УДК 532.137.3

ТЕОРИЯ КРУТИЛЬНОГО ВИСКОЗИМЕТРА, ЗАПОЛНЕННОГО ДВУМЯ НЕСМЕШИВАЮЩИМИСЯ ПРОВОДЯЩИМИ ЖИДКОСТЯМИ И ПОМЕЩЕННОГО В МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

В.П. Бескачко, А.М. Сомов

В связи с экспериментами по изучению явлений расслоения в металлических расплавах найдено решение задачи о крутильном вискозиметре, заполненном двумя несмешивающимися проводящими жидкостями и помещенном в однородное статическое магнитное поле осевого направления.

Введение

Многие жидкие металлические сплавы существуют в виде истинного раствора только при высоких температурах и испытывают расслоение на две несмешивающиеся жидкости при охлаждении. В экспериментах с крутильным вискозиметром удается наблюдать ход процессов расслоения по наблюдениям за температурной и временной зависимостью параметров колебаний – периода и декремента затухания. Последний обычно наиболее чувствителен к состоянию жидкости. Критическая температура, ниже которой раствор распадается на две фазы, фиксируется как температура, при которой нарушается монотонное поведение параметров колебаний по мере охлаждения гомогенного раствора. Сам процесс разделения фаз, как показывают эксперименты, может быть весьма длительным и часто требует времени, намного превышающего время одного цикла крутильных колебаний (порядка 10 минут). В ходе процесса расслоения декремент затухания колебаний изменяется во времени нерегулярным образом до тех пор, пока не завершится разделение фаз. Начиная с этого момента, вискозиметр оказывается заполненным двумя жидкостями, отличающимися по своим физико-химическим свойствам – вязкости, плотности и электропроводности. В этой ситуации самое большее, что можно попытаться сделать для интерпретации опытных данных в рамках существующих теорий, – оценить «эффективную» вязкость и, возможно, «эффективную» плотность неоднородного расплава, если пользоваться классической теорией [1], или (с помощью теории [2,3]) – вязкость каждой из фаз, если известны их плотности и объемы. Объемы прозрачных фаз можно определить по положению межфазной границы. В случае высокотемпературных расплавов сделать это непосредственно весьма затруднительно. Таким образом, в настоящее время отсутствует методика оценки свойств сосуществующих фаз в рамках метода крутильных колебаний. Выходом из положения была бы возможность наблюдения для данного состояния расплава не единственного набора параметров колебаний (декремента и периода), а некоторой их серии, возникающей, например, вследствие изменения одного или нескольких параметров установки. Такая процедура, однако, вряд ли осуществима практически. Другим вариантом может быть «протяжка» по некоторому внешнему полю. В работах [4–6] нами было показано, что таковым может быть внешнее магнитное поле, способное в случае жидких металлов существенно изменить наблюдаемые параметры колебаний уже при сравнительно небольших (легко достигаемых) значениях его индукции. Поэтому представляет интерес обобщить результаты, полученные в [4–6], на случай, когда вискозиметр заполнен двумя несмешивающимися проводящими жидкостями, возникающими, например, вследствие расслоения расплава.

Математическая формулировка задачи

Пусть вертикальный цилиндрический сосуд (тигель) из немагнитного диэлектрика с внутренним радиусом R и моментом инерции K заполнен двумя несмешивающимися проводящими жидкостями и, будучи подвешен на упругой нити, совершает затухающие крутильные колебания вокруг собственной оси в однородном статическом магнитном поле с индукцией B_0 осевого направления. Все величины, относящиеся к нижней (более плотной) жидкости обозначим индексом «1», а к верхней – индексом «2». Тогда величины ν_i, ρ_i, σ_i и h_i (i=1,2) будут означать соответственно кинематическую вязкость, плотность, электропроводность и толщину слоя i-й жидкости.

Пусть известны также период τ_0 и логарифмический декремент затухания δ_0 пустого цилиндра. Задача состоит в предсказании периода τ и декремента затухания δ колебаний цилиндра, заполненного указанным способом.

В присутствии магнитного поля движение проводящей жидкости в цилиндре будет описываться уравнениями магнитной гидродинамики. С целью их упрощения воспользуемся указанной в [1] оценкой магнитного числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_m = \mu_0\sigma UL$, где U – характерная скорость потока, L – характерный пространственный масштаб течения, μ_0 – магнитная постоянная. Для металлических расплавов $(\sigma \sim (1...10)\cdot 10^6\ (\text{Ом}\cdot\text{м})^{-1})$ и типичных условий вискозиметрических экспериментов ($R \sim 10^{-2}$ м, $\tau \sim 5$ с) оказывается, что $\mathrm{Re}_m \sim 2{,}5\times(10^{-4}...10^{-5})$. Малость магнитного числа Рейнольдса позволяет пренебречь индуцированным магнитным полем в сравнении с внешним (см. например [2]), и в случае, когда последнее оказывается статическим, записать следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial\hat{\mathbf{V}}_l}{\partial\hat{t}} + (\hat{\mathbf{V}}_l\nabla)\hat{\mathbf{V}}_l = -\frac{1}{\rho_l}\nabla p_l + \nu_l\Delta\hat{\mathbf{V}}_l + \frac{1}{\rho_l}[\mathbf{j}_l\mathbf{B}_0], \tag{1}$$

$$\Delta\hat{\Phi}_l = \mathbf{B}_0 rot\hat{\mathbf{V}}_l, \tag{2}$$

которая, будучи дополнена материальным уравнением (закон Ома)

$$\mathbf{j}_l = \sigma_l(-\nabla\hat{\Phi}_l + [\hat{\mathbf{V}}_l, \mathbf{B}_0]), \tag{3}$$

представляет собой замкнутую систему для отыскания полей скоростей $\hat{\mathbf{V}}_l$ и электрических потенциалов $\hat{\Phi}_l$ в каждой из жидкостей. В этих формулах $\mathbf{j}_l$ и p_l означают плотность электрического тока и давление соответственно. Крышка сверху указывает, что помеченная величина является размерной и этим отличается от одноименных безразмерных величин, вводимых ниже. Исключая из (1) с помощью (3) плотность тока $\mathbf{j}_l$, уравнения движения запишем в виде

$$\frac{\partial\hat{\mathbf{V}}_l}{\partial\hat{t}} + (\hat{\mathbf{V}}_l\nabla)\hat{\mathbf{V}}_l = -\frac{1}{\rho_l}\nabla p_l + \nu_l\Delta\hat{\mathbf{V}}_l - \frac{\sigma_l}{\rho_l}[\nabla\hat{\Phi}_l\mathbf{B}_0] + \frac{\sigma_l}{\rho_l}[[\hat{\mathbf{V}}_l\mathbf{B}_0]\mathbf{B}_0], \tag{4}$$

$$\Delta\hat{\Phi}_l = \mathbf{B}_0 rot\hat{\mathbf{V}}_l. \tag{5}$$

Выберем цилиндрическую систему координат, начало которой поместим на дне цилиндра, а ось z направим вдоль его геометрической оси. При решении задачи будем использовать те же приближения, что и в [1, 2]:

1) амплитуда колебаний мала настолько, что единственной существенной компонентой скоростей жидкостей будет азимутальная $\hat{V}_{l\varphi}(\hat{r},\hat{z},\hat{t})$;

2) течение аксиально симметрично;

3) рассматривается установившийся режим затухающих колебаний.

