

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ В КРУТИЛЬНО-КОЛЕБАТЕЛЬНОМ ВИСКОЗИМЕТРЕ

И.В. Елюхина

Исследуется линейная устойчивость осесимметричного течения ньютоновской жидкости в вискозиметре Швидковского Е.Г., совершающем колебания в регулярном режиме.

Вискозиметрические данные, получаемые разными авторами при использовании крутильно-колебательного метода Швидковского Е.Г. [1], являются достаточно противоречивыми [2]. Причиной их внутренней несогласованности в методическом плане могут служить принятые в традиционной вискозиметрической методике положения: *регулярность режима* крутильных колебаний, условие *отсутствия турбулентности*, *ньютоновский реологический тип* среды и др., которые носят только оценочный характер и не адекватны в некоторых ситуациях.

Ранее были изучены возможности наблюдения слабоупругих свойств жидких сред (см., например, [3]) и исследован переходный режим крутильных колебаний, когда начальное распределение скоростей оказывает влияние на движение среды [4]. В настоящей работе обсуждается проблема устойчивости течения в крутильно-колебательном вискозиметре, которая представляет интерес также с позиций формирования вторичных вихревых структур и анализа влияния де- и стабилизирующих факторов.

Рассмотрим осесимметричное движение несжимаемой ньютоновской среды в цилиндре радиусом R , совершающем крутильные колебания малой амплитуды в регулярном режиме с периодом τ . В цилиндрической системе координат φ, r, z состояние среды описывается составляющими скорости U_φ, U_r, U_z и давлением P .

Линеаризованная система уравнений Навье – Стокса и неразрывности после введения возмущенного распределения скоростей U_φ, U_r, U_z в виде суммы основного течения V_φ^0 и накладываемых на него бесконечно малых нестационарных возмущений V_φ, V_r, V_z , учета уравнений невозмущенного движения [1] и пренебрежения малыми второго порядка записывается как:

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} = 2 \frac{V_\varphi^0 V_\varphi}{r} - \frac{V_\varphi^0}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + \nu \left[\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} = - \frac{V_\varphi^0}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} + \nu \left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \varphi^2} \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial t} = - \frac{V_\varphi^0}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} - V_r \left[\frac{\partial V_\varphi^0}{\partial r} + \frac{V_\varphi^0}{r} \right] + \nu \left[\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \right] - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \varphi}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial r V_r}{\partial r} + \frac{\partial r V_z}{\partial z} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = 0. \quad (4)$$

Слагаемые в (1)–(3), связанные с профилем скорости основного течения V_φ^0 , усредним по первой четверти периода:

$$v_\varphi(r) = \frac{4}{\tau} \int_0^{\tau/4} V_\varphi^0(r, t) dt, \quad (5)$$

где $V_\varphi^0(r, t)$ определено в приближении длинного цилиндра [1]:

$$V_\varphi^0(r, t) = \exp(-kt) [iq \alpha_0 R J_1(\beta r / R) / J_1(\beta)], \quad (6)$$

где $\beta = R\sqrt{k/\nu}$, $k = iq$, $q = 2\pi/\tau$ – циклическая частота колебаний, $i = \sqrt{-1}$, ν – вязкость, t – время, ρ – плотность, α_0 – начальное угловое смещение, J_1 – функция Бесселя первого рода первого порядка.

Безразмерные переменные введем с помощью соотношений

$$T = qt, \quad \xi = r/d, \quad \eta = z/d, \quad d = \sqrt{\nu/q}, \quad \xi_0 = R/d, \\ \overline{u_{\varphi,r,z}} = \frac{V_{\varphi,r,z}}{u_0}, \quad \overline{P} = \frac{P}{\rho u_0^2}, \quad s = \frac{k}{q}, \quad \text{Re} = \frac{u_0 d}{\nu}, \quad u_0 = \alpha_0 \xi_0 dq, \quad (7)$$

где Re – число Рейнольдса, определенное по толщине пограничного слоя d , u_0 – начальная амплитуда линейной скорости частиц жидкости у поверхности цилиндра.

