

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ И ПРИСПОСОБЛЯЕМОСТИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

О.Ф. Чернявский

Задачи определения условий предельного равновесия и прогрессирующего формоизменения сформулированы в терминах метода конечных элементов для полей скоростей перемещений, непрерывных внутри каждого элемента и разрывных на границах элементов. На основе соответствующих кинематических теорем получены системы линейных ограничений и формы минимизируемых функционалов при условиях текучести Мизеса и Треска–Сен-Венана.

Предложенные решения позволяют избежать систематических ошибок, возникающих при анализе предельных состояний на основе расчетов кинетики деформирования при последовательно возрастающей нагрузке, и сократить объем вычислений.

Метод конечных элементов стал в настоящее время основным при расчетах кинетики неупругого деформирования. Он позволяет определить напряжения, деформации и перемещения при заданных внешних воздействиях (механических, тепловых и др.). В задачах расчета предельных состояний, то есть прямого определения нагрузок, соответствующих заданным кинематическим признакам процесса деформирования, метод конечных элементов развит пока недостаточно и не находит широкого практического применения.

Теоретически возможно определение предельной нагрузки путем последовательных расчетов кинетики деформирования с помощью МКЭ при возрастающих заданных воздействиях. Практически реализовать эту идею трудно, поскольку поля скоростей перемещений в предельных состояниях, как правило, оказываются разрывными и обычные процедуры численного интегрирования в МКЭ могут давать при этом значительные погрешности, которые не обнаруживаются без специального анализа. В связи с этим развитие метода конечных элементов в задачах предельного анализа представляется необходимым. МКЭ в задачах предельного равновесия и приспособляемости может базироваться на статической или кинематической теоремах [1, 2], соответствующих методам сил и перемещений при расчетах кинетики деформирования. В трехмерных задачах эти подходы, по-видимому, практически равноценны. При расчетах пластин и оболочек кинематический метод позволяет непосредственно ввести гипотезы Коши или Кирхгофа–Лява и не требует построения поверхности текучести в пространстве обобщенных переменных.

В соответствии с кинематической теоремой теории предельного равновесия [1] предельной является минимальная из всех нагрузок, при которых

$$\int X_i \dot{u}_i dV + \int_{S_p} p_i \dot{u}_i dS \geq \int \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV + \sum_{\mu} \int_{S_{\mu}} \sigma_{ij} n_j \Delta \dot{u}_i dS. \quad (1)$$

Здесь X_i , p_i – массовые и поверхностные нагрузки; \dot{u}_i , $\dot{\epsilon}_{ij}$ – скорости остаточных перемещений и пластических деформаций; $i, j = 1, 2, 3$; S_{μ} – поверхность разрыва скоростей перемещений на величину $\Delta \dot{u}_i$, n_j – единичный вектор нормали к этой поверхности; V – объем тела; σ_{ij} – напряжения на поверхности текучести.

Скорости остаточных перемещений и пластических деформаций в (1) связаны условием совместности, имеющим при малых перемещениях вид

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \quad (2)$$

при соответствующих граничных условиях.

Скорости пластических деформаций связаны с напряжениями на поверхности текучести σ_{ij} ассоциированным законом течения:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \lambda_{\alpha} \geq 0, \quad (3)$$

где $f_{\alpha}(\sigma_{ij}) = 0$ – поверхность текучести.

Соотношения (1)–(3) определяют величины скоростей деформаций и перемещений с точностью до общего множителя. При использовании любого численного метода решения, в том числе МКЭ, этот множитель необходимо задавать. С этой целью можно, например, задать скорость пе-

ремещения u_i одной из точек конструкции. Расчет предельной нагрузки в этом случае будет корректным, только если в действительном механизме разрушения скорость перемещения этой точки является ненулевой и направлена так же, как заданная. В противном случае будет получена верхняя оценка предельной нагрузки, не совпадающая с точным решением. Другой, менее удобный в счете, но более универсальный вариант задания общего множителя основан на задании заведомо ненулевой и положительной работы нагрузок [3]. Если, например, поверхностные нагрузки p_i в предельном состоянии связаны с заданными эксплуатационными нагрузками \bar{p}_i соотношением $p_i = n_p \bar{p}_i$, то можно принять, что

$$\int_{S_p} p_i \dot{u}_i dS = n_p \int_{S_p} \bar{p}_i \dot{u}_i dS = n_p, \text{ то есть } \int_{S_p} \bar{p}_i \dot{u}_i dS = 1. \quad (4)$$

