УДК 517.948

ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПО ПОРЯДКУ МЕТОДА НЕВЯЗКИ НА НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ РАВНОМЕРНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

В.П. Танана, Н.М. Япарова

В статье исследуется оптимальность по порядку метода невязки для специального класса решений операторных уравнений в гильбертовых пространствах.

Постановка задачи

Пусть A – инъективный линейный ограниченный оператор, отображающий гильбертово пространство H в H. Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = f, \qquad u, f \in H. \tag{1}$$

Предположим, что при $f=f_0$ существует точное решение u_0 уравнения (1), но вместо f_0 известны некоторые приближения $f_\delta \in H$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\|f_\delta - f_0\| < \delta$. Требуется по (f_δ, δ) построить приближенное решение u_δ уравнения (1), наиболее близкое к точному.

Определение. *Методом решения поставленной задачи будем называть семейство непрерывных на H отображений* $\{T_\delta : 0 < \delta \le \delta_0\}$ *с областью определения* $D(T_\delta) = H$ *и областью значений* $R(T_\delta) \subset H$, *для которых существует множество* $M \subset H$ *такое, что для любого* $u_0 \in M$ *при* $f_\delta \in H$ *и* $\|f_\delta - Au_0\| \le \delta$ *выполнено*

$$\lim_{\delta \to 0} \|u_0 - T_\delta f_\delta\| = 0. \tag{2}$$

Пусть $M_1 \subset M$. Следуя [5], [6] с.114, определим на M_1 модуль непрерывности $w(\tau, M_1)$ обратного оператора A^{-1} в нуле:

$$w(\tau, r) = \sup_u \{\|u\| : u \in M_r, \|Au\| \le \tau\}.$$

Определение. *Множество M_1 будем называть классом равномерной регуляризации для уравнения (1), если*

$$\lim_{\tau \to +0} w(\tau, M_1) = 0. \tag{3}$$

Пусть M_1 – класс равномерной регуляризации для уравнения (1). Определим количественную характеристику точности $\Delta(T_\delta)$ метода из семейства $\{T_\delta : 0 < \delta \le \delta_0\}$ на этом классе

$$\Delta(T_\delta) = \sup_{u_0 \in M_1} \sup_{f_\delta \in H} \{\|u_0 - T_\delta f_\delta\| : u_0 \in M_1, \|f_\delta - Au_0\| \le \delta\}. \tag{4}$$

Определение. *Метод T_{opt} называют оптимальным на классе M_1, если выполнено:*

$$\Delta(T_{opt}) = \inf\{\Delta(T_\delta) : T_\delta \in \{T_\delta : 0 < \delta \le \delta_0\}\}. \tag{5}$$

Лемма 1. *Для любого метода* $\{T_\delta : 0 < \delta \le \delta_0\}$ *справедлива оценка* [7]

$$\Delta(T_\delta) \ge w(\delta, M_1). \tag{6}$$

Определение. *Метод* $\overline{T}_\delta \in \{T_\delta : 0 < \delta \le \delta_0\}$ *назовем оптимальным по порядку на классе равномерной регуляризации M_1, если существует величина l_1 такая, что при $\delta \to 0$, $0 < \delta \le \delta_0$ выполнено*

$$\Delta(\overline{T}_\delta) \le l_1 w(\delta, M_1). \tag{7}$$

Метод невязки

Метод невязки, следуя [1],[2], заключается в сведении задачи приближенного решения уравнения (1) к вариационной задаче

$$\inf\left\{\|u\| : u \in H, \|Au - f_\delta\| \le b\sqrt{\delta}\right\} \quad b \ge 1. \tag{8}$$

В работе [2] доказано существование и единственность решения задачи (8), которое обозначается через u_δ, а в [3], что при выполнении условия

$$\|f_\delta\| > b\sqrt{\delta}, \tag{9}$$

риближенное решение примет вид:

$$u_\delta(\alpha) = (A^*A + \alpha(\delta)E)^{-1}A^* f_\delta\ , \tag{10}$$

де $\alpha(\delta)$ - положительный параметр, удовлетворяющий уравнению

$$\left\|A(A^*A + \alpha(\delta)E)^{-1}A^* f_\delta - f_\delta\ \right\| = b\sqrt{\delta}\ . \tag{11}$$