Использование приближений 1 и 2 позволяет записать уравнения (4) и (5) в следующем виде:

$$\frac{\partial\hat{V}_{l\varphi}}{\partial\hat{t}} = \nu_l\left\{\frac{1}{\hat{r}}\frac{\partial}{\partial\hat{r}}\left(\hat{r}\frac{\partial\hat{V}_{l\varphi}}{\partial\hat{r}}\right) + \frac{\partial^2\hat{V}_{l\varphi}}{\partial\hat{z}^2} - \frac{\hat{V}_{l\varphi}}{\hat{r}^2}\right\} + \frac{\sigma_l}{\rho_l}\left(B_0\frac{\partial\hat{\Phi}_l}{\partial\hat{r}} - B_0^2\hat{V}_{l\varphi}\right), \tag{6}$$

$$\frac{1}{\hat{r}}\frac{\partial}{\partial\hat{r}}\left(\hat{r}\frac{\partial\hat{\Phi}_l}{\partial\hat{r}}\right) + \frac{\partial^2\hat{\Phi}_l}{\partial\hat{z}^2} = B_0\left(\frac{\hat{V}_{l\varphi}}{\hat{r}} + \frac{\partial\hat{V}_{l\varphi}}{\partial\hat{r}}\right). \tag{7}$$

Введем теперь безразмерные величины и параметры:

$$t = \hat{t}/\tau, \quad z = \hat{z}/h_1, \quad r = \hat{r}/R, \quad \gamma = h_1/R, \quad \varepsilon = h_2/h_1,$$
$$\mathrm{Re}_l = \frac{R^2}{\tau\nu_l}, \quad Ha_l = B_0R\sqrt{\frac{\sigma_l}{\rho_l\nu_l}}, \quad V_{l\varphi} = \hat{V}_{l\varphi}/\Omega_0R, \quad \Phi_l = \frac{\hat{\Phi}_l}{B_0R^2\Omega_0}, \quad \Omega = \hat{\Omega}/\Omega_0, \tag{8}$$

где Ω – амплитуда угловой скорости цилиндра, а Ω_0 – ее начальное значение. Обозначим также $V_{l\varphi} \equiv V_l$, поскольку другими компонентами поля скорости мы пренебрегли. В этих переменных уравнения (6) и (7) примут вид:

$$\mathrm{Re}_i \frac{\partial V_i}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_i}{\partial r}\right) + \frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2} - \frac{V_i}{r^2} + Ha_i^2\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial r} - \hat{V}_i\right), \tag{9}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi_i}{\partial r}\right) + \frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2} = \frac{V_i}{r} + \frac{\partial V_i}{\partial r}. \tag{10}$$

Учтем теперь, что в режиме установившихся затухающих колебаний должно быть:

$$V_i(r,z,t) = v_i(r,z)e^{-\alpha t},$$

$$\Omega(t) = \Omega_0 e^{-\alpha t},$$

$$\Phi_i(r,z,t) = \psi_i(r,z)e^{-\alpha t},$$

где $\alpha = \delta + 2\pi i$ – безразмерная комплексная частота колебаний. Подставляя эти выражения в (9), (10), для уравнений движения получаем окончательно:

$$-\alpha \mathrm{Re}_i v_i = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_i}{\partial r}\right) + \frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial^2 v_i}{\partial z^2} - \frac{v_i}{r^2} + Ha_i^2\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial r} - v_i\right), \tag{11}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi_i}{\partial r}\right) + \frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z^2} = \left(\frac{v_i}{r} + \frac{\partial v_i}{\partial r}\right). \tag{12}$$

Запишем теперь граничные условия для $v_{i\varphi}$ и ψ_i:

$$v_i(1,z) = 1, \qquad v_1(r,\ 0) = r, \qquad v_1(r,\ 1) = v_2(r,\ 1), \tag{13, 14, 15}$$

$$\left.\frac{\partial v_2}{\partial z}\right|_{z=1+\varepsilon} = 0, \qquad \eta_1 \left.\frac{\partial v_1}{\partial z}\right|_{z=1} = \eta_2 \left.\frac{\partial v_2}{\partial z}\right|_{z=1}, \qquad \left.\frac{\partial \psi_i}{\partial r}\right|_{r=1} = 1, \tag{16, 17, 18}$$

$$\left.\frac{\partial \psi_1}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial \psi_2}{\partial z}\right|_{z=1+\varepsilon} = 0, \qquad \sigma_1 \left.\frac{\partial \psi_1}{\partial z}\right|_{z=1} = \sigma_2 \left.\frac{\partial \psi_2}{\partial z}\right|_{z=1}, \tag{19, 20, 21}$$

$$\psi_1|_{z=1} = \psi_2|_{z=1}. \tag{22}$$

Они означают: (13, 14) – условия прилипания вязкой жидкости к твердым стенкам сосуда, (15) – отсутствие скольжения между жидкостями на межфазной границе, (16) – отсутствие сдвиговых напряжений на свободной границе второй жидкости, (17) – равенство этих напряжений на межфазной границе, (18)–(20) – отсутствие электрического тока через твердые границы и свободную поверхность верхней жидкости, (21) – отсутствие электрического заряда на межфазной границе, (22) – непрерывность электрического потенциала на ней.

Расчет полей скорости и потенциала

Решение краевой задачи (11)–(22) будем разыскивать в виде

$$v_i = \frac{J_1(k_i r)}{J_1(k_i)} + \chi_i(r,z), \quad \psi_i = -\frac{1}{k_i}\frac{J_0(k_i r)}{J_1(k_i)} + \xi_i(r,z), \tag{23}$$

где J_i – бесселева функция первого рода i-го порядка, а параметр k_i пока не определен. Подставляя (23) в (11), будем иметь

$$-\left\{\left(\alpha \mathrm{Re}_i - \frac{1}{r^2}\right)\frac{J_1(k_i r)}{J_1(k_i)} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\frac{J_1(k_i r)}{J_1(k_i)}\right)\right\} = \alpha \mathrm{Re}_i \chi_i + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \chi_i}{\partial r}\right) + \frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial^2 \chi_i}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2}\chi_i + Ha_i^2\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial r} - \chi_i\right). \tag{24}$$

Выражение в левой части этого равенства будет равно нулю, если положить $k_i^2 = \alpha \mathrm{Re}_i$. Тогда для функций χ_i и ξ_i получим уравнение

$$\alpha \mathrm{Re}_i \chi_i + \frac{\partial^2 \chi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \chi_i}{\partial r} + \frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial^2 \chi_i}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2}\chi_i - Ha_i^2\left(\chi_i - \frac{\partial \xi_i}{\partial r}\right) = 0. \tag{25}$$

Аналогично подстановка (23) в (12) приводит к уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial \xi_i}{\partial r})+\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial z^2}=\frac{1}{r}\chi_i+\frac{\partial \chi_i}{\partial r}. \tag{26}$$

Заметим, что условия (13) и (18) теперь примут вид

$$\chi_i\big|_{r=1}=0, \qquad \left.\frac{\partial \xi_i}{\partial r}\right|_{r=1}=0.$$

Они будут удовлетворены, если положить:

$$\chi_i(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}U_{in}(z)J_1(\gamma_n r), \qquad \xi_i(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}T_{in}(z)J_0(\gamma_n r), \tag{27}$$

где γ_n – n-й корень уравнения $J_1(x)=0$.

