Математика

УДК 517.53

ОБ ОЦЕНКЕ КОНСТАНТЫ В ТЕОРЕМЕ БУСЛАЕВА – ГОНЧАРА – СУЕТИНА

В.М. Адуков

Пусть $\Upsilon_{m,\sigma}$ – класс мероморфных функций, для радиусов m-мероморфности которых выполняется условие $R_m < R_{m+1}$ и для которых доминирующие полюсы лежат в вершинах правильного σ-многоугольника. В работе предложен метод построения всех функций $a(z) \in \Upsilon_{m,\sigma}$, для которых не существует подпоследовательности m-й строки таблицы Паде, равномерно сходящейся к $a(z)$ на компактах, принадлежащих кругу m-мероморфности и не содержащих полюсов $a(z)$. На основе этого получены оценки константы из теоремы Буслаева – Гончара – Суетина.

1. Введение

Пусть $a(z)$ – аналитическая в окрестности $z = 0$ функция, $D_m = \{z \in \mathbb{C} \big| \ |z| < R_m\}$ – круг m-мероморфности функции $a(z)$, т.е. максимальный открытый круг с центром в нуле, в который $a(z)$ продолжается как мероморфная функция, имеющая не более m полюсов. Дж. Бейкером и П. Грейвс-Моррисом была высказана гипотеза (см., например, [1]), что *для любых $a(z)$ и m существует подпоследовательность аппроксимаций Паде $\pi_{n,m}(z)$, $n \in \Lambda \subset \mathbb{N}$, m-й строки таблицы Паде для $a(z)$, равномерно сходящаяся к $a(z)$ на компактах, принадлежащих D_m и не содержащих полюсов $a(z)$*. В.И. Буслаевым, А.А. Гончаром и С.П. Суетиным [2] показано, что данное предположение справедливо для всех мероморфных функций при $R_m = \infty$. В общем же случае гипотеза оказалась неверной, как показывает следующий простой контрпример, приведенный этими авторами.

Пусть

$$a(z) = \frac{1 + \sqrt[3]{2}z}{1 - z^3}.$$

Тогда $R_0 = R_2 = 1$ и при $m = 2$ полюсы ζ_n аппроксимаций Паде $\pi_{n,2}(z)$ легко вычисляются: $\zeta_n = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}$ при $n = 0 (\operatorname{mod} 3)$, $\zeta_n = \dfrac{1 \pm 3}{2\sqrt[3]{2}}$ при $n = 1 (\operatorname{mod} 3)$, и $\zeta_n = \dfrac{-1 \pm 3}{\sqrt[3]{2}}$ при $n = 2 (\operatorname{mod} 3)$. Таким образом, при любом n функция $\pi_{n,2}(z)$ имеет хотя бы один полюс, модуль которого не превосходит $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Поэтому не существует подпоследовательности $\pi_{n,2}(z)$ равномерно сходящейся в круге $|z| \le \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$, компактно принадлежащем $D_0 = D_2 = \{z \big| \ |z| < 1\}$.

Кроме того, в этой статье показано, что имеет место ослабленный вариант гипотезы Бейкера и Грейвс-Морриса с заменой круга $|z| < R_m$ на круг $|z| < c_m R_m$, где $0 < c_m < 1$ – константа, зависящая только от m. В частности, из приведенного выше примера следует оценка $c_2 \le \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = 0,7937005\ldots$. Задача о вычислении этой константы или о как можно более точной ее

Приведем значения минимальных модулей $\overline{r}_\sigma$ корней многочлена $d_\sigma(\lambda_0)$ для нескольких первых значений σ:

$$\overline{r}_3 = 0,6496787208, \quad \overline{r}_4 = 0,5882298353,$$
$$\overline{r}_5 = 0,5867107544, \quad \overline{r}_6 = 0,6063459057.$$

3. Оценки константы c_m

Построенные в теореме 1 элементы множества G_σ позволяют получить оценку сверху для константы c_m из теоремы Буслаева – Гончара – Суетина [2].

В самом деле, для любого $m \ge 3$ положим $R_m = \overline{r}_{m+1}$ и $\sigma = m+1$. По этим данным мы можем построить мероморфную функцию $a(z) \in \Upsilon_{m,\sigma}$, которая имеет $m+1$ полюсов, лежащих в замкнутом круге $|z| \le R_m$, и для которой точки $\zeta_0 = \lambda_0, \zeta_1 = \lambda_0\varepsilon, ..., \zeta_{\sigma-1} = \lambda_0\varepsilon^{\sigma-1}$ лежат на окружности $|z| = R_m$. Здесь λ_0 – корень уравнения $d_\sigma(\lambda_0) = 0$ такой, что $|\lambda_0| = \overline{r}_{m+1}$. Это означает, что в любом круге $|z| < R_m + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, с выброшенными полюсами $a(z)$, не существует сходящейся подпоследовательности $\pi_{n,m}(z)$. Таким образом, мы получили

Предложение 1.

$$c_m \le \overline{r}_{m+1}.$$

#

В классе $\Upsilon_{m,\sigma}$ для констант c_m можно получить и оценку снизу. Для данного класса функций константу c_m будем обозначать $c_{m,\sigma}$.