Решения для возмущений будем разыскивать в виде гармонического колебания

$$\{\overline{u_r}, \overline{u_z}, \overline{u_\varphi}, \overline{P}\} = \text{Real} \left\{ \{\overline{u_1}(\xi), \overline{u_2}(\xi), \overline{u_3}(\xi), -i\overline{W}(\xi)\} / (\alpha \text{Re}) \right\} \exp[i\alpha(\eta - CT) + im\varphi], \quad (8)$$

где $\overline{u_1}(\xi), \overline{u_2}(\xi), \overline{u_3}(\xi), \overline{W}(\xi)$ – комплекснозначные амплитуды, $\alpha \notin (0, \infty)$, $m = 0, 1, 2, \dots$ – осевое и азимутальное волновые числа соответственно, $C = X + iY$ – комплексная фазовая скорость волны, X – действительная фазовая скорость, $Y < 0$ ($Y > 0$) – декремент затухания (инкремент нарастания) возмущения.

Понижая порядок системы (1)–(4) до шести путем подстановки уравнения неразрывности (4) в первое уравнение Навье – Стокса (1) и учитывая (7), (8), получим следующие уравнения для амплитуд:

$$\overline{u_1}(-i\alpha C + \alpha^2 + \frac{\nu\varphi}{\xi} \text{Re} im + \frac{m^2}{\xi^2}) = 2\frac{\nu\varphi}{\xi} \text{Re} \overline{u_3} + \frac{i}{\alpha} \overline{W}' - i\alpha \overline{u_2}' - \frac{im}{\xi} \overline{u_3}' - \frac{im}{\xi^2} \overline{u_3}; \quad (9)$$

$$\overline{u_2}(-i\alpha C + \alpha^2 + \frac{\nu\varphi}{\xi} \text{Re} im + \frac{m^2}{\xi^2}) = -\overline{W} + \overline{u_2}'' + \frac{1}{\xi} \overline{u_2}'; \quad (10)$$

$$\overline{u_3}(-i\alpha C + \alpha^2 + \frac{1}{\xi^2} + \frac{\nu\varphi}{\xi} \text{Re} im + \frac{m^2}{\xi^2}) = -\frac{m}{\alpha\xi} \overline{W} - \nu_{\varphi r} \text{Re} \overline{u_1} + \overline{u_3}'' + \frac{1}{\xi} \overline{u_3}' + \frac{2}{\xi^2} \overline{u_1} im; \quad (11)$$

$$\xi \overline{u_1}' + \overline{u_1} + i\xi\alpha \overline{u_2} + im \overline{u_3} = 0; \quad (12)$$

$$\overline{u_j}(0) = \overline{u_j}(\xi_0) = 0; \quad j = 1, 2, 3, \quad (13)$$

где

$$\nu_{\varphi} = \frac{1 - e^{-\pi s/2}}{\pi s} \frac{2iJ_1(\sqrt{s}\xi)}{J_1(\sqrt{s}\xi_0)}, \quad \nu_{\varphi r} = \frac{1 - e^{-\pi s/2}}{\pi s} \frac{2i\sqrt{s}J_0(\sqrt{s}\xi)}{J_1(\sqrt{s}\xi_0)}, \quad (14)$$

штрихами обозначено дифференцирование по ξ .

Собственные значения (параметры α , Re или C при двух других известных) определялись с использованием метода дифференциальной прогонки (см., например, [5]) путем решения характеристического уравнения при $\xi = \xi_c$:

$$F = \det(\mathbf{A}^- - \mathbf{A}^+) = 0, \quad (15)$$

где ξ_c – координата точки стыковки, выбираемая из условия максимума характеристической функции на $\xi \in [0, \xi_0]$ при заданных параметрах системы. В (15) 3×3 матрица $\mathbf{A}(\xi)$ определяется из решения системы

$$\mathbf{A}' = \mathbf{G} - \mathbf{A}\mathbf{E} + (\mathbf{K} - \mathbf{A}\mathbf{D})\mathbf{A}, \quad (16)$$

