УДК 517.957:539.374

О НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

В.Л. Дильман

В работе при некоторых допущениях получены приближенные математические модели напряженного состояния поперечной пластически деформируемой мягкой прослойки цилиндрического образца, в форме краевых задач для систем уравнений гиперболического типа, в том числе с постоянными на характеристиках римановыми инвариантами, что позволяет перенести метод характеристик на некоторые случаи осесимметричной деформации неоднородных сред.

1. Введение. Задачи, приводящие к осесимметричному напряженно-деформированному состоянию (НДС), возникают при экспериментальном исследовании свойств материалов (растяжение и сжатие стержневых цилиндрических образцов, деформирование под действием осевой силы и внутреннего давления трубчатых образцов), при изучении НДС поперечных прослоек (мягких и твердых) в таких образцах и при исследовании шейки. Известные точные решения [1, 2] относятся к гипотетическим состояниям и практически бесполезны в реально возникающих задачах. Попытки получения приближенных решений [3–5] основаны на использовании упрощающих условий и допущений (нередко противоречащих друг другу [5]) инженерного характера и не содержат анализа допускаемых ошибок. Существенной трудностью исследования осесимметричного НДС является негиперболичность соответствующей системы уравнений [1]. Однако и в ряде частных случаев, когда система уравнений гиперболична, инварианты Римана не постоянны на характеристиках, а их дифференциалы вдоль последних зависят от искомых функций, что не позволяет получить метод характеристик, аналогичный методу решения плоских задач теории пластичности [6]. Один из путей преодоления указанной трудности – замена системы уравнений НДС пластической среды на приближенную на основе некоторых физических гипотез, соответствующих изучаемой ситуации, и математического анализа априорных свойств решений.

В работе рассматривается НДС мягкой поперечной прослойки в сплошном цилиндрическом образце под осевой нагрузкой. Цель работы – получение и исследование упрощенных систем уравнений пластического равновесия материала прослойки и материала твердой части образца вблизи прослойки. На основе этого исследования можно судить о развитии напряженного состояния в прослойке и прилежащих к ней участках с ростом нагрузки вплоть до потери несущей способности образца.

В работе под прослойкой понимается участок цилиндрического образца, расположенный между двумя ортогональными оси образца плоскостями. Предполагается, что материал прослойки (П) и основной металл (ОМ) образца идеально упругопластичный с идентичными упругими свойствами, но разными пределами текучести: $k^{п}$ и $k^{ом}$ соответственно, $k^{п} < k^{ом}$, причем выполняются обычные в таких случаях допущения [6]. $K = k^{п} / k^{ом}$, коэффициент механической неоднородности, полагается ненамного большим единицы ($K = 1{,}05...1{,}50$). Такой диапазон значений K наиболее характерен для сварных соединений. В качестве уравнения пластичности принято условие Мизеса. Полученные результаты переносятся на упрочняемые материалы (с изотропным упрочнением) заменой в условии полной пластичности пределов текучести на пластические постоянные, характеризующие моменты потери пластической устойчивости металлом слоя и основным металлом [7].

2. Гипотеза плоских сечений. НДС пластической среды, как известно [1; 6], при осесимметричной деформации определяется в предположениях теории течения системой уравнений

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0\,; \tag{1}$$

или, при малых $K-1$, $\alpha^* \approx 1{,}22(K-1)$. При часто встречающихся в сварных соединениях значениях механической неоднородности $K \le 1{,}2$ ошибка в последней формуле не более 2 %. Знание α^* позволяет [11] однозначно определить τ_{rz} в форме (16) решением системы уравнений (9)–(11) (в [11] соответствующая методика применялась в случае кольцевой прослойки в составе трубчатого образца).

Литература

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. – М.: Гостехиздат. – 1956. – 407 с.
2. Аннин Б.А., Бытев В.О., Сенашов С.И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. – Новосибирск: Наука. – 1985. – 140 с.
3. Бриджмен П. Исследование больших пластических деформаций и разрыва. – М.: Иностранная литература. – 1955. – 444 с.
4. Давиденков Н.Н., Спиридонова Н.И. Анализ напряженного состояния в шейке растянутого образца// Заводская лаборатория. – 1945. – № 6. – С. 583–593.
5. Бакши О.А., Качанов Л.М. О напряженном состоянии пластичной прослойки при осесимметрической деформации// Изв. АН СССР. Механика. – 1965. – № 2. – С. 134–137.
6. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. – М.: Наука. – 1966. – 231 с.
7. Дильман В.Л. Потеря пластической устойчивости тонкостенной цилиндрической оболочки в предположениях теории течения// Обозрение прикл. и промышл. математики. –2001. – Т. 8. – Вып. 1. – С. 158–159.
8. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М.: Наука. – 1978. – 688 с.
9. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука. – 1973. – 228 с.
10. Дильман В.Л., Остсемин А.А. Анализ методом линий скольжения вязкой прочности сварного соединения с подрезом прямошовных труб большого диаметра// Пробл. прочности. – 2004. – № 3. – С. 72–82.
11. Дильман В.Л., Остсемин А.А. О напряженно-деформированном состоянии пластического кольца при растяжении// Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2002. – № 2. – С. 109–120.

Поступила в редакцию 1 декабря 2004 г.