УДК 621.031:531.31 + 539.37

СИМВОЛИЧЕСКОЕ «ДЕЛЕНИЕ» ВЕКТОРОВ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

О.С. Садаков

Известно, что тензорное исчисление – это алгебра сложений и умножений. Однако при проведении выкладок и преобразований может оказаться удобной также и приведенная в заголовке условная промежуточная операция. В механике сплошной среды обычны операторы линейных функций – например, вектор-функции векторного аргумента. Такими операторами являются тензор напряжений, тензор дисторсии и другие. Работа с этими тензорами может быть облегчена, если ввести символическую операцию «дробь» (ниже мы будем кавычки опускать). В статье обсуждается это обозначение, впервые принятое в работе [1]. Показаны свойства дроби и дан краткий обзор основных понятий кинематики, использующий эту символическую запись. Мы ограничились случаем однородного напряженно-деформированного состояния и исключили пока наиболее запутанную картину скоростей изменения напряжений и деформаций.

1. Пусть задана функция

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{x} \tag{1}$$

($\boldsymbol{x}$ – множество произвольных векторов, $\boldsymbol{y}$ – результаты их преобразования с помощью оператора $\boldsymbol{A}$ – двухвалентного тензора, точкой обозначается скалярное произведение). Тензор $\boldsymbol{A}$ можно условно обозначать в виде дроби

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{y}/\boldsymbol{x}. \tag{2}$$

Косая черта используется здесь в связи с некоммутативностью дроби: символ аргумента $\boldsymbol{x}$ должен быть ниже и правее. Возможно, оператор $\boldsymbol{B}$ функции $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{B}$ можно было бы обозначить $\boldsymbol{x}\backslash\boldsymbol{y}$, но, чтобы не усложнять, мы используем для $\boldsymbol{B}$ обычный знак транспонирования $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{y}/\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}$.

Удобство предлагаемого обозначения связано с его довольно очевидными и простыми свойствами. Например,

$$\boldsymbol{x}/\boldsymbol{x} = \boldsymbol{I} \tag{3}$$

($\boldsymbol{I}$ – единичный тензор, или тензор тождественного преобразования),

$$(\boldsymbol{z}/\boldsymbol{y})\cdot (\boldsymbol{y}/\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{z}/\boldsymbol{x} \tag{4}$$

(произведение операторов). Отсюда, в частности, следует, что $\boldsymbol{y}/\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}/\boldsymbol{y} = \boldsymbol{I}$, эти тензоры взаимно обратны. Кроме того,

$$(\boldsymbol{z} + \boldsymbol{y})/\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}/\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}/\boldsymbol{x}; \tag{5}$$

скаляры в числителе и в знаменателе сокращаются:

$$6\boldsymbol{y}/(2\boldsymbol{x}) = 3\boldsymbol{y}/\boldsymbol{x}, \tag{6}$$

справедливо и такое выражение ($\boldsymbol{T}$ – некоторый тензор):

$$\boldsymbol{T}\cdot(\boldsymbol{y}/\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{T}\cdot \boldsymbol{y})/\boldsymbol{x}. \tag{7}$$

Легко показать, что если $\boldsymbol{y}/\boldsymbol{x}$ равен $\boldsymbol{z}/\boldsymbol{u}$, то этому тензору можно придать и третий вид:

$$\boldsymbol{y}/\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}/\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})/(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}). \tag{8}$$

Для доказательства обозначим $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{y}/\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}/\boldsymbol{u}$, то есть

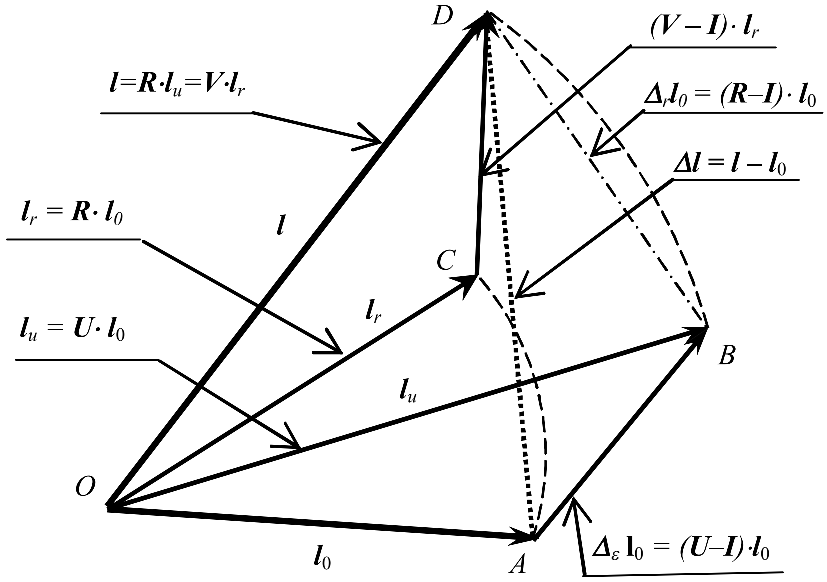
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u}.$$

Сложив эти выражения, получим $\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u})$, или $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})/(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u})$. Напомним, что речь идет не о четырех векторах $\boldsymbol{x}..\boldsymbol{u}$, а о четырех множествах векторов, связанных между собой указанным образом.