где $\mathbf{G}, \mathbf{E}, \mathbf{K}, \mathbf{D}$ находятся из (9–12) и уравнений

$$\mathbf{V}_1' = \mathbf{K}\mathbf{V}_1 + \mathbf{G}\mathbf{V}_2, \\ \mathbf{V}_2' = \mathbf{D}\mathbf{V}_1 + \mathbf{E}\mathbf{V}_2; \quad (17)$$

векторы \mathbf{V}_1 и \mathbf{V}_2 выбраны как $\mathbf{V}_1 = \{\overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3}\}$, $\mathbf{V}_2 = \{\overline{u_2}', \overline{u_3}', \overline{W}\}$. Здесь при $\xi \in [0, \xi_0]$

$$\mathbf{V}_1(\xi) = \mathbf{A}(\xi)\mathbf{V}_2(\xi), \quad (18)$$

и с учетом (13)

$$\mathbf{A}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}(\xi_0) = \mathbf{0}. \quad (19)$$

Решение задачи Коши для системы прогоночных уравнений (16, 19) реализовывалось методом Рунге – Кутты четвертого порядка точности с контрольным членом Егорова, индексы $^+$ и $^-$ в (15) указывают на направление интегрирования: прямая $\xi = 0 \dots \xi_c$ и обратная $\xi = \xi_0 \dots \xi_c$ прогонка.

Некоторые *результаты*, полученные на основе проведенного линейного анализа устойчивости, проиллюстрированы на рис. 1: кривые нейтральной устойчивости для азимутальных спектральных мод $m = 0, 1$ и 2 , и на рис. 2: зависимость критического числа Рейнольдса от условий эксперимента (т.е. параметра ξ_0). Показано, что при условиях реальных экспериментов ($\alpha_0 \ll 27$) турбулентность не возникает. Результаты служат основой при исследовании устойчивости течения неньютоновских сред в крутильно-колебательном вискозиметре Швидковского Е.Г.

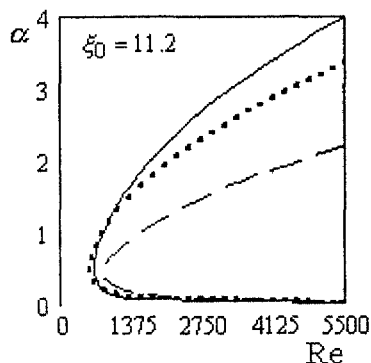


Рис. 1. Нейтральные кривые
--- - $m = 0$, - $m = 1$,
— - $m = 2$

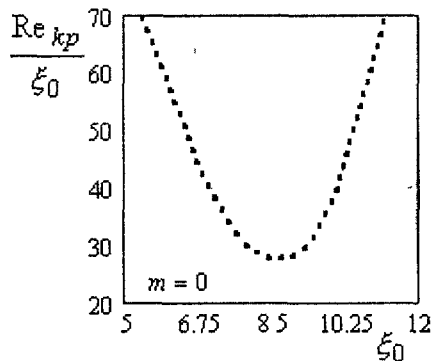


Рис. 2. Зависимость $\alpha_{0кр} = \frac{Re_{кр}}{\xi_0}$ от ξ_0

Работа выполнена при поддержке Минобразования РФ и правительства Челябинской области (грант 2003 г. для молодых ученых вузов Челябинской области).

Литература

1. Швидковский Е.Г. Некоторые вопросы вязкости расплавленных металлов. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 206 с.
2. Островский О.И., Григорян В.А. О структурных превращениях в металлических расплавах // *Изв. вузов. Черная металлургия*. – 1985. – № 5. – С. 1–12.
3. Елюхина И.В. К вопросу наблюдаемости упругих свойств жидких сред в вискозиметрическом эксперименте по Швидковскому Е.Г. // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия»*. Выпуск 1. – Челябинск. – 2001. – № 7 (07) – С. 77–81.
4. Елюхина И.В. О нерегулярном режиме крутильных колебаний в вискозиметре Швидковского Е.Г. // Там же – С. 82–84.
5. Гольдшик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. – Новосибирск: Наука, 1977. – 366 с.

Поступила в редакцию 10 апреля 2003 г.