Теорема 2. *Пусть $a(z) \in \Upsilon_{m,\sigma}$. Обозначим $\underline{r}_\sigma$ единственный положительный корень уравнения $z^{\sigma-1} + z^{\sigma-2} + ... + z - 1 = 0$. Тогда существует подпоследовательность $\pi_{n,m}(z)$, которая сходится равномерно к $a(z)$ внутри области, полученной из круга $|z| < \underline{r}_\sigma R_m$ выбрасыванием полюсов $a(z)$ и, таким образом, $c_{m,\sigma} \ge \underline{r}_\sigma$.*

Доказательство. Пусть $z_1, ..., z_\nu$ – доминирующие полюсы $a(z)$, лежащие в вершинах правильного σ-угольника ($\nu \le \sigma$). В этом случае множество дополнительных предельных точек $N_{\mathbf{F}}$ совпадает с множеством нулей последовательности многочленов $\omega_j(z) = \sum_{k=1}^{\nu} C_k \Delta_k(z) z_k^j$, $j = 0,1,...,\sigma-1$. Предположим, что сходящейся подпоследовательности $\pi_{n,m}(z)$ не существует, т.е. каждый из многочленов $\omega_j(z)$ имеет хотя бы один корень ζ_j такой, что $|\zeta_j| < \underline{r}_\sigma R_m$. Тогда числа $\lambda_j = \frac{\zeta_j}{z_1}$ удовлетворяют неравенствам $|\lambda_j| < \underline{r}_\sigma$, $j = 0,1,...,\sigma-1$, и для них матрица $\Lambda_\sigma(\lambda_0, ..., \lambda_{\sigma-1})$, а значит и $Z_\sigma(\lambda_0, ..., \lambda_{\sigma-1})$ необратима.

С другой стороны, легко видеть, что матрица

$$Z_\sigma(0,...,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

обратима и для максимальной строчной нормы ее обратной справедливо равенство

$$\| Z_\sigma^{-1}(0,...,0) \|_\infty = 1.$$

Кроме того,

$$\| Z_\sigma(\lambda_0, ..., \lambda_{\sigma-1}) - Z_\sigma(0,...,0) \|_\infty = \max_{0 \le j \le \sigma-1} \left(|\lambda_j^{\sigma-1}| + |\lambda_j^{\sigma-2}| + ... + |\lambda_j| \right).$$

Поскольку многочлен $z^{\sigma-1}+z^{\sigma-2}+...+z-1$ возрастает при $z>0$, то при $|\lambda_j|<\underline{r}_\sigma$, выполняются неравенства $|\lambda_j^{\sigma-1}|+|\lambda_j^{\sigma-2}|+...+|\lambda_j|<1$, $j=0,1,...,\sigma-1$. Это означает, что

$$\| Z_\sigma(\lambda_0,...,\lambda_{\sigma-1}) - Z_\sigma(0,...,0)\|_\infty < \| Z_\sigma^{-1}(0,...,0)\|_\infty^{-1} = 1,$$

т.е. матрица $Z_\sigma(\lambda_0,...,\lambda_{\sigma-1})$ обратима.

Противоречие показывает, что хотя бы для одного $j=j_0$ многочлен $\omega_{j_0}(z)$ не имеет корней в круге $|z|<\underline{r}_\sigma R_m$. Поэтому для $n=j_0(\mathrm{mod}\,\sigma)$ последовательность $\pi_{n,m}(z)$ сходится равномерно к $a(z)$ внутри круга $|z|<\underline{r}_\sigma R_m$ с выброшенными полюсами $a(z)$. **#**

Итак, в классе $\Upsilon_{m,\sigma}$ для констант $c_{m,\sigma}$ справедлива оценка:

$$\underline{r}_\sigma \le c_{m,\sigma} \le \overline{r}_{m+1}.$$

В частности,

$$0,6180339887 \le c_{2,3} \le 0,6496787208; \qquad 0,5436890127 \le c_{3,4} \le 0,5882298353;$$

$$0,5187900637 \le c_{4,5} \le 0,5867107544; \qquad 0,5086603916 \le c_{5,6} \le 0,6063459057.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ-Урал, грант № 04-01-96006.

Литература

1. Бейкер Дж., мл., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
2. Буслаев В.И., Гончар А.А., Суетин С.П. О сходимости подпоследовательностей m-й строки таблицы Паде// Матем. сборник. – 1983. – Т. 120. – № 4. – С. 540–545.
3. Adukov V.M. The uniform convergence of subsequences of the last intermediate row of the Padé table// J. Approx. Theory – 2003. – V. 122. – P. 160–207.
4. Адуков В.М. О существовании сходящихся подпоследовательностей строки таблицы Паде для мероморфной функции// Известия Челябинского научного центра. – 2002. – Вып. 3. – С. 3–7.

Поступила в редакцию 10 июня 2005 г.