Минимизация параметра нагрузки при ограничениях (1)–(3) является в общем случае задачей математической теории оптимальных процессов [4]; ее решение требует возможности разрывов поля скоростей перемещений при непрерывных и дифференцируемых скоростях в остальной части тела. Метод конечных элементов предъявляет менее жесткие требования. Можно ограничиться, как это было сделано впервые в работе [3], чисто разрывным решением, считая, что пластические деформации сосредоточены по границам абсолютно жестких элементов. Можно искать решение в классе непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций \dot{u}_i , заменяя разрывы скоростей зонами быстрого, но непрерывного изменения. Оба эти подхода ведут к получению верхней оценки предельной нагрузки, теоретически сходящейся к точному решению только при бесконечном уменьшении размеров элементов и абсолютной точности вычислений. Очевидно, что оптимальным является сочетание непрерывных решений в пределах каждого элемента и разрывных на границах.

Соотношение (1) для плоского напряженного состояния ($\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$) с учетом дополнительного условия типа (4) в частном случае, когда поверхности разрывов скоростей перемещений $S_{\mu x}$ и $S_{\mu y}$ параллельны осям x и y (учет произвольной ориентации этих поверхностей в соответствии с (1) не вызывает принципиальных трудностей) принимает вид

$$n_p = \int_V (\sigma_x \dot{\epsilon}_x + \sigma_y \dot{\epsilon}_y + \tau_{xy} \dot{\gamma}_{xy}) dV + \sum_{\mu} \int_{S_{\mu}} (\sigma_x \Delta \dot{u}_x + \sigma_y \Delta \dot{u}_y + \tau_{xy} \Delta \dot{u}_{xy}) dS. \quad (5)$$

Примем условие текучести Мизеса–Хубера–Генки

$$f(\sigma_{ij}) = \sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 - \sigma_S^2 = 0. \quad (6)$$

В соответствии с ассоциированным законом течения (3)

$$\dot{\epsilon}_x = \lambda(2\sigma_x - \sigma_y); \dot{\epsilon}_y = \lambda(2\sigma_y - \sigma_x); \dot{\gamma}_{xy} = 6\lambda\tau_{xy}; \lambda \geq 0. \quad (7)$$

Соотношение (5) с учетом уравнений (6) и (7) можно тогда представить в виде

$$n_p = \int_V \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_S \sqrt{\dot{\epsilon}_x^2 + \dot{\epsilon}_x \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_y^2 + \frac{1}{4} \dot{\gamma}_{xy}^2} dV + \quad (8)$$

$$+ \sum_{\mu} \int_{S_{\mu x}} \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_S \sqrt{(\Delta \dot{u}_x)^2 + \frac{1}{4} (\Delta \dot{u}_{xy})^2} dS + \sum_{\mu} \int_{S_{\mu y}} \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_S \sqrt{(\Delta \dot{u}_y)^2 + \frac{1}{4} (\Delta \dot{u}_{yx})^2} dS,$$

$$\text{где } \sqrt{\dot{\epsilon}_x^2 + \dot{\epsilon}_x \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_y^2 + \frac{1}{4} \dot{\gamma}_{xy}^2} \geq 0, \sqrt{(\Delta \dot{u}_x)^2 + \frac{1}{4} (\Delta \dot{u}_{xy})^2} \geq 0, \sqrt{(\Delta \dot{u}_y)^2 + \frac{1}{4} (\Delta \dot{u}_{yx})^2} \geq 0. \quad (9)$$

В соответствии с гипотезой Кирхгофа–Лява для пластин и оболочек

$$\dot{\epsilon}_x = \dot{\epsilon}_x + z\dot{\kappa}_x; \dot{\epsilon}_y = \dot{\epsilon}_y + z\dot{\kappa}_y; \dot{\gamma}_{xy} = \dot{\epsilon}_{xy} + z\dot{\kappa}_{xy}. \quad (10)$$

Скорости перемещений в уравнении (4) связаны со скоростями деформаций условиями совместности и соответствующими им граничными условиями закрепления тела. Например, при изгибе пластины

$$\dot{\epsilon}_x = \dot{\epsilon}_y = \dot{\epsilon}_{xy} \equiv 0; \dot{\kappa}_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \dot{\kappa}_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \dot{\kappa}_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (11)$$

где $w(x, y)$ – скорости прогибов.