Подставляя теперь (27) в уравнения (25) и (26) и учитывая, что функции $J_1(\gamma_n r)$ ортогональны друг другу при различных n, получаем, что функции $U_{in}(z)$ и $T_{in}(z)$ должны удовлетворять уравнениям:

$$\frac{\partial^2 U_{in}(z)}{\partial z^2}+\gamma^2(\alpha\,\mathrm{Re}_i-\gamma_n^2-Ha_i^2)U_{in}(z)-\gamma^2\gamma_n Ha_i^2 T_{in}(z)=0, \tag{28}$$

$$\frac{\partial^2 T_{in}(z)}{\partial z^2}-\gamma^2\gamma_n^2 T_{in}(z)=\gamma^2\gamma_n U_{in}(z). \tag{29}$$

Исключая из (28) $U_{in}(z)$ с помощью (29), находим замкнутое уравнение для $T_{in}(z)$:

$$\frac{\partial^4 T_{in}}{\partial z^4}+\gamma^2(\alpha\,\mathrm{Re}_i-2\gamma_n^2-Ha_i^2)\frac{\partial^2 T_{in}}{\partial z^2}-\gamma^4\gamma_n^2(\alpha\,\mathrm{Re}_i-\gamma_n^2)T_{in}=0$$

или

$$\frac{\partial^4 T_{in}}{\partial z^4}+\kappa_{in}\frac{\partial^2 T_{in}}{\partial z^2}+\Delta_{in}T_{in}=0, \tag{30}$$

где мы положили:

$$\kappa_{in}=\gamma^2(\alpha\,\mathrm{Re}_i-2\gamma_n^2-Ha_i^2),$$

$$\Delta_{in}=\gamma_n^2\gamma^4(\gamma_n^2-\alpha\,\mathrm{Re}_i).$$

Характеристическое уравнение для (30) имеет вид

$$\lambda_{in}^4+\kappa_{in}\lambda_{in}^2+\Delta_{in}=0,$$

а его решения есть

$$(\lambda_{in})_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{-\frac{\kappa_{in}}{2}\pm\sqrt{\frac{\kappa_{in}^2}{4}-\Delta_{in}}}.$$

Если обозначить

$$\lambda_{in}^{\pm}=\sqrt{-\frac{\kappa_{in}}{2}\pm\sqrt{\frac{\kappa_{in}^2}{4}-\Delta_{in}}},$$

тогда общее решение уравнения (30) для $i = 1, 2$ можно записать так:

$$T_{1n}=a_{1n}sh[\lambda_{1n}^{+}(1-z)]+b_{1n}ch[\lambda_{1n}^{+}(1-z)]+c_{1n}sh[\lambda_{1n}^{-}(1-z)]+d_{1n}ch[\lambda_{1n}^{-}(1-z)], \tag{31}$$

$$T_{2n}=a_{2n}sh[\lambda_{2n}^{+}(1+\varepsilon-z)]+b_{2n}ch[\lambda_{2n}^{+}(1+\varepsilon-z)]+c_{2n}sh[\lambda_{2n}^{-}(1+\varepsilon-z)]+d_{2n}ch[\lambda_{2n}^{-}(1+\varepsilon-z)]. \tag{32}$$

Подставляя T_{in} в (29), легко находим также:

$$U_{1n}=\frac{1}{\gamma_n}((\frac{\lambda_{1n}^{+}}{\gamma})^2-\gamma_n^2)(a_{1n}sh[\lambda_{1n}^{+}(1-z)]+b_{1n}ch[\lambda_{1n}^{+}(1-z)])+$$
$$+\frac{1}{\gamma_n}((\frac{\lambda_{1n}^{-}}{\gamma})^2-\gamma_n^2)(c_{1n}sh[\lambda_{1n}^{-}(1-z)]+d_{1n}ch[\lambda_{1n}^{-}(1-z)]), \tag{33}$$

$$U_{2n}=\frac{1}{\gamma_n}((\frac{\lambda_{2n}^{+}}{\gamma})^2-\gamma_n^2)(a_{2n}sh[\lambda_{2n}^{+}(1+\varepsilon-z)]+b_{2n}ch[\lambda_{2n}^{+}(1+\varepsilon-z)])+$$
$$+\frac{1}{\gamma_n}((\frac{\lambda_{2n}^{-}}{\gamma})^2-\gamma_n^2)(c_{2n}sh[\lambda_{2n}^{-}(1+\varepsilon-z)]+d_{2n}ch[\lambda_{2n}^{-}(1+\varepsilon-z)]). \quad (34)$$

В соотношениях (31)–(34) a_{in}, b_{in}, c_{in}, d_{in} (i=1,2) – коэффициенты, которые пока не определены. Для их отыскания вернемся к оставшимся граничным условиям. Условие (14) теперь означает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}J_1(\gamma_n r)U_{1n}(0)=r-\frac{J_1(k_1 r)}{J_1(k_1)}.$$

К величинам $U_{ln}(0)$ можно относиться как к коэффициентам разложения правой части рассматриваемого уравнения в ряд по функциям Бесселя. Тогда из теории рядов Фурье–Бесселя следует, что

$$U_{1n}(0)=\frac{1}{\|J_1(\gamma_n r)\|^2}\int_0^1 r(r-\frac{J_1(k_1 r)}{J_1(k_1)})J_1(\gamma_n r)dr=-\frac{2\kappa_1^2}{J_0(\gamma_n)\gamma_n(\kappa_1^2-\gamma_n^2)}\equiv\theta_n. \quad (35)$$

Аналогично условия (15) и (22) теперь записываются как

$$\frac{J_1(k_1 r)}{J_1(k_1)}-\frac{J_1(k_2 r)}{J_1(k_2)}=\sum_{n=1}^{\infty}J_1(\gamma_n r)\{U_{2n}(1)-U_{1n}(1)\},$$

$$\frac{1}{k_2}\frac{J_0(k_2 r)}{J_1(k_2)}-\frac{1}{k_1}\frac{J_0(k_1 r)}{J_1(k_1)}=\sum_{n=1}^{\infty}J_0(\gamma_n r)\{T_{2n}(1)-T_{1n}(1)\},$$

где последнее уравнение можно привести к виду

$$\frac{J_1(k_2 r)}{J_1(k_2)}-\frac{J_1(k_1 r)}{J_1(k_1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n J_1(\gamma_n r)\{T_{2n}(1)-T_{1n}(1)\},$$