Далее алгоритм, который ставит исходным данным (f_δ, δ) в соответствие решение u_δ вариационной задачи (8) обозначим через $\hat{T}_\delta$ и определим формулой:

$$\hat{T}_\delta f_\delta = \begin{cases} u_\delta\ , & \|f_\delta\| > b\sqrt{\delta}\ , \\ 0\ , & \|f_\delta\| \le b\sqrt{\delta}\ . \end{cases} \tag{12}$$

Оценка погрешности метода $\hat{T}_\delta$

Пусть B – линейный ограниченный оператор. Предполагается, что для $f=f_0$ точное решение u_0 принадлежит некоторому классу $M_r = B\overline{S}_r$, где $\overline{S}_r = \{v : v \in H, \|v\| < r\}, \sqrt{B^*B} = g([A^*A]^{1/2})$ и при $\sigma \to 0$ выполнено

$$g(\sigma) \sim \ln^{-q}\frac{1}{\sigma},\quad q > 0, \tag{13}$$

где $\sigma \in Sp(\sqrt{A^*A})$. Предположим, что $Sp(\sqrt{A^*A})$ совпадает с отрезком $[0, \|A\|]$, и существуют положительные числа q, a, l_2, l_3 такие, что для $\sigma \in [0, \|A\|]$ при $a>\|A\|$ выполнено

$$l_2 \ln^{-q}\frac{a}{\sigma} \le g(\sigma) \le l_3 \ln^{-q}\frac{a}{\sigma}. \tag{14}$$

При выполнении этих условий класс M_r будет классом равномерной регуляризации. Определим на M_r модуль непрерывности $w_1(\tau, M_r)$ обратного оператора A^{-1}:

$$w_1(\tau, r) = \sup_u\{\|u_1 - u_2\| : u_1, u_2 \in M_r, \|Au_1 - Au_2\| \le \tau\}.$$

Для вычисления $w_1(\tau, M_r)$ в [5] использован соответствующий модуль непрерывности в нуле $w(\tau, r)$. Сформулируем некоторые известные свойства функции $w(\tau, r)$ [10, с.12]:

Лемма 2. *Пусть A – линейный оператор, тогда* $w_1(\tau, r) = w(\tau, 2r)$.

Лемма 3. *Функция $w(\tau, r)$ непрерывна и не убывает по τ и r, и она строго возрастает при условии, что $\tau \le \|AB\|r$,* [9,с.145].

Используя результаты [6, с. 147], и (14), можем записать, что

$$l_2 r \ln^{-q}\frac{ar}{\tau} \le w(\tau, r) \le 2l_3 r\left(\frac{3}{2}\right)^q \ln^{-q}\frac{ar}{\tau}. \tag{15}$$

Пусть $\alpha(\delta)$ удовлетворяет уравнению (11). Оценим уклонение приближенного решения $u_\delta(\alpha)$ от точного на классе M_r. Для этого рассмотрим следующие величины: $\|R_\alpha\|$ и

$$\Delta_1(\alpha) = \sup\{\|u_0 - R_\alpha A u_0\| : u_0 \in M_r\}, \tag{16}$$

где $R_\alpha = (A^*A + \alpha E)^{-1}A^*$. Следуя [11, с. 133] получим следующее равенство:

$$\|R_\alpha\| = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}. \tag{17}$$

Лемма 4. *Пусть a>1, тогда существуют числа l_4 и l_5 такие, что при достаточно малых значениях α*

$$l_4 \ln^{-q}\frac{1}{\alpha} \le \Delta_1(\alpha) \le l_5 \ln^{-q}\frac{1}{\alpha}. \tag{18}$$

Доказательство. Из формул (10), (15), (18) следует, что

$$l_2^2 r^2 \sup_{\sigma\in(0,\|A\|]}\left[\left(\frac{\alpha}{\alpha+\sigma^2}\right)^2 \ln^{-2q}\frac{a}{\sigma}\right] \le \Delta_1^2(\alpha) \le l_3^2 r^2 \sup_{\sigma\in(0,\|A\|]}\left[\left(\frac{\alpha}{\alpha+\sigma^2}\right)^2 \ln^{-2q}\frac{a}{\sigma}\right]. \tag{19}$$