Для пластин произвольного очертания, нагруженных нормальным к поверхности давлением $\bar{p}(x, y)$, при отсутствии сдвиговых разрывов и постоянном по толщине пределе текучести σ_S минимизируемый функционал (8) принимает вид

$$n_p = \int_S \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_S h^2 \sqrt{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2} \right] dS +$$

$$+ \sum_{\mu} \int_{l_{\mu x}} \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_S h^2 \left| \Delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right| dl + \sum_{\mu} \int_{l_{\mu y}} \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_S h^2 \left| \Delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right| dl. \quad (12)$$

Здесь S – срединная поверхность пластины; l_{μ} – длина линии разрыва скоростей углов поворота.

Переход к конечноэлементной модели выполняется аналогично задачам упругости и расчетам кинетики неупругого деформирования: выбирается сетка конечных элементов и для каждого элемента скорости перемещений представляются в виде

$$w = \sum_i C_i w_i(x, y), \quad i = 1, \dots, N, \quad (13)$$

где $w_i(x, y)$ – базисные функции, C_i – неизвестные постоянные. Примем, что разрывы скоростей перемещений и (или) их производных могут иметь место только на границах элементов.

В качестве примера запишем вид функционала (12) для конечноэлементной модели:

$$n_p = \int_S \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_S h^2 \left[\sum_i \sum_j C_j C_i \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} \right) + \sum_i \sum_j C_j C_i \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_i \sum_j C_j C_i \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{4} \sum_i \sum_j C_j C_i \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial y} \right) \right]^{0,5} dS +$$

$$+ \sum_k \int_{l_{kx}} \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_S h^2 \left| \sum_i C_{ik} \frac{\partial w_{ik}}{\partial x} - \sum_i C_{ik-1} \frac{\partial w_{ik-1}}{\partial x} \right| dl + \sum_k \int_{l_{ky}} \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_S h^2 \left| \sum_i C_{ik} \frac{\partial w_{ik}}{\partial y} - \sum_i C_{ik-1} \frac{\partial w_{ik-1}}{\partial y} \right| dl. \quad (14)$$

Здесь k – номер элемента.

В отличие от расчетов упругих тел и кинетики неупругого деформирования при нагрузках, меньших предельной, при минимизации функционала (8) в конечноэлементной модели отсутствуют требования непрерывности перемещений и их производных по границам элементов. Система ограничений задачи включает лишь условия типа (4), (9) и условия закрепления конструкции, записанные с учетом уравнения (13).

С целью уменьшения количества переменных, по которым ведется минимизация функционала, можно «запретить» разрывы тех или иных перемещений (сдвиговых, или нормальных к поверхности разрыва, или углов поворота нормалей и т.д.), как это было сделано, например, при записи функционала (12). Последствия такого шага очевидны: в результате будет получена верхняя оценка предельной нагрузки, не совпадающая с точным решением, если «запрещенные» разрывы реализуются в действительном механизме разрушения. Отличие верхней оценки от точного решения будет зависеть от двух факторов: размеров конечных элементов (с уменьшением размера уменьшается погрешность схематизации разрыва зоной быстрого, но непрерывного изменения) и точности численного интегрирования, уменьшающейся по мере приближения к разрывному решению.

Приспособляемость конструкций лимитируется предельными состояниями двух принципиально различных типов: знакопеременным неупругим деформированием и прогрессирующим с числом циклов формоизменением, то есть накоплением остаточных перемещений (частным случаем последнего является состояние предельного равновесия). Знакопеременное деформирование в предельном цикле является локальным процессом [2]. Определение условий его возникновения в опасной точке не требует решения вариационной задачи и выполняется с помощью достаточно простого критерия [2].

Прогрессирующее формоизменение реализуется, если в соответствии с преобразованной теоремой Койтера, обобщенной на случай произвольных внешних воздействий [2],

$$\int_{S_p} X_i^{\circ} \Delta u_i dV + \int_{S_p} p_i^{\circ} \Delta u_i dS \geq \int_0^T d\tau \int (\sigma_y - \sigma_y^{(e)}) \dot{\epsilon}_y dV + \sum_{\mu} \int_0^T d\tau \int_{S_{\mu}} (\sigma_y - \sigma_y^{(e)}) n_j \Delta \dot{u}_j dS. \quad (15)$$

Здесь X_i° , p_i° – не зависящие от времени составляющие массовых и поверхностных нагрузок; $\sigma_y^{(e)}$ – напряжения от переменных составляющих внешних воздействий, вычисленные в предположении

идеальной упругости материала; τ – текущее время цикла ($0 \leq \tau \leq T$); Δu_i – разрывы скоростей перемещений за цикл; Δu_i – приращения остаточных перемещений за цикл, связанные с приращениями неупругих деформаций $\Delta \varepsilon_{ij}$ условиями совместности

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i}), \Delta \varepsilon_{ij} = \int_0^T \dot{\varepsilon}_{ij} d\tau, \Delta u_i = \int_0^T \dot{u}_i d\tau \quad (16)$$

и соответствующими граничными условиями. Скорости неупругих деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ связаны с напряжениями на поверхности текучести σ_{ij} ассоциированным законом течения (3).