если воспользоваться тем, что

$$\frac{d}{dx}J_0(x)=-J_1(x).$$

Тогда:

$$U_{2n}(1)-U_{1n}(1)=\frac{2\gamma_n}{J_0(\gamma_n)}\frac{\kappa_2^2-\kappa_1^2}{(\kappa_2^2-\gamma_n^2)(\kappa_1^2-\gamma_n^2)}\equiv\xi_n, \quad (36)$$

$$T_{2n}(1)-T_{1n}(1)=\frac{2}{J_0(\gamma_n)}\frac{\kappa_1^2-\kappa_2^2}{(\kappa_1^2-\gamma_n^2)(\kappa_2^2-\gamma_n^2)}=-\frac{\xi_n}{\gamma_n}. \quad (37)$$

Остальные граничные условия для функций $U_{in}(z)$ и $T_{in}(z)$ получаются более непосредственно:

$$\left.\frac{dU_{2n}}{dz}\right|_{z=1+\varepsilon}=0,\qquad \eta_1\left.\frac{dU_{1n}}{dz}\right|_{z=1}=\eta_2\left.\frac{dU_{2n}}{dz}\right|_{z=1},\qquad \left.\frac{dT_{1n}}{dz}\right|_{z=0}=0, \quad (38, 39, 40)$$

$$\left.\frac{dT_{2n}}{dz}\right|_{z=1+\varepsilon}=0,\qquad \sigma_1\left.\frac{dT_{1n}}{dz}\right|_{z=1}=\sigma_2\left.\frac{dT_{2n}}{dz}\right|_{z=1}. \quad (41, 42)$$

Подставляя общее решение (31)–(34) в граничные условия (35)–(42), получаем полную систему уравнений для отыскания a_{in}, b_{in}, c_{in}, d_{in} (i=1, 2):

$$((\frac{\lambda_{1n}^{+}}{\gamma})^2-\gamma_n^2)(a_{1n}sh[\lambda_{1n}^{+}]+b_{1n}ch[\lambda_{1n}^{+}])+((\frac{\lambda_{1n}^{-}}{\gamma})^2-\gamma_n^2)(c_{1n}sh[\lambda_{1n}^{-}]+d_{1n}ch[\lambda_{1n}^{-}])=\gamma_n\theta_n, \quad (43)$$

$$((\frac{\lambda_{2n}^{+}}{\gamma})^2-\gamma_n^2)(a_{2n}sh[\lambda_{2n}^{+}\varepsilon]+b_{2n}ch[\lambda_{2n}^{+}\varepsilon])+((\frac{\lambda_{2n}^{-}}{\gamma})^2-\gamma_n^2)(c_{2n}sh[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon]+d_{2n}ch[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon])-$$
$$-((\frac{\lambda_{1n}^{+}}{\gamma})^2-\gamma_n^2)b_{1n}-((\frac{\lambda_{1n}^{-}}{\gamma})^2-\gamma_n^2)d_{1n}=\gamma_n\xi_n, \quad (44)$$

$$\lambda_{2n}^{+}((\frac{\lambda_{2n}^{+}}{\gamma})^2-\gamma_n^2)a_{2n}+\lambda_{2n}^{-}((\frac{\lambda_{2n}^{-}}{\gamma})^2-\gamma_n^2)c_{2n}=0\,, \tag{45}$$

$$\eta_1(\lambda_{1n}^{+}((\frac{\lambda_{1n}^{+}}{\gamma})^2-\gamma_n^2)a_{1n}+\lambda_{1n}^{-}((\frac{\lambda_{1n}^{-}}{\gamma})^2-\gamma_n^2)c_{1n})=$$

$$=\eta_2(\lambda_{2n}^{+}((\frac{\lambda_{2n}^{+}}{\gamma})^2-\gamma_n^2)(a_{2n}ch[\lambda_{2n}^{+}\varepsilon]+b_{2n}sh[\lambda_{2n}^{+}\varepsilon])+ \tag{46}$$

$$+\lambda_{2n}^{-}((\frac{\lambda_{2n}^{-}}{\gamma})^2-\gamma_n^2)(c_{2n}ch[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon]+d_{2n}sh[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon]))\,,$$

$$\lambda_{1n}^{+}(a_{1n}ch[\lambda_{1n}^{+}]+b_{1n}sh[\lambda_{1n}^{+}])+\lambda_{1n}^{-}(c_{1n}ch[\lambda_{1n}^{-}]+d_{1n}sh[\lambda_{1n}^{-}])=0\,, \tag{47}$$

$$\lambda_{2n}^{+}a_{2n}+\lambda_{2n}^{-}c_{2n}=0\,, \tag{48}$$

$$\sigma_1(\lambda_{1n}^{+}a_{1n}+\lambda_{1n}^{-}c_{1n})=\sigma_2(\lambda_{2n}^{+}(a_{2n}ch[\lambda_{2n}^{+}\varepsilon]+b_{2n}sh[\lambda_{2n}^{+}\varepsilon])+\lambda_{2n}^{-}(c_{2n}ch[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon]+d_{2n}sh[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon]))\,, \tag{49}$$

$$a_{2n}sh[\lambda_{2n}^{+}\varepsilon]+b_{2n}ch[\lambda_{2n}^{+}\varepsilon]+c_{2n}sh[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon]+d_{2n}ch[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon]-b_{1n}-d_{1n}=-\frac{\xi_n}{\gamma_n}\,. \tag{50}$$

Из (45), (48) следует, что

$$a_{2n}=c_{2n}=0\,. \tag{51}$$

Если обозначить:

$$\vartheta_{1n}^{+}=((\frac{\lambda_{1n}^{+}}{\gamma})^2-\gamma_n^2),\qquad \vartheta_{1n}^{-}=((\frac{\lambda_{1n}^{-}}{\gamma})^2-\gamma_n^2),$$

$$\vartheta_{2n}^{+}=((\frac{\lambda_{2n}^{+}}{\gamma})^2-\gamma_n^2),\qquad \vartheta_{2n}^{-}=((\frac{\lambda_{2n}^{-}}{\gamma})^2-\gamma_n^2),$$

то с учетом (51) система уравнений для оставшихся коэффициентов примет вид:

$$\vartheta_{1n}^{+}(a_{1n}sh[\lambda_{1n}^{+}]+b_{1n}ch[\lambda_{1n}^{+}])+\vartheta_{1n}^{-}(c_{1n}sh[\lambda_{1n}^{-}]+d_{1n}ch[\lambda_{1n}^{-}])=\gamma_n\theta_n\,, \tag{52}$$

$$\vartheta_{2n}^{+}b_{2n}ch[\lambda_{2n}^{+}\varepsilon]+\vartheta_{2n}^{-}d_{2n}ch[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon]-\vartheta_{1n}^{+}b_{1n}-\vartheta_{1n}^{-}d_{1n}=\gamma_n\xi_n\,, \tag{53}$$

$$\eta_1(\lambda_{1n}^{+}\vartheta_{1n}^{+}a_{1n}+\lambda_{1n}^{-}\vartheta_{1n}^{-}c_{1n})=\eta_2(\lambda_{2n}^{+}\vartheta_{2n}^{+}b_{2n}sh[\lambda_{2n}^{+}\varepsilon]+\lambda_{2n}^{-}\vartheta_{2n}^{-}d_{2n}sh[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon])\,, \tag{54}$$

