УДК 517.53

## ОБ ОЦЕНКЕ КОНСТАНТЫ В ТЕОРЕМЕ БУСЛАЕВА – ГОНЧАРА – СУЕТИНА

*В.М. Адуков*

**Пусть $\Upsilon_{m,\sigma}$ – класс мероморфных функций, для радиусов $m$-мероморфности которых выполняется условие $R_m < R_{m+1}$ и для которых доминирующие полюсы лежат в вершинах правильного $\sigma$-многоугольника. В работе предложен метод построения всех функций $a(z) \in \Upsilon_{m,\sigma}$, для которых не существует подпоследовательности $m$-й строки таблицы Паде, равномерно сходящейся к $a(z)$ на компактах, принадлежащих кругу $m$-мероморфности и не содержащих полюсов $a(z)$. На основе этого получены оценки константы из теоремы Буслаева – Гончара – Суетина.**

### 1. Введение

Пусть $a(z)$ – аналитическая в окрестности $z=0$ функция, $D_m = \{z \in \mathbb{C} \big| \, |z| < R_m\}$ – круг $m$-мероморфности функции $a(z)$, т.е. максимальный открытый круг с центром в нуле, в который $a(z)$ продолжается как мероморфная функция, имеющая не более $m$ полюсов. Дж. Бейкером и П. Грейвс-Моррисом была высказана гипотеза (см., например, [1]), что *для любых $a(z)$ и $m$ существует подпоследовательность аппроксимаций Паде $\pi_{n,m}(z)$, $n \in \Lambda \subset \mathbb{N}$, $m$-й строки таблицы Паде для $a(z)$, равномерно сходящаяся к $a(z)$ на компактах, принадлежащих $D_m$ и не содержащих полюсов $a(z)$*. В.И. Буслаевым, А.А. Гончаром и С.П. Суетиным [2] показано, что данное предположение справедливо для всех мероморфных функций при $R_m = \infty$. В общем же случае гипотеза оказалась неверной, как показывает следующий простой контрпример, приведенный этими авторами.

Пусть

$$a(z) = \frac{1+\sqrt[3]{2}z}{1-z^3}.$$

Тогда $R_0 = R_2 = 1$ и при $m=2$ полюсы $\zeta_n$ аппроксимаций Паде $\pi_{n,2}(z)$ легко вычисляются: $\zeta_n = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}$ при $n = 0(\mathrm{mod}\, 3)$, $\zeta_n = \frac{1 \pm 3}{2\sqrt[3]{2}}$ при $n = 1(\mathrm{mod}\, 3)$, и $\zeta_n = \frac{-1 \pm 3}{\sqrt[3]{2}}$ при $n = 2(\mathrm{mod}\, 3)$. Таким образом, при любом $n$ функция $\pi_{n,2}(z)$ имеет хотя бы один полюс, модуль которого не превосходит $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Поэтому не существует подпоследовательности $\pi_{n,2}(z)$ равномерно сходящейся в круге $|z| \le \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, компактно принадлежащем $D_0 = D_2 = \{z \big| \, |z| < 1\}$.

Кроме того, в этой статье показано, что имеет место ослабленный вариант гипотезы Бейкера и Грейвс-Морриса с заменой круга $|z| < R_m$ на круг $|z| < c_m R_m$, где $0 < c_m < 1$ – константа, зависящая только от $m$. В частности, из приведенного выше примера следует оценка $c_2 \le \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = 0,7937005\ldots$. Задача о вычислении этой константы или о как можно более точной ее

Приведем значения минимальных модулей $\overline{r}_\sigma$ корней многочлена $d_\sigma(\lambda_0)$ для нескольких первых значений $\sigma$ :

$$\overline{r}_3 = 0,6496787208, \quad \overline{r}_4 = 0,5882298353,$$
$$\overline{r}_5 = 0,5867107544, \quad \overline{r}_6 = 0,6063459057.$$

**3. Оценки константы $c_m$**

Построенные в теореме 1 элементы множества $G_\sigma$ позволяют получить оценку сверху для константы $c_m$ из теоремы Буслаева – Гончара – Суетина [2].

В самом деле, для любого $m \geq 3$ положим $R_m = \overline{r}_{m+1}$ и $\sigma = m+1$. По этим данным мы можем построить мероморфную функцию $a(z) \in \Upsilon_{m,\sigma}$, которая имеет $m+1$ полюсов, лежащих в замкнутом круге $|z| \leq R_m$, и для которой точки $\zeta_0 = \lambda_0, \zeta_1 = \lambda_0\varepsilon, ..., \zeta_{\sigma-1} = \lambda_0\varepsilon^{\sigma-1}$ лежат на окружности $|z| = R_m$. Здесь $\lambda_0$ – корень уравнения $d_\sigma(\lambda_0) = 0$ такой, что $|\lambda_0| = \overline{r}_{m+1}$. Это означает, что в любом круге $|z| < R_m + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, с выброшенными полюсами $a(z)$, не существует сходящейся подпоследовательности $\pi_{n,m}(z)$. Таким образом, мы получили

**Предложение 1.**

$$c_m \leq \overline{r}_{m+1}.$$

#

В классе $\Upsilon_{m,\sigma}$ для констант $c_m$ можно получить и оценку снизу. Для данного класса функций константу $c_m$ будем обозначать $c_{m,\sigma}$.