Сначала получим оценку снизу. Для этого рассмотрим значения $\sigma_* = \sqrt{\alpha}$. Учитывая формулу (19), получим, что тогда

$$\Delta_1(\alpha) \ge l_3 r\ \frac{\alpha}{\alpha+\sigma_*^2}\ln^{-q}\frac{a}{\sigma_*}. \tag{20}$$

при значениях α таких, что $\alpha \le \frac{1}{a^2}$, следует, что

$$\frac{\alpha}{\alpha+\sigma_*^2}\ln^{-q}\frac{a}{\sigma_*} \ge \frac{1}{2\alpha}\ln^{-q}\frac{1}{\alpha}, \tag{21}$$

а из (20), (21) при $\alpha \le \frac{1}{a^2}$ получим, что

$$\frac{l_2}{2} r \ln^{-q}\frac{1}{\alpha} \le \Delta_1(\alpha). \tag{22}$$

Теперь перейдем к оценке сверху. Введем функцию

$$y(\sigma) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\alpha+\sigma^2}\ln^{-q}\dfrac{a}{\sigma}, & \sigma>0, \\ 0, & \sigma = 0 \end{cases}, \tag{23}$$

которая непрерывна и неотрицательна на $[0,\|A\|\ ]$. Тогда существует $\overline{\sigma}(\alpha)$, на котором функция $y(\sigma)$ достигает наибольшего значения.

Предположим, что $y(\sigma)$ достигает наибольшего значения в точке локального максимума $\hat{\sigma}(\alpha)$. Оценим значение $y(\sigma)$ в точке $\hat{\sigma}(\alpha)$. Заметим, что при любом $\sigma \in (0,\|A\|)$ эта функция является дифференцируемой, тогда при $\sigma = \hat{\sigma}(\alpha)$ должно выполняться:

$$\frac{2\hat{\sigma}}{\alpha+\hat{\sigma}^2} = \frac{q}{\hat{\sigma}\ln{}^{a}/_{\sigma}}.$$

Вторая производная от функции $y(\sigma)$ в точке $\hat{\sigma}(\alpha)$ имеет вид

$$y''(\hat{\sigma}) = \frac{4y}{(\alpha+\hat{\sigma}^2)^2}(\hat{\sigma}^2-\alpha).$$

и при любом $\sigma > \sqrt{\alpha}$ она положительна, следовательно, точка максимума должна удовлетворять условию

$$\begin{cases} \hat{\sigma} \le \sqrt{\alpha} \\ \dfrac{2\hat{\sigma}}{\alpha+\hat{\sigma}^2} = \dfrac{q}{\hat{\sigma}\ln{}^{a}/_{\sigma}} \end{cases}.$$

Но при любом $\sigma \le \sqrt{\alpha}$ и $a > 1$, имеем $\frac{a}{\sigma} > \frac{1}{\sigma} \ge \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, следовательно, $\ln\frac{a}{\overline{\sigma}} > \ln\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\alpha}$.

Отсюда имеем, что $\ln^{-q}\frac{a}{\hat{\sigma}} < 2^q \ln^{-q}\frac{1}{\alpha}$. А так как $\frac{\alpha}{\alpha+\sigma^2} < \frac{\alpha}{\alpha} = 1$ при любом значении σ, то имеет место следующая оценка при $\sigma \le \sqrt{\alpha}$

$$l_3 r\frac{\alpha}{\alpha+\hat{\sigma}^2}\ln^{-q}\frac{a}{\hat{\sigma}}\le 2^q l_3\ln^{-q}\frac{1}{\alpha}. \tag{24}$$

Предположим, что функция $y(\sigma)$ достигает своего наибольшего значения либо при $\sigma\to 0$, либо при $\sigma=\|A\|$. Но при $\sigma\to 0$ функция $y(\sigma)=0$. Остается исследовать случай, когда $\overline{\sigma}=\|A\|$. Для этого рассмотрим величину

$$\frac{\dfrac{\alpha}{\alpha+\overline{\sigma}^2}\ln^{-q}\dfrac{a}{\overline{\sigma}}}{\ln^{-q}\dfrac{1}{\alpha}}=\frac{\alpha\ln^q\dfrac{1}{\alpha}}{(\alpha+\overline{\sigma}^2)\ln^q\dfrac{a}{\overline{\sigma}}}=\frac{\alpha\ln^q\dfrac{1}{\alpha}}{(\alpha+\|A\|^2)\ln^q\dfrac{a}{\|A\|}}. \tag{25}$$

