УДК 519.6:621.317

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЙ

Е.В. Харитонова

В работе рассматривается модель измерений, построенная на базе анализа обратной многоточечной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, приводящая к исследованию интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Регуляризации процедуры получения решения осуществляется методом невязки.

Одной из проблем теории и практики динамических измерений является проблема оперативного оценивания детектируемого сигнала в условиях, когда входной сигнал трудно поддается прямому измерению, а выходной содержит значительную часть динамической погрешности (например, при измерении импульсных или других, быстро меняющихся во времени, сигналов).

Существует несколько различных подходов к решению этой задачи, Среди них анализ амплитудно-фазовых характеристик системы, методы коррекции, методы модельного контроля и др.

В настоящей работе рассматривается модель измерений, построенная на базе анализа обратной многоточечной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, приводящая к исследованию интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Для регуляризации процедуры получения решения используется классический метод А.Н. Тихонова.

Существенное упрощение собственно процедуры регуляризации решения и оценивания параметра регуляризации достигается за счет использования конечно-элементных конечномерных аппроксимаций.

1. Введение

Задачи, возникающие в теории динамических измерений, могут быть условно разделены на две группы – задачи восстановления сигнала и задачи анализа динамической погрешности. Первая из упомянутых задач – определение входного сигнала, искаженного средствами измерений, – в общей постановке, представляет собой обратную задачу теории измерений, которая может быть сформулирована как задача решения операторного уравнения

$$A \cdot u(t) = x(t)$$

относительно функции $u(t)$ при неточно заданных операторе A и правой части $x(t)$. Известно (например [2],[3]), что в таких задачах обратный оператор A^{-1} как правило неограничен, что приводит к неустойчивости численных процедур решения указанного уравнения.

В подавляющем большинстве случаев метод невязки [2] Тихонова А.Н. (или метод регуляризации, например, метод квазирешений [3] Иванова В.К. и т.п.) дает возможность получения приближенного регуляризованного решения указанной задачи с одновременной оценкой точности получаемого решения.

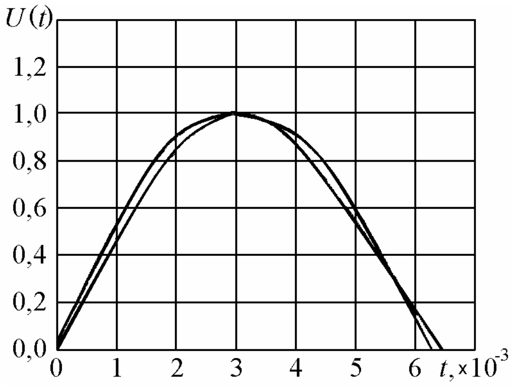
В важном для приложений случае, когда функции $u(t)$ и $x(t)$ связаны дифференциальным соотношением $L[x(t)] = u(t)$, $L[.]$ – дифференциальный оператор, приведенное выше операторное уравнение представляет собой интегральное уравнение первого рода (Вольтерра или Фредгольма – в зависимости от постановки задачи), методы решения которого хорошо изучены в теории (например [2, 4, 9] и цитированная там литература).

Тем не менее, численная реализация того или иного метода регуляризации по-прежнему является довольно тонкой задачей, и эффективность применяемых алгоритмов напрямую связана с избранным способом дискретизации задачи. Априори, дискретизация задачи может быть осуществлена в следующих направлениях:

- дискретизация интегрального уравнения с последующей регуляризацией полученной системы алгебраических уравнений;
- построение минимизирующего функционала с последующей его дискретизацией проекционными методами (например, методом Ритца);

6. Результаты счета

Предлагаемый алгоритм решения задачи восстановления сигнала был опробован на модельном [8] примере датчика второго порядка, описываемого уравнением: $\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0 x(t) = u(t)$, где $a_0 = 10\ 000$, $a_1 = 100$.



Постоянная времени датчика принималась равной $T = 0,01$, коэффициент демпфирования $\xi = 0,5$. При моделировании на вход датчика подавался импульсный сигнал в виде полуволны синусоиды $u(t) = \sin 500t$. На выходе датчика дополнительно присутствовало приведенное гармоническое одночастотное шумовое воздействие $v(t) = 0,05 \sin 5000t$.

На рисунке приведены результаты восстановления функции $u(t)$ $(n = 100)$.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ-УРАЛ 04-01-96073.

Литература

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986.
3. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Линейные некорректные задачи и их приложения. – М.: Наука. 1978.
4. Гончарский А.В., Черепащук А.М., Ягола А.Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики. – М.: Наука. 1978.
5. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. – М.: Наука. 1986.
6. Деклу Ж. Метод конечных элементов. – М.: Мир, 1976.
7. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975.
8. Грановский В.А. Динамические измерения. – Л.: Энергоатомиздат, 1984.
9. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. – Киев: Наукова думка, 1978.

Поступила в редакцию 13 декабря 2004 г.