Учитывая, что скорости неупругих деформаций в предельном цикле отличны от нуля лишь в отдельные моменты времени, ограничимся рассмотрением конечного числа дискретных моментов времени цикла τ_β ($\beta = 1, \dots, n$). Число n рассматриваемых моментов времени должно соответствовать реальному числу моментов, в которые $\dot{\varepsilon}_{ij} \neq 0$. Оно равно двум при однопараметрических переменных воздействиях и постоянных свойствах материала. С ростом «неупорядоченности» процесса n возрастает и теоретически может стать любым, но практически точное решение не требует рассмотрения большого числа моментов времени. Условие (15) можно теперь записать в виде

$$\int X_i^o \Delta u_i dV + \int_{S_p} p_i^o \Delta u_i dS \geq \min_{\beta} \left[\sum_{\beta} \int (\sigma_{ij\beta} - \sigma_{ij\beta}^{(e)}) \Delta \varepsilon_{ij\beta} dV + \sum_{\beta} \sum_{\mu} \sum_{S_{\mu}} \int (\sigma_{ij\beta} - \sigma_{ij\beta}^{(e)}) n_j \Delta u'_{i\beta} dS \right], \quad (17)$$

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \sum_{\beta} \Delta \varepsilon_{ij\beta}, \Delta u'_i = \sum_{\beta} \Delta u'_{i\beta} \quad (18)$$

($\Delta u'_i$ – приращение разрыва перемещений за цикл).

В каждый момент времени $f(\sigma_{ij\beta}) = 0$, при этом в общем случае (при наличии, например, температурной зависимости свойств материала и ползучести) каждому моменту времени соответствует свое значение предела текучести σ_s идеализированной диаграммы деформирования. Приращения деформаций $\Delta \varepsilon_{ij\beta}$ связаны с напряжениями $\sigma_{ij\beta}$ ассоциированным законом, поскольку в предельном цикле скорости деформаций отличны от нуля лишь в течение сколь угодно малых интервалов времени.

Для плоского напряженного состояния ($\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0$) неравенство (17) можно записать в виде

$$\int X_i^o \Delta u_i dV + \int_{S_p} p_i^o \Delta u_i dS \geq \min_{\beta} \left\{ \sum_{\beta} \int [(\sigma_{x\beta} - \sigma_{x\beta}^{(e)}) \Delta \varepsilon_{x\beta} + (\sigma_{y\beta} - \sigma_{y\beta}^{(e)}) \Delta \varepsilon_{y\beta} + \right. \\ \left. + (\tau_{xy\beta} - \tau_{xy\beta}^{(e)}) \Delta \gamma_{xy\beta} \right] dV + \sum_{\beta} \sum_{\mu} \sum_{S_{\mu}} \int [(\sigma_{x\beta} - \sigma_{x\beta}^{(e)}) \Delta u'_{x\beta} + (\sigma_{y\beta} - \sigma_{y\beta}^{(e)}) \Delta u'_{y\beta} + \\ \left. + (\tau_{xy\beta} - \tau_{xy\beta}^{(e)}) \Delta u'_{xy\beta} + (\tau_{xy\beta} - \tau_{xy\beta}^{(e)}) \Delta u'_{yx\beta} \right] dS \left. \right\}. \quad (19)$$

Для сокращения записи в условии (19) принято, что поверхности разрывов параллельны осям x и y ; произвольная ориентация учитывается в соответствии с уравнением (1).