Покажем, что это - ограниченная величина. Из того, что $\alpha\to 0$ следует, что найдется число K, такое, что

$$(\alpha+\|A\|^2)\ln^{-q}\frac{a}{\|A\|}=K. \tag{26}$$

Отсюда при $\alpha\to 0$ имеем

$$\frac{\alpha\ln^q\dfrac{1}{\alpha}}{(\alpha+\|A\|^2)\ln^q\dfrac{a}{\|A\|}}\to 0, \tag{27}$$

Таким образом, из (27) следует, что существует число l_5, такое, что

$$\frac{\alpha}{\alpha+\overline{\sigma}^2}\ln^{-q}\frac{a}{\overline{\sigma}}\le l_5\ln^{-q}\frac{1}{\alpha}. \tag{28}$$

Из (19), (22), (24),(28) следует утверждение леммы.

На основании этой леммы получен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть* $a\ge 1$, $r\ge 1$, $\delta\le\delta_1$, $\overline{\alpha}=\delta$. *Пусть метод* $R_\delta=(A^*A+\delta E)^{-1}A^*$, *тогда метод* R_δ *оптимален по порядку на классе* M_r.

Доказательство. Пусть $u_0\in M_r$. Пусть $\Delta_1(\alpha)$ определена формулой (16), а $u_\delta(\alpha)$ формулой (10), тогда

$$\|u_\delta(\alpha)-u_0\|\le\Delta_1(\alpha)+\|R_\alpha\|\delta. \tag{29}$$

Из леммы 4 и формул (17), (29) следует, что

$$\|u_\delta(\alpha)-u_0\|\le l_5 r\ln^{-q}\frac{1}{\alpha}+\frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}}. \tag{30}$$

Пусть $\overline{\alpha}=\delta$ и существует $\delta_0\ge\delta>0$ тогда из (30) и свойств логарифма получим, что при $\delta\to 0$ выполнено

$$\|u_\delta(\alpha)-u_0\|\le\left(l_5+\frac{1}{2}\right)r\ln^{-q}\frac{1}{\alpha}. \tag{31}$$

Если $a\ge 1$, $r\ge 1$, то из (31) будет следовать существование $\delta_1\le\delta_0$ такого, что при $\delta\le\delta_1$

$$\|u_\delta(\alpha)-u_0\|\le 2^q\left(l_5+\frac{1}{2}\right)r\ln^{-q}\frac{ar}{\delta},$$

а отсюда формул (15), (30) и леммы 1 будет следовать оптимальность по порядку метода R_δ, т.е. утверждение леммы.

Пусть $\overline{\alpha}=\delta$. Перейдем к оценке невязки $\|Au_\delta(\overline{\alpha})-f_\delta\|$ приближенного решения $u_\delta(\overline{\alpha})$, заданного формулой (10). Покажем, что при таком выборе параметра регуляризации невязка будет удовлетворять неравенству (8).

Лемма 5. *Для любого значения* $\alpha>0$ *при* $\delta<1$ *выполняется соотношение:*

$$\|AR_{\overline{\alpha}}f_0-AR_{\overline{\alpha}}f_\delta\|\le\delta. \tag{32}$$

Доказательство. Имеет место следующая оценка

$$\left\|AR_{\overline{\alpha}}f_0 - AR_{\overline{\alpha}}f_\delta\right\| \le \left\|A(A^*A+\alpha E)^{-1}A^*\right\|\delta. \quad (33)$$

Так как A^*A и $(A^*A+\alpha E)^{-1}$ - ограниченные, самосопряженные, положительные операторы, то на основании результатов, доказанных в [10 с. 39], имеем, что

$$\left\|A(A^*A+\alpha E)^{-1}A^*\right\| = \left\|AA^*(A^*A+\alpha E)^{-1}\right\| = \sup_{\sigma\in[0,\|A\|]}\frac{\sigma^2}{\sigma^2+\alpha} \le 1.$$

Отсюда получаем утверждение леммы.