$$\lambda_{1n}^{+}(a_{1n}ch[\lambda_{1n}^{+}]+b_{1n}sh[\lambda_{1n}^{+}])+\lambda_{1n}^{-}(c_{1n}ch[\lambda_{1n}^{-}]+d_{1n}sh[\lambda_{1n}^{-}])=0\,, \tag{55}$$

$$\sigma_1(\lambda_{1n}^{+}a_{1n}+\lambda_{1n}^{-}c_{1n})=\sigma_2(\lambda_{2n}^{+}b_{2n}sh[\lambda_{2n}^{+}\varepsilon]+\lambda_{2n}^{-}d_{2n}sh[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon])\,, \tag{56}$$

$$b_{2n}ch[\lambda_{2n}^{+}\varepsilon]+d_{2n}ch[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon]-b_{1n}-d_{1n}=-\frac{\xi_n}{\gamma_n}\,. \tag{57}$$

Из уравнений (53) и (57) следует, что

$$d_{1n}=\frac{-\gamma_n\xi_n-\vartheta_{1n}^{+}\dfrac{\xi_n}{\gamma_n}+b_{2n}ch[\lambda_{2n}^{+}\varepsilon](\vartheta_{2n}^{+}-\vartheta_{1n}^{+})+d_{2n}ch[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon](\vartheta_{2n}^{-}-\vartheta_{1n}^{+})}{(\vartheta_{1n}^{-}-\vartheta_{1n}^{+})}\,, \tag{58}$$

$$b_{1n}=\frac{\gamma_n\xi_n+\vartheta_{1n}^{-}\dfrac{\xi_n}{\gamma_n}-b_{2n}ch[\lambda_{2n}^{+}\varepsilon](\vartheta_{2n}^{+}-\vartheta_{1n}^{-})-d_{2n}ch[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon](\vartheta_{2n}^{-}-\vartheta_{1n}^{-})}{(\vartheta_{1n}^{-}-\vartheta_{1n}^{+})}\,, \tag{59}$$

а из (54) и (56) –

$$c_{1n}=\frac{b_{2n}\lambda_{2n}^{+}sh[\lambda_{2n}^{+}\varepsilon](\dfrac{\eta_2}{\eta_1}\vartheta_{2n}^{+}-\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\vartheta_{1n}^{+})+d_{2n}\lambda_{2n}^{-}sh[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon](\dfrac{\eta_2}{\eta_1}\vartheta_{2n}^{-}-\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\vartheta_{1n}^{+})}{\lambda_{1n}^{-}(\vartheta_{1n}^{-}-\vartheta_{1n}^{+})}\,, \tag{60}$$

$$a_{1n}=\frac{-b_{2n}\lambda_{2n}^{+}sh[\lambda_{2n}^{+}\varepsilon](\dfrac{\eta_2}{\eta_1}\vartheta_{2n}^{+}-\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\vartheta_{1n}^{-})-d_{2n}\lambda_{2n}^{-}sh[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon](\dfrac{\eta_2}{\eta_1}\vartheta_{2n}^{-}-\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\vartheta_{1n}^{-})}{\lambda_{1n}^{+}(\vartheta_{1n}^{-}-\vartheta_{1n}^{+})}\,. \tag{61}$$

Равенства (58)–(61) означают, что коэффициенты a_{1n}, b_{1n}, c_{1n}, d_{in} будут вполне определены, если удастся найти коэффициенты b_{2n} и d_{2n} . Подставляя (58)–(61) в оставшиеся два уравнения системы (52)–(57) , то есть в уравнения (52) и (55), получаем замкнутую систему из двух уравнений для интересующих нас неизвестных. Ее решение есть

$$b_{2n} = \frac{B_{2n}}{\Delta}, \qquad d_{2n} = \frac{D_{2n}}{\Delta}. \tag{62}$$

Явные выражения для B_{2n}, D_{2n} и Δ приведены в Приложении. Соотношениями (23), (27), (31)–(34), (51), (58)–(62) решение краевой задачи (11)–(22) определено полностью.

Вискозиметрические уравнения

Зная поле скорости жидкости, нетрудно вычислить момент вязких сил, действующих на цилиндр. Сила, действующая на единицу площади поверхности твердого тела со стороны вязкой жидкости [7]

$$P_i = -\sigma_{ik} n_k = p n_i - \sigma'_{ik} n_k, \tag{63}$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности (внешний к поверхности жидкости), σ'_{ik} – вязкий тензор напряжений.

На единицу внутренней боковой поверхности тигля действует сила, направленная по касательной к поверхности и равная согласно (63),

$$P_\varphi = -\sigma'_{r\varphi} = \eta\left(\frac{\partial \hat{V}_\varphi}{\partial \hat{r}} - \frac{\hat{V}_\varphi}{\hat{r}}\right)\bigg|_{\hat{r}=R} = \eta\Omega_0 e^{-\alpha t}\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}\right)\bigg|_{r=1}.$$

Тогда моменты сил трения M_1' и M_2', действующие на боковую поверхность тигля со стороны жидкостей 1 и 2, будут:

$$M_1' = -2\pi\eta_1 R^3 \gamma\Omega_0 e^{-\alpha t}\int_0^1 \left(\frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial r} - \frac{v_{1\varphi}}{r}\right)\bigg|_{r=1} dz,$$

$$M_2' = -2\pi\eta_2 R^3 \gamma\Omega_0 e^{-\alpha t}\int_1^{1+\varepsilon} \left(\frac{\partial v_{2\varphi}}{\partial r} - \frac{v_{2\varphi}}{r}\right)\bigg|_{r=1} dz.$$

Согласно (63) на единицу площади дна тигля действует касательная сила

$$P_\varphi = \sigma'_{\varphi z} = \eta_1\Omega_0 \frac{R}{h_1} e^{-\alpha t}\left(\frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial z}\right)\bigg|_{z=0}.$$

Тогда полный момент сил трения, действующих на дно,

$$M_1'' = 2\pi\eta_1 R^3 \Omega_0 \frac{1}{\gamma} e^{-\alpha t}\int_0^1 r^2 \left(\frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial z}\right)\bigg|_{z=0} dr.$$

Таким образом, суммарный момент сил трения, действующий на внутреннюю поверхность цилиндра со стороны его жидкого заполнения, можно представить как

$$M = -2\pi\eta_1 R^3 \gamma\Omega_0 e^{-\alpha t}\{M_1 + M_2 + M_3\}, \tag{64}$$

где

$$M_1 = \int_0^1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{v_1}{r}\right)\bigg|_{r=1} dz, \quad M_2 = \frac{\eta_2}{\eta_1}\int_1^{1+\varepsilon} \left(\frac{\partial v_2}{\partial r} - \frac{v_2}{r}\right)\bigg|_{r=1} dz, \quad M_3 = -\frac{1}{\gamma^2}\int_0^1 r^2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial z}\right)\bigg|_{z=0} dr.$$