**Теорема 2.** *Пусть* $a(z) \in \Upsilon_{m,\sigma}$. *Обозначим* $\underline{r}_\sigma$ *единственный положительный корень уравнения* $z^{\sigma-1} + z^{\sigma-2} + ... + z - 1 = 0$. *Тогда существует подпоследовательность* $\pi_{n,m}(z)$, *которая сходится равномерно к* $a(z)$ *внутри области, полученной из круга* $|z| < \underline{r}_\sigma R_m$ *выбрасыванием полюсов* $a(z)$ *и, таким образом,* $c_{m,\sigma} \geq \underline{r}_\sigma$.

**Доказательство.** Пусть $z_1, ..., z_\nu$ – доминирующие полюсы $a(z)$, лежащие в вершинах правильного $\sigma$-угольника ($\nu \leq \sigma$). В этом случае множество дополнительных предельных точек $N_{\mathbf{F}}$ совпадает с множеством нулей последовательности многочленов $\omega_j(z) = \sum_{k=1}^{\nu} C_k \Delta_k(z) z_k^j$, $j = 0,1,...,\sigma-1$. Предположим, что сходящейся подпоследовательности $\pi_{n,m}(z)$ не существует, т.е. каждый из многочленов $\omega_j(z)$ имеет хотя бы один корень $\zeta_j$ такой, что $|\zeta_j| < \underline{r}_\sigma R_m$. Тогда числа $\lambda_j = \frac{\zeta_j}{z_1}$ удовлетворяют неравенствам $|\lambda_j| < \underline{r}_\sigma$, $j = 0,1,...,\sigma-1$, и для них матрица $\Lambda_\sigma(\lambda_0,...,\lambda_{\sigma-1})$, а значит и $Z_\sigma(\lambda_0,...,\lambda_{\sigma-1})$ необратима.

С другой стороны, легко видеть, что матрица

$$Z_\sigma(0,...,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

обратима и для максимальной строчной нормы ее обратной справедливо равенство

$$\| Z_\sigma^{-1}(0,...,0) \|_\infty = 1.$$

Кроме того,

$$\| Z_\sigma(\lambda_0,...,\lambda_{\sigma-1}) - Z_\sigma(0,...,0) \|_\infty = \max_{0 \leq j \leq \sigma-1} \left( |\lambda_j^{\sigma-1}| + |\lambda_j^{\sigma-2}| + ... + |\lambda_j| \right).$$

Поскольку многочлен $z^{\sigma-1}+z^{\sigma-2}+...+z-1$ возрастает при $z>0$, то при $|\lambda_j|<\underline{r}_{\sigma}$, выполняются неравенства $|\lambda_j^{\sigma-1}|+|\lambda_j^{\sigma-2}|+...+|\lambda_j|<1$, $j=0,1,...,\sigma-1$. Это означает, что

$$\| Z_{\sigma}(\lambda_0,...,\lambda_{\sigma-1})-Z_{\sigma}(0,...,0)\|_{\infty}<\| Z_{\sigma}^{-1}(0,...,0)\|_{\infty}^{-1}=1,$$

т.е. матрица $Z_{\sigma}(\lambda_0,...,\lambda_{\sigma-1})$ обратима.

Противоречие показывает, что хотя бы для одного $j=j_0$ многочлен $\omega_{j_0}(z)$ не имеет корней в круге $|z|<\underline{r}_{\sigma}R_m$. Поэтому для $n=j_0(\mathrm{mod}\,\sigma)$ последовательность $\pi_{n,m}(z)$ сходится равномерно к $a(z)$ внутри круга $|z|<\underline{r}_{\sigma}R_m$ с выброшенными полюсами $a(z)$. **#**

Итак, в классе $\Upsilon_{m,\sigma}$ для констант $c_{m,\sigma}$ справедлива оценка:

$$\underline{r}_{\sigma}\le c_{m,\sigma}\le \overline{r}_{m+1}.$$

В частности,

$$0,6180339887\le c_{2,3}\le 0,6496787208;\qquad 0,5436890127\le c_{3,4}\le 0,5882298353;$$

$$0,5187900637\le c_{4,5}\le 0,5867107544;\qquad 0,5086603916\le c_{5,6}\le 0,6063459057.$$

*Работа выполнена при поддержке РФФИ-Урал, грант № 04-01-96006.*

**Литература**

1. Бейкер Дж., мл., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. – М.: Мир, 1986. – 502 с.

2. Буслаев В.И., Гончар А.А., Суетин С.П. О сходимости подпоследовательностей $m$-й строки таблицы Паде// Матем. сборник. – 1983. – Т. 120. – № 4. – С. 540–545.

3. Adukov V.M. The uniform convergence of subsequences of the last intermediate row of the Padé table// J. Approx. Theory – 2003. – V. 122. – P. 160–207.

4. Адуков В.М. О существовании сходящихся подпоследовательностей строки таблицы Паде для мероморфной функции// Известия Челябинского научного центра. – 2002. – Вып. 3. – С. 3–7.

***Поступила в редакцию 10 июня 2005 г.***