Лемма 6. *Пусть a>1, $u_0 \in M_r$. Тогда существует число l_6>0 такое, что при достаточно малых значениях α выполнено*

$$\left\|AR_{\overline{\alpha}}f_0 - f_0\right\| \le l_6 r\sqrt{\alpha}\ln^{-q}\frac{1}{\alpha}. \quad (34)$$

Доказательство. Подставим $Au_0 = f_0$ в левую часть неравенства(34), получим

$$\left\|AR_{\overline{\alpha}}f_0 - f_0\right\| = \alpha\left\|A(A^*A+\alpha E)^{-1}u_0\right\|. \quad (35)$$

Из того, что $u_0 = Bv_0$, где $\|v_0\| \le r$, имеем

$$\alpha\left\|A(A^*A+\alpha E)^{-1}u_0\right\| = \alpha\left\|A(A^*A+\alpha E)^{-1}Bv_0\right\|. \quad (36)$$

На основании результатов, сформулированных в [7] с.39 (лемма(1)),следует, что

$$\alpha\left\|A(A^*A+\alpha E)^{-1}Bv_0\right\| = \alpha\left\|AA^*(A^*A+\alpha E)^{-1}Bv_0\right\|.$$

Используя то, что $\sqrt{B^*B} = g(\sqrt{A^*A})$ и то, что для $\forall\sigma \in Sp(\sqrt{A^*A})$ выполнено неравенство (14), получим

$$\left\|AR_{\overline{\alpha}}f_0 - f_0\right\| \le l_3\alpha\, r \sup_{\sigma\in[0,\|A\|]}\frac{\sigma\ln^{-q}\frac{a}{\sigma}}{\alpha+\sigma^2}. \quad (37)$$

Оценим правую часть неравенства. Из непрерывности на отрезке $[0,\|A\|]$функции

$$\frac{\sigma}{\alpha}y(\sigma) = \frac{\sigma\ln^{-q}\frac{a}{\sigma}}{\alpha+\sigma^2}, \quad (38)$$

где $y(\sigma)$ определена формулой (23), следует, что существует значение $\overline{\sigma}(\alpha)$, в котором эта функция достигает своего наибольшего значения. Проводя рассуждения, аналогичные доказательству леммы 4, и используя оценки (24), (28) получаем, что для функции, определенной формулой (38) существует число l_6 такое, что

$$\sup_{\sigma\in[0,\|A\|]}\frac{\sigma\ln^{-q}\frac{a}{\sigma}}{\alpha+\sigma^2} \le l_6\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\ln^{-q}\frac{1}{\alpha}.$$

Отсюда и (37) следует утверждение леммы.

Лемма 7. *Пусть a>1, $u_0 \in M_r$ $\overline{\alpha}(\delta) = \delta$, тогда при достаточно малых значениях $\delta < 1$ выполнено*

$$\left\|Au_\delta(\overline{\alpha}) - f_\delta\right\| \le 3\sqrt{\delta}.$$

Доказательство. Для невязки имеет место следующая оценка

$$\left\|Au_\delta(\overline{\alpha}) - f_\delta\right\| \le \delta + \left\|AR_{\overline{\alpha}}f_0 - f_0\right\| + \left\|AR_{\overline{\alpha}}f_0 - AR_{\overline{\alpha}}f_\delta\right\|. \quad (39)$$

Оценим второе слагаемое в правой части неравенства. Из леммы 6 при $\overline{\alpha}(\delta) = \delta$ имеем, что

$$\left\|AR_{\overline{\alpha}}f_0 - f_0\right\| \le l_6 r\sqrt{\delta}\ln^{-q}\frac{1}{\delta}.$$

Так как при $\delta \to 0$ величина $\ln^{-q}\frac{1}{\delta} \to 0$, то найдется значение δ_0 такое, что для любого $\delta \le \delta_0$ будет выполнено

$$\ln^{-q}\frac{1}{\delta}<\frac{l_6}{r}.$$

аким образом,

$$\left\|AR_{\overline{\alpha}}f_0-f_0\right\|\leq\sqrt{\delta}.$$

тсюда, леммы 5 и неравенства (39) следует, что при $\delta<1$

$$\left\|Au_\delta(\overline{\alpha})-f_\delta\right\|\leq 3\sqrt{\delta}. \quad \textbf{(40)}$$

з результатов доказанной леммы следует, что в формуле (11) следует положить b=3.