Вычисления с помощью полученного в предыдущем разделе поля скоростей приводят к следующим результатам:

$$M_1 = -k_1 \frac{J_2(k_1)}{J_1(k_1)} + \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\gamma_n)\left\{\frac{\vartheta_{1n}^+}{\lambda_{1n}^+}\left(a_{1n}(ch[\lambda_{1n}^+] - 1) + b_{1n} sh[\lambda_{1n}^+]\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\vartheta_{1n}^-}{\lambda_{1n}^-}\left(c_{1n}(ch[\lambda_{1n}^-] - 1) + d_{1n} sh[\lambda_{1n}^-]\right)\right\}, \tag{65}$$

$$M_2 = -\frac{\eta_2}{\eta_1} k_2 \frac{J_2(k_2)}{J_1(k_2)} \varepsilon + \frac{\eta_2}{\eta_1} \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\gamma_n) \{ \frac{\vartheta_{2n}^+}{\lambda_{2n}^+} b_{2n} sh[\lambda_{2n}^+ \varepsilon] + \frac{\vartheta_{2n}^-}{\lambda_{2n}^-} d_{2n} sh[\lambda_{2n}^- \varepsilon] \}, \quad (66)$$

$$M_3 = \frac{1}{\gamma^2 \gamma_n^2} \sum_{n=1}^{\infty} J_2(\gamma_n) \{ \lambda_{1n}^+ \vartheta_{1n}^+ (a_{1n} ch[\lambda_{1n}^+] + b_{1n} sh[\lambda_{1n}^+]) + \lambda_{1n}^- \vartheta_{1n}^- (c_{1n} ch[\lambda_{1n}^-] + d_{1n} sh[\lambda_{1n}^-]) \}. \quad (67)$$

После вычисления момента вязких сил все оставшиеся рассуждения вполне аналогичны выполненным в классической работе [1]. Именно, если ввести так называемую функцию трения

$$L = \frac{M}{\Omega(t)} = -2\pi\eta_1 R^3 \gamma \{ M_1 + M_2 + M_3 \}, \quad (68)$$

то параметры колебаний заполненного тигля оказываются связанными с ней посредством следующих соотношений (вискозиметрических уравнений):

$$\frac{L'}{K} = p \cdot \left(1 + \frac{p_o^2 + q_o^2}{p^2 + q^2} \right) - 2p_o, \quad (69)$$

$$\frac{L''}{K} = q \cdot \left(1 - \frac{p_o^2 + q_o^2}{p^2 + q^2} \right). \quad (70)$$

Здесь L' и L'' – действительная и мнимая части функции (68), $p = \delta / \tau$ – коэффициент затухания колебаний, $q = 2\pi / \tau$ – их циклическая частота; величины p_o и q_o имеют тот же смысл, что и p и q, но относятся к колебаниям пустого тигля.

Соотношения (68)–(70) полностью решают поставленную в работе задачу.

В заключение рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Пусть толщина слоя верхней жидкости ε бесконечно мала. В этом пределе получаем

$$L = -2\pi\eta_1 R^3 \gamma \left\{ -k_1 \frac{J_2(k_1)}{J_1(k_1)} + \right.$$

$$\left. +2k_1^4 \sum_{n=1}^{\infty} sh[\lambda_{1n}^-] sh[\lambda_{1n}^+] \frac{(\lambda_{1n}^{-2} - \lambda_{1n}^{+2})}{(\lambda_{1n}^- \vartheta_{1n}^+ sh[\lambda_{1n}^-] ch[\lambda_{1n}^+] - \lambda_{1n}^+ \vartheta_{1n}^- ch[\lambda_{1n}^-] sh[\lambda_{1n}^+])(k_1^2 - \gamma_n^2) \lambda_{1n}^- \lambda_{1n}^+} \right\}.$$

Это выражение полностью совпадает с таковым, полученным в [4] для случая вискозиметра, заполненного однородной проводящей жидкостью и помещенного в магнитное поле.

2. Пусть $B_0 \to 0$ или $\sigma_i \to 0$. Тогда получаем:

$$Ha_i = 0, \qquad \lambda_{in}^+ = \gamma\gamma_n, \qquad \lambda_{in}^- = \gamma\sqrt{\gamma_n^2 - \alpha \mathrm{Re}_i}, \qquad (i = 1, 2)$$

$$\vartheta_{1n}^+ = 0, \quad \vartheta_{2n}^+ = 0, \quad \vartheta_{1n}^- = -\alpha \mathrm{Re}_1, \quad \vartheta_{2n}^- = -\alpha \mathrm{Re}_2.$$

Функция трения примет вид

$$L = -2\pi\eta_1 R^3 \gamma \{ M_1 + M_2 + M_3 \},$$

где теперь:

$$M_1 = -k_1 \frac{J_2(k_1)}{J_1(k_1)} + \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\gamma_n) (C_{1n} \frac{ch[\lambda_{1n}^-] - 1}{\lambda_{1n}^-} + D_{1n} \frac{sh[\lambda_{1n}^-]}{\lambda_{1n}^-}),$$

$$M_2 = -\frac{\eta_2}{\eta_1} k_2 \frac{J_2(k_2)}{J_1(k_2)} \varepsilon + \frac{\eta_2}{\eta_1} \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\gamma_n) D_{2n} \frac{sh[\lambda_{2n}^- \varepsilon]}{\lambda_{2n}^-},$$

$$M_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2(\gamma_n) \lambda_{1n}^-}{\gamma^2 \gamma_n^2} (C_{1n} ch[\lambda_{1n}^-] + D_{1n} sh[\lambda_{1n}^-]),$$

$$D_{1n} = \gamma_n (-\xi_n + \frac{(\theta_n + \xi_n ch[\lambda_{1n}^-])}{(\frac{\lambda_{2n}^-}{\lambda_{1n}^-} \frac{\eta_2}{\eta_1} sh[\lambda_{2n}^- \varepsilon] sh[\lambda_{1n}^-] + ch[\lambda_{2n}^- \varepsilon] ch[\lambda_{1n}^-])} ch[\lambda_{2n}^- \varepsilon]),$$

$$C_{1n} = \frac{\lambda_{2n}^{-}}{\lambda_{1n}^{-}}\frac{\eta_2}{\eta_1} sh[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon] \frac{\gamma_n(\theta_n + \xi_n ch[\lambda_{1n}^{-}])}{(\frac{\lambda_{2n}^{-}}{\lambda_{1n}^{-}}\frac{\eta_2}{\eta_1} sh[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon] sh[\lambda_{1n}^{-}] + ch[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon] ch[\lambda_{1n}^{-}])},$$

$$D_{2n} = \frac{\gamma_n(\theta_n + \xi_n ch[\lambda_{1n}^{-}])}{\frac{\lambda_{2n}^{-}}{\lambda_{1n}^{-}}\frac{\eta_2}{\eta_1} sh[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon] sh[\lambda_{1n}^{-}] + ch[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon] ch[\lambda_{1n}^{-}]}.$$

Этот результат совпадает с найденным в [2] для вискозиметра, заполненного двумя несмешивающимися жидкостями.