При условии текучести Мизеса с учетом ассоциированного закона течения правая часть этого неравенства принимает вид

$$\min_{\beta} \left\{ \sum_{\beta} \int \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{S\beta} \sqrt{\Delta \varepsilon_{x\beta}^2 + \Delta \varepsilon_{x\beta} \Delta \varepsilon_{y\beta} + \Delta \varepsilon_{y\beta}^2 + \frac{1}{4} \gamma_{xy\beta}^2} - \sigma_{x\beta}^{(e)} \Delta \varepsilon_{x\beta} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sigma_{y\beta}^{(e)} \Delta \varepsilon_{y\beta} - \tau_{xy\beta}^{(e)} \Delta \gamma_{xy\beta} \right] dV + \sum_{\beta} \sum_{\mu} \sum_{S_{\mu}} \int \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\sigma_{S\beta} \left(\sqrt{(\Delta u'_{x\beta})^2 + \frac{1}{4} (\Delta u'_{xy\beta})^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{(\Delta u'_{y\beta})^2 + \frac{1}{4} (\Delta u'_{yx\beta})^2} \right) - \sigma_{x\beta}^{(e)} \Delta u'_{x\beta} - \sigma_{y\beta}^{(e)} \Delta u'_{y\beta} - \tau_{xy\beta}^{(e)} (\Delta u'_{xy\beta} + \Delta u'_{yx\beta}) \right] dS \left. \right\}. \quad (20)$$

Здесь корни из соответствующих сумм неотрицательны согласно ассоциированному закону течения ($\lambda \geq 0$).

Соответственно при условии текучести Треска–Сен-Венана применительно к осесимметричным пластинам и оболочкам ($\tau_{xy} = 0$)

$$\min_{\beta} \left\{ \sum_{\beta} \int \left[0,5\sigma_S \left(|\Delta\varepsilon_{x\beta}| + |\Delta\varepsilon_{y\beta}| + |\Delta\varepsilon_{x\beta} + \Delta\varepsilon_{y\beta}| \right) - \sigma_{x\beta}^{(e)} \Delta\varepsilon_{x\beta} - \sigma_{y\beta}^{(e)} \Delta\varepsilon_{y\beta} \right] dV + \sum_{\beta} \sum_{\mu} \left[\sigma_{S\beta} \left(|\Delta u_{x\beta}| + |\Delta u_{y\beta}| \right) - \sigma_{x\beta}^{(e)} \Delta u_{x\beta} - \sigma_{y\beta}^{(e)} \Delta u_{y\beta} \right] dS \right\}. \quad (21)$$

Переход к конечноэлементной модели выполняется теперь так же, как в задачах предельного равновесия:

- Приращение перемещения одной точки или множитель при коэффициенте запаса в выражении для работы внешних сил типа (4) приравнивается к единице;
- приращения перемещений в пределах каждого конечного элемента задаются с помощью базисных функций и неизвестных постоянных в виде (13);
- приращения деформаций в пределах каждого элемента выражаются через коэффициенты при базисных функциях с помощью условий совместности (16), включающих для пластин и оболочек гипотезы Коши или Кирхгофа–Лева в явном виде;
- коэффициент запаса по прогрессирующему формоизменению соответствует минимальному значению функционала (20) или (21).

Таким образом, система ограничений вариационной задачи включает:

- уравнение, конкретизирующее численные значения приращений перемещений (определяемые теоремой Койтера лишь с точностью до множителя);
- кинематические граничные условия задачи (условия закрепления конструкции);
- условия неотрицательности подинтегральных выражений в минимизируемом функционале в каждый момент времени.

При условии Треска–Сен-Венана они обеспечиваются автоматически; при условии Мизеса сводятся к неотрицательности корней в функционале (20).

Система ограничений не содержит – в отличие от упругих и неупругих расчетов при заданной нагрузке – требований непрерывности перемещений и их производных на границах элементов. Такие требования могут быть искусственно включены в систему ограничений с целью уменьшения количества переменных в минимизируемом функционале, но это ведет к получению верхней оценки предельной нагрузки, не совпадающей с точным решением, если исключенные возможные разрывы реализуются в действительном механизме разрушения.

Литература

1. Койтер В.Т. Общие теоремы теории упруго-пластических сред. – М.: ИЛ, 1961. – 79 с.
2. Гохфельд Д.А., Чернявский О.Ф. Несущая способность конструкций при повторных нагрузениях. – М.: Машиностроение, 1979. – 263 с.
3. Ржаницын А.Р. Расчет оболочек методом предельного равновесия при помощи линейного программирования// Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. – М.: Наука, 1966. – С. 656–665.
4. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Физматгиз, 1961. – 301 с.
5. Чернявский А.О. Практическое применение метода конечных элементов в задачах расчета на прочность. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2001. – 89 с.

Поступила в редакцию 17 апреля 2003 г.