Лемма 8. *Пусть множество значений для операторов A и A^* всюду плотны в H, элемент $_\delta(\alpha)$ определен формулой (10). Тогда невязка $\left\|Au_\delta(\alpha)-f_\delta\right\|$ строго возрастает по α.*

Доказательство. Из леммы 1, приведенной в [9], следует, что при выполнении вышеуказанных условий для оператора A существует полярное разложение

$$A=Q\sqrt{A^*A}, \quad (41)$$

е Q – унитарный оператор. Так как для унитарного оператора выполнено $Q^*=Q^{-1}$, то, подставив невязку представление (41), получим, что

$$\left\|Au_\delta(\alpha)-f_\delta\right\|^2=\alpha\left\|A^*A+\alpha E)^{-1}Q^{-1}f_\delta\right\|^2. \quad \textbf{(42)}$$

Используем семейство $\{E_\sigma,\sigma\in[0,\|A\|]\}$ – разложение единицы, порожденное оператором $\sqrt{A^*A}$, тогда в невязке получим, что

$$\left\|Au_\delta(\alpha)-f_\delta\right\|^2=\int\limits_0^{\|A\|}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\sigma^2}\right)^2 d\left(E_\sigma Q^{-1}f_\delta,Q^{-1}f_\delta\right). \quad (43)$$

Так как производная по $\left[\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+\sigma^2}\right)^2\right]'_\alpha$ при $\sigma\neq 0$ положительна, то из формулы (43) следует трогое возрастание по α невязки $\left\|Au_\delta(\alpha)-f_\delta\right\|$.

Лемма 9. *Пусть значения параметра $\hat{\alpha}(\delta)$ определены формулой (11), $\overline{\alpha}(\delta)=\delta$, тогда праведливо соотношение*

$$\overline{\alpha}(\delta)\leq\hat{\alpha}(\delta).$$

Доказательство. Так как из (10) и (40) следует, что $\left\|Au_\delta(\hat{\alpha})-f_\sigma\right\|=9\delta$, а $\left\|Au_\delta(\overline{\alpha})-f_\sigma\right\|\leq 9\delta$, то из леммы 8 следует выполнение утверждения данной леммы.

Лемма 10. *Пусть $u_0\in M_r$, а $\left\|f_\delta\right\|>3\sqrt{\delta}$, тогда существует число l_7>0 такое, что*

$$\left\|u_\delta(\hat{\alpha})-u_0\right\|\leq l_7 w(\delta,r).$$

Доказательство. Обозначим $R_{\hat{\alpha}}f_0=u_0(\hat{\alpha})$. Из (10) следует, что

$$\left\|Au_\delta(\hat{\alpha})-Au_0(\hat{\alpha})\right\|^2\leq\delta^2\left\|A(A^*A+\hat{\alpha}E)^{-1}A^*\right\|^2. \quad (44)$$

Из результатов, сформулированных в [7, с. 39] следует, что

$$\left\|A(A^*A+\hat{\alpha}E)^{-1}A^*\right\|^2=\left\|AA^*(A^*A+\hat{\alpha}E)^{-1}\right\|^2, \quad (45)$$

а для правой части (45) выполнено

$$\left\|AA^*(A^*A+\hat{\alpha}E)^{-1}\right\|^2\leq\sup_{\sigma\in[0,\|A\|]}\left(\frac{\sigma^2}{\alpha+\sigma^2}\right)^2\leq 1. \quad (46)$$

Таким образом, из (45), (46) следует, что для левой части (44) выполнено

$$\left\|Au_\delta(\hat{\alpha})-Au_0(\hat{\alpha})\right\|^2\leq\delta^2. \quad (47)$$