Работа выполнена при поддержке РФФИ-Урал (№ 01-01-96424).

Литература

1. Швидковский Е.Г. Некоторые вопросы вязкости расплавленных металлов. – М.· ГИТТЛ, 1955. – 206 с.

2. Бескачко В.П., Вяткин Г.П., Писарев Н.М., Щека А.И. Влияние поверхностных пленок на результаты измерения вязкости по методу Швидковского. 1. Теория // Расплавы. – 1990.– № 6. – С. 3–8.

3. Бескачко В П., Вяткин Г.П., Писарев Н.М., Щека А.И.. Влияние поверхностных пленок на результаты измерения вязкости по методу Швидковского. 2. Численные эксперименты // Расплавы. – 1990. – № 6. – С. 9–16.

4. Бескачко В.П., Вяткин Г.П., Писарев Н.М., Хисматулин М.Б. Крутильные колебания цилиндра, заполненного проводящей жидкостью в осевом магнитном поле // Расплавы. – 1991. – № 5. – С. 31–38.

5. Бескачко В.П., Вяткин Г.П., Писарев Н.М., Хисматулин М.Б. Теория крутильного вискозиметра, помещенного в осевое магнитное поле // Магнитная гидродинамика. – 1992. – № 2. – С. 65–70.

6. Бескачко В.П., Хисматулин М.Б. Крутильный вискозиметр в осевом магнитном поле: эксперимент // Магнитная гидродинамика. – 1993. – № 1. – С. 117–122.

7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.

Поступила в редакцию 25 апреля 2003 года

Приложение

$$B_{2n} = \lambda_{1n}^{+}\lambda_{1n}^{-}\gamma_n\theta_n(\vartheta_{1n}^{-} - \vartheta_{1n}^{+})\Big\{-\lambda_{2n}^{-}sh[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon](\frac{\eta_2}{\eta_1}\vartheta_{2n}^{-} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\vartheta_{1n}^{-})ch[\lambda_{1n}^{+}] +$$

$$+\lambda_{2n}^{-}sh[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon](\frac{\eta_2}{\eta_1}\vartheta_{2n}^{-} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\vartheta_{1n}^{+})ch[\lambda_{1n}^{-}] -$$

$$-\lambda_{1n}^{+}ch[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon](\vartheta_{2n}^{-} - \vartheta_{1n}^{-})sh[\lambda_{1n}^{+}] + \lambda_{1n}^{-}ch[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon](\vartheta_{2n}^{-} - \vartheta_{1n}^{+})sh[\lambda_{1n}^{-}]\Big\} +$$

$$+\lambda_{1n}^{+}\xi_n\left\{\gamma_n + \vartheta_{1n}^{-}\frac{1}{\gamma_n}\right\}\cdot\Big\{\lambda_{2n}^{-}sh[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon](\frac{\eta_2}{\eta_1}\vartheta_{2n}^{-} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\vartheta_{1n}^{-})\lambda_{1n}^{-}\vartheta_{1n}^{+} +$$

$$+\lambda_{2n}^{-}sh[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon](\frac{\eta_2}{\eta_1}\vartheta_{2n}^{-} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\vartheta_{1n}^{+})(\lambda_{1n}^{+}\vartheta_{1n}^{-}sh[\lambda_{1n}^{-}]sh[\lambda_{1n}^{+}] - \lambda_{1n}^{-}\vartheta_{1n}^{+}ch[\lambda_{1n}^{-}]ch[\lambda_{1n}^{+}]) +$$

$$+\lambda_{1n}^{-}ch[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon](\vartheta_{2n}^{-} - \vartheta_{1n}^{+})(\lambda_{1n}^{+}\vartheta_{1n}^{-}ch[\lambda_{1n}^{-}]sh[\lambda_{1n}^{+}] - \lambda_{1n}^{-}\vartheta_{1n}^{+}sh[\lambda_{1n}^{-}]ch[\lambda_{1n}^{+}])\Big\} +$$

$$+\lambda_{1n}^{-}\xi_n\left\{\gamma_n + \vartheta_{1n}^{+}\frac{1}{\gamma_n}\right\}\cdot\Big\{\lambda_{2n}^{-}sh[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon](\frac{\eta_2}{\eta_1}\vartheta_{2n}^{-} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\vartheta_{1n}^{+})\lambda_{1n}^{+}\vartheta_{1n}^{-} +$$

$$+\lambda_{2n}^{-}sh[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon](\frac{\eta_2}{\eta_1}\vartheta_{2n}^{-} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\vartheta_{1n}^{-})(\lambda_{1n}^{-}\vartheta_{1n}^{+}sh[\lambda_{1n}^{+}]sh[\lambda_{1n}^{-}] - \lambda_{1n}^{+}\vartheta_{1n}^{-}ch[\lambda_{1n}^{+}]ch[\lambda_{1n}^{-}]) +$$

$$+\lambda_{1n}^{+}ch[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon](\vartheta_{2n}^{-} - \vartheta_{1n}^{-})(\lambda_{1n}^{-}\vartheta_{1n}^{+}ch[\lambda_{1n}^{+}]sh[\lambda_{1n}^{-}] - \lambda_{1n}^{+}\vartheta_{1n}^{-}sh[\lambda_{1n}^{+}]ch[\lambda_{1n}^{-}])\Big\}$$

$$D_{2n} = -\lambda_{1n}^{+}\lambda_{1n}^{-}\gamma_n\theta_n(\vartheta_{1n}^{-} - \vartheta_{1n}^{+})\Big\{-\lambda_{2n}^{+}sh[\lambda_{2n}^{+}\varepsilon](\frac{\eta_2}{\eta_1}\vartheta_{2n}^{+} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\vartheta_{1n}^{-})ch[\lambda_{1n}^{+}] +$$

$$+\lambda_{2n}^{+}sh[\lambda_{2n}^{+}\varepsilon](\frac{\eta_2}{\eta_1}\vartheta_{2n}^{+} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\vartheta_{1n}^{+})ch[\lambda_{1n}^{-}] -$$

$$-\lambda_{1n}^{+}ch[\lambda_{2n}^{+}\varepsilon](\vartheta_{2n}^{+} - \vartheta_{1n}^{-})sh[\lambda_{1n}^{+}] + \lambda_{1n}^{-}ch[\lambda_{2n}^{+}\varepsilon](\vartheta_{2n}^{+} - \vartheta_{1n}^{+})sh[\lambda_{1n}^{-}]\Big\} -$$

$$-\lambda_{1n}^{+}\xi_n\left\{\gamma_n + \vartheta_{1n}^{-}\frac{1}{\gamma_n}\right\}\cdot\Big\{\lambda_{2n}^{+}sh[\lambda_{2n}^{+}\varepsilon](\frac{\eta_2}{\eta_1}\vartheta_{2n}^{+} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\vartheta_{1n}^{-})\lambda_{1n}^{-}\vartheta_{1n}^{+} +$$