2. Для определения тензора $\boldsymbol{y}/\boldsymbol{x}$ достаточно знать судьбу трех аргументов (для определенности принято, что векторное пространство трехмерно; это пригодится ниже):

$$\boldsymbol{y}_\alpha = \boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{x}_\alpha,\quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Не обязательно, но удобно, чтобы векторы $\boldsymbol{x}_\alpha$ были направлены вдоль ортов декартова базиса $\{\boldsymbol{e}_i\}$ ($\boldsymbol{x}_\alpha = x_\alpha\, \boldsymbol{e}_\alpha$, x_α – длины этих векторов). Учитывая, что $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{e}_i$, где $\boldsymbol{A}_i$ – искомые проекции тензора ($\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{e}_i$), получим



Основные тензоры дисторсии

7. В каждодневных прочностных расчетах (сопротивление материалов, теория упругости и даже теория пластичности и ползучести) принято упрощать картину деформирования, гипотетически полагая, что смещения, деформации и повороты волокон бесконечно малы. Это означает, что волокна $\boldsymbol{l}_0$ и $\boldsymbol{l}$ неотличимы, и при анализе деформаций (геометрически линейный подход) опираются на тензор дисторсии $\boldsymbol{D}=\Delta\boldsymbol{l}/\boldsymbol{l}$. Его делят на симметричное и кососимметричное слагаемые

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\theta}, \tag{22}$$

то есть считают, что приращение $\Delta\boldsymbol{l}$ складывается из $\Delta\boldsymbol{l}_\varepsilon$, связанного с деформацией ($\boldsymbol{\varepsilon} = \Delta\boldsymbol{l}_\varepsilon/\boldsymbol{l}_0$), и $\Delta\boldsymbol{l}_\theta$, вызванного жестким поворотом ($\boldsymbol{\theta} = \Delta\boldsymbol{l}_\theta/\boldsymbol{l}_0$). Задачу оценки прочности научились решать, не привлекая к рассмотрению поворотов, и в расчетах фигурируют только деформации $\Delta\boldsymbol{l}_\varepsilon/\boldsymbol{l}_0$.

8. Полезно иметь в виду, что любой кососимметричный тензор можно представить в виде произведения

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{Э}\cdot\boldsymbol{\omega}, \tag{23}$$

где $\boldsymbol{Э}$ – тензор Леви-Чивитта, $\boldsymbol{\omega}$ – сопутствующий тензору $\boldsymbol{K}$ вектор (его можно определить, векторно сворачивая тензор $\boldsymbol{K}$).

В частности, кососимметричный тензор $\boldsymbol{\theta}$, которым определяют жесткий поворот в геометрически линейной постановке задачи, представляет результат скалярного умножения тензора $\boldsymbol{Э}$ на вектор, который называют вектором поворота. Естественно, лишь *бесконечно малый* поворот можно отображать вектором; тогда вектор результата двух поворотов представляет сумму векторов этих поворотов.

Нетрудно оценить ошибку от использования в линейном варианте (22) кососимметричного тензора $\Delta\boldsymbol{l}/\boldsymbol{l}_0$ вместо ортогонального (18) $\boldsymbol{l}/\boldsymbol{l}_0$. Из последнего следует вычесть единичный тензор, и ошибка определится *симметричным* слагаемым в $\boldsymbol{R}-\boldsymbol{I}$, равным $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{nn})(1-\cos\varphi)$. Она наиболее заметна на волокнах, ортогональных $\boldsymbol{n}$, и для последних характеризуется числом $(1-\cos\varphi)/\sin\varphi$, равным (при малых φ) $\varphi/2$. Таким образом, с ошибкой менее 1% мы можем пользоваться геометрически линейным вариантом до углов 2 %, то есть 1,15°.

Литература

1. Скаляр и тензор логарифмической деформации/ О.С. Буслаева, О.С. Садаков, А.А. Шапиро // Научно-технические ведомости СПбГТУ. – Санкт-Петербург. – 2003. – 3 (33). – С.125–129.

2. Belytschko T., Liu W.K., Moran B. Finite Elements for Nonlinear Continua and Structures. McCormick School of Engineering and Applied Science Northwestern University Evanston, IL 60208 copyright 1996. Published by Wiley.

Поступила в редакцию 6 февраля 2005 г.