Перейдем к оценке $\left\|u_\delta(\hat{\alpha})-u_0\right\|$. Если в (11) величина b=3, то получим, что

$$\left\|Au_\delta(\hat{\alpha})-f_\delta\right\|=3\sqrt{\delta}. \quad (48)$$

Из (47) и (48) имеем, что

$$\|Au_0(\hat{\alpha}) - f_\delta\| \le 4\sqrt{\delta}\,. \tag{49}$$

Отсюда получаем, что

$$\|Au_0(\hat{\alpha}) - Au_0\| \le 5\sqrt{\delta}\,. \tag{50}$$

Оценим норму элемента $v_0(\hat{\alpha})$, где $Bv_0(\hat{\alpha}) = u_0(\hat{\alpha})$.

$$\|v_0(\hat{\alpha})\|^2 \le \frac{l_3^2}{l_2^2}\int_0^{\|A\|}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\sigma^2}\right)^2 d(E_\sigma v_0, v_0), \tag{51}$$

где $\{E_\sigma, \sigma \in [0, \|A\|]\}$ - разложение единицы, порожденное оператором $\sqrt{A^* A}$. Из (51) следует, что

$$\|v_0(\hat{\alpha})\| \le \frac{l_3}{l_2} r, \tag{52}$$

А из (50), (52) и леммы 2 следует, что

$$\|u_\delta(\hat{\alpha}) - u_0\| \le w\left(5\sqrt{\delta}, \frac{2l_3}{l_2} r\right). \tag{53}$$

Из (17) и (29) имеем:

$$\|u_\delta(\hat{\alpha}) - u_0(\hat{\alpha})\| \le \frac{\delta}{2\sqrt{\hat{\alpha}}}. \tag{54}$$

На основании леммы 9 и формулы (54) получим

$$\|u_\delta(\hat{\alpha}) - u_0(\hat{\alpha})\| \le \sqrt{\delta}\,. \tag{55}$$

Из формул (15), (17), (53) и леммы 3 вытекает, что при достаточно малых значениях δ

$$\|u_\delta(\hat{\alpha}) - u_0\| \le 2l_3 3^q\left(5 + \frac{2l_3}{l_2}\right) r \ln^{-q}\frac{ar}{\delta} \le l_3 3^{q+1}\left(5 + \frac{2l_3}{l_2}\right) r \ln^{-q}\frac{ar}{\delta}. \tag{56}$$

Отсюда и из формулы (15) следует утверждение леммы.

Теорема 2. *Метод $\hat{T}_\delta$ оптимален по порядку на классе M_r.*

Доказательство следует из лемм 3, 10, формулы (15). Случай, когда $\|f_\delta\| \le 3\sqrt{\delta}$ очевиден.

Работа поддержана грантом РФФИ №01-01-00300.

Литература

1. Иванов В.К. О приближенном решении операторных уравнений первого рода // *Журн. вычислит. мат. и мат. физ.* – 1966. – Т. 6. – № 6. – С.1089–1094

2. Васин В.В., Танана В.П. Приближенное решение операторных уравнений первого рода // *Мат. записки Уральск. ун-та.* – 1968. – Т. 6. – № 2. – С. 27–37.

3. Васин В.В. О связи некоторых вариационных методов приближенного решения некорректных задач // *Мат. заметки.* – 1970. – Т. 7. – № 3. – С. 265–272.

4. Танана В.П. О классификации некорректно поставленных задач и оптимальных методах их решения // *Изв.вузов. Математика.* – 1977. – № 11. – С. 106–112.

5. Иванов В.К., Королюк Т.И. Об оценке погрешности при решении некорректных задач // *Журн. вычислит. мат. и мат. физ.* – 1969. – Т. 9. – № 1. – С. 30–41.

6. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и её приложения. – М.: Наука, 1978.

7. Танана В.П. Методы решения операторных уравнений. –М.: Наука, 1981.

8. Танана В.П., Рекант М.А., Янченко С.И. Оптимизация методов решения операторных уравнений // Свердловск: Изд-во Уральск. ун-та, 1987.

9. Менихес Л.Д., Танана В.П. Конечномерная аппроксимация в методе М.М. Лаврентьева. // *Сиб. ЖВМ.* – 1998. – Т. 1. – № 1. – С. 59–66.

Поступила в редакцию 10 апреля 2003 года