$$+\lambda_{2n}^{+}sh[\lambda_{2n}^{+}\varepsilon](\frac{\eta_2}{\eta_1}\vartheta_{2n}^{+} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\vartheta_{1n}^{+})(\lambda_{1n}^{+}\vartheta_{1n}^{-}sh[\lambda_{1n}^{-}]sh[\lambda_{1n}^{+}] - \lambda_{1n}^{-}\vartheta_{1n}^{+}ch[\lambda_{1n}^{-}]ch[\lambda_{1n}^{+}]) +$$

$$+\lambda_{1n}^{-}ch[\lambda_{2n}^{+}\varepsilon](\vartheta_{2n}^{+} - \vartheta_{1n}^{+})(\lambda_{1n}^{+}\vartheta_{1n}^{-}ch[\lambda_{1n}^{-}]sh[\lambda_{1n}^{+}] - \lambda_{1n}^{-}\vartheta_{1n}^{+}sh[\lambda_{1n}^{-}]ch[\lambda_{1n}^{+}])\Big\} -$$

$$-\lambda_{1n}^{-}\xi_n\left\{\gamma_n + \vartheta_{1n}^{+}\frac{1}{\gamma_n}\right\}\cdot\Big\{\lambda_{2n}^{+}sh[\lambda_{2n}^{+}\varepsilon](\frac{\eta_2}{\eta_1}\vartheta_{2n}^{+} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\vartheta_{1n}^{+})\lambda_{1n}^{+}\vartheta_{1n}^{-} +$$

$$+\lambda_{2n}^{+}sh[\lambda_{2n}^{+}\varepsilon](\frac{\eta_2}{\eta_1}\vartheta_{2n}^{+} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\vartheta_{1n}^{-})(\lambda_{1n}^{-}\vartheta_{1n}^{+}sh[\lambda_{1n}^{+}]sh[\lambda_{1n}^{-}] - \lambda_{1n}^{+}\vartheta_{1n}^{-}ch[\lambda_{1n}^{+}]ch[\lambda_{1n}^{-}]) +$$

$$+\lambda_{1n}^{+}ch[\lambda_{2n}^{+}\varepsilon](\vartheta_{2n}^{+} - \vartheta_{1n}^{-})(\lambda_{1n}^{-}\vartheta_{1n}^{+}ch[\lambda_{1n}^{+}]sh[\lambda_{1n}^{-}] - \lambda_{1n}^{+}\vartheta_{1n}^{-}sh[\lambda_{1n}^{+}]ch[\lambda_{1n}^{-}])\Big\}$$

$$\Delta = \lambda_{2n}^{+} sh[\lambda_{2n}^{+}\varepsilon]\lambda_{2n}^{-} sh[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon](\lambda_{1n}^{+}\vartheta_{1n}^{-} sh[\lambda_{1n}^{-}]ch[\lambda_{1n}^{+}] - \lambda_{1n}^{-}\vartheta_{1n}^{+} ch[\lambda_{1n}^{-}]sh[\lambda_{1n}^{+}])\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\frac{\eta_2}{\eta_1}(\vartheta_{1n}^{+}-\vartheta_{1n}^{-})(\vartheta_{2n}^{-}-\vartheta_{2n}^{+})+$$

$$+\lambda_{1n}^{+} ch[\lambda_{2n}^{+}\varepsilon]\lambda_{1n}^{-} ch[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon](\lambda_{1n}^{+}\vartheta_{1n}^{-} ch[\lambda_{1n}^{-}]sh[\lambda_{1n}^{+}] - \lambda_{1n}^{-}\vartheta_{1n}^{+} sh[\lambda_{1n}^{-}]ch[\lambda_{1n}^{+}])(\vartheta_{1n}^{+}-\vartheta_{1n}^{-})(\vartheta_{2n}^{-}-\vartheta_{2n}^{+})+$$

$$+\lambda_{2n}^{+} sh[\lambda_{2n}^{+}\varepsilon]ch[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon]\lambda_{1n}^{-}(\frac{\eta_2}{\eta_1}\vartheta_{2n}^{+} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\vartheta_{1n}^{-})\{-(\vartheta_{2n}^{-}-\vartheta_{1n}^{-})\lambda_{1n}^{+}\vartheta_{1n}^{+} +$$

$$+(\vartheta_{2n}^{-}-\vartheta_{1n}^{+})(\lambda_{1n}^{+}\vartheta_{1n}^{-} ch[\lambda_{1n}^{-}]ch[\lambda_{1n}^{+}] - \lambda_{1n}^{-}\vartheta_{1n}^{+} sh[\lambda_{1n}^{-}]sh[\lambda_{1n}^{+}])\} +$$

$$+\lambda_{2n}^{+} sh[\lambda_{2n}^{+}\varepsilon]ch[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon]\lambda_{1n}^{+}(\frac{\eta_2}{\eta_1}\vartheta_{2n}^{+} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\vartheta_{1n}^{+})\{-(\vartheta_{2n}^{-}-\vartheta_{1n}^{+})\lambda_{1n}^{-}\vartheta_{1n}^{-} +$$

$$+(\vartheta_{2n}^{-}-\vartheta_{1n}^{-})(\lambda_{1n}^{-}\vartheta_{1n}^{+} ch[\lambda_{1n}^{+}]ch[\lambda_{1n}^{-}] - \lambda_{1n}^{+}\vartheta_{1n}^{-} sh[\lambda_{1n}^{+}]sh[\lambda_{1n}^{-}])\} +$$

$$+\lambda_{2n}^{-} sh[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon]ch[\lambda_{2n}^{+}\varepsilon]\lambda_{1n}^{+}(\vartheta_{2n}^{+}-\vartheta_{1n}^{-})\left\{(\frac{\eta_2}{\eta_1}\vartheta_{2n}^{-} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\vartheta_{1n}^{-})\lambda_{1n}^{-}\vartheta_{1n}^{+} +\right.$$

$$\left.+(\frac{\eta_2}{\eta_1}\vartheta_{2n}^{-} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\vartheta_{1n}^{+})(\lambda_{1n}^{+}\vartheta_{1n}^{-} sh[\lambda_{1n}^{-}]sh[\lambda_{1n}^{+}] - \lambda_{1n}^{-}\vartheta_{1n}^{+} ch[\lambda_{1n}^{-}]ch[\lambda_{1n}^{+}])\right\} +$$

$$+\lambda_{2n}^{-} sh[\lambda_{2n}^{-}\varepsilon]ch[\lambda_{2n}^{+}\varepsilon]\lambda_{1n}^{-}(\vartheta_{2n}^{+}-\vartheta_{1n}^{+})\left\{(\frac{\eta_2}{\eta_1}\vartheta_{2n}^{-} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\vartheta_{1n}^{+})\lambda_{1n}^{+}\vartheta_{1n}^{-} +\right.$$

$$\left.+(\frac{\eta_2}{\eta_1}\vartheta_{2n}^{-} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\vartheta_{1n}^{-})(\lambda_{1n}^{-}\vartheta_{1n}^{+} sh[\lambda_{1n}^{+}]sh[\lambda_{1n}^{-}] - \lambda_{1n}^{+}\vartheta_{1n}^{-} ch[\lambda_{1n}^{+}]ch[\lambda_{1n}^{-}])\right\}$$