УДК 512.552.7

КЛАССОВЫЕ КОЛЬЦА ХАРАКТЕРОВ ГРУПП ЯНКО

Е.Ш. Сабирзянова

В работе описаны группы центральных единиц целочисленных групповых колец спорадических групп Янко. Все исходные данные берутся из таблиц характеров, содержащихся в системе GAP.

В работе [1] было введено понятие классового кольца характера группы и была показана важность изучения таких колец для нахождения центральных единиц целочисленных групповых колец. Спорадические группы занимают особое положение в конечных группах [3] и поэтому важно и интересно изучение классовых колец характеров таких групп. Будем использовать подходы и основные обозначения из [1], а информацию о характерах и их нумерацию возьмем из [2].

Для начала рассмотрим наиболее простой случай – группу J_2.

Теорема А1. *Классовым кольцом неприводимого характера для группы* J_2 *является одно из следующих колец:* $\boldsymbol{Z}$; $\boldsymbol{Z}+2^4 3^3\omega\boldsymbol{Z}$; $\boldsymbol{Z}+2^5 3\omega\boldsymbol{Z}$; $\boldsymbol{Z}+2^4 3^2\omega\boldsymbol{Z}$; $\boldsymbol{Z}+2^5\omega\boldsymbol{Z}$; $\boldsymbol{Z}+3^2\omega\boldsymbol{Z}$, *где* $\omega=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Доказательство. Поскольку множества значений алгебраически сопряженных характеров совпадают, то ограничимся $\chi_j\in \mathrm{Irr}(J_2,\mathrm{alc})$. Каждому характеру χ_j сопоставим строку чисел $\{\dfrac{\chi_j(x_i)\cdot|x_i^G|}{\deg\chi_j}, x_i\in X(J_2)\}$, каждое из которых является целым алгебраическим и где $X(J_2)$ – система представителей классов сопряженности группы. Согласно замечанию 2 из [1] данные элементы порождают классовое кольцо характера χ_j.

$\chi_2\rightarrow(2^4 3^2A;\ 2^4 3^2A^*;\ 2^5 3^3E;\ 2^5 3^3E^*:\ 2^4 3^3 5G;\ 2^4 3^3 5G^*;\ -2^5 3^3 5G;\ -2^5 3^3 5G^*)=2^4 3^3(-\omega+1;\ \omega;\ 2\omega+2;\ -2\omega+4;\ 5\omega-5;\ -5\omega;\ -10\omega+10;\ 10\omega)$, то есть данному характеру соответствует кольцо $\boldsymbol{Z}+2^4 3^3\omega\boldsymbol{Z}$.

$\chi_4\rightarrow(2^5 3B;\ 2^5 3B^*;\ 2^6 3^2F;\ 2^6 3^2F^*;\ 2^5 3^2 5G;\ 2^5 3^2 5G^*;\ -2^7 3\cdot 5G;\ -2^7 3\cdot 5G^*)=2^5 3(\omega+3;\ -\omega+4;\ -12\omega+12;\ 12\omega;\ 15\omega-15;\ -15\omega;\ 20\omega;\ -20\omega+20)$, и получаем кольцо $\boldsymbol{Z}+2^5 3\omega\boldsymbol{Z}$.

$\chi_8\rightarrow(2^4 3^2C/5;\ 2^4 3^2C^*/5;\ -2^4 3^3G;\ -2^4 3^3G^*;\ 2^6 3^2G;\ 2^6 3^2G^*)=2^4 3^2(-\omega+1;\ \omega;\ -3\omega+3;\ 3\omega;\ 4\omega-4;\ -4\omega)$, и поэтому данному характеру соответствует кольцо $\boldsymbol{Z}+2^4 3^2\omega\boldsymbol{Z}$.

$\chi_{14}\rightarrow(2^5A/3;\ 2^5A^*/3;\ 2^6E;\ 2^6E^*;\ 2^5 5G;\ 2^5 5G^*;\ 2^6 5G;\ 2^6 5G^*)=2^5(-\omega+1;\ \omega;\ 2\omega+2;\ -2\omega+4;\ 5\omega-5;\ -5\omega;\ 10\omega-10;\ -10\omega)$, то есть получили кольцо $\boldsymbol{Z}+2^5\omega\boldsymbol{Z}$.

$\chi_{16}\rightarrow(3^2D;\ 3^2D^*;\ -2\cdot 3^3F;\ -2\cdot 3^3F^*;\ -2^2 3^2 5G^*;\ -2^2 3^2 5G)=3^2(4\omega-3;\ -4\omega+1;\ 12\omega-12;\ -12\omega;\ 20\omega;\ -20\omega+20)$, и получаем кольцо $\boldsymbol{Z}+3^2\omega\boldsymbol{Z}$. Для остальных характеров в силу сопряженности классовое кольцо будет совпадать с одним из вышеперечисленных либо это просто $\boldsymbol{Z}$. Что и требовалось доказать.

Теорема В1. *Для классового кольца K характера обозначим через* U(K) *его группу единиц. Тогда для группы* J_2 *имеем:*

$U(\boldsymbol{Z}+2^5 3\omega\boldsymbol{Z})=\langle -1\rangle\times\langle\omega^{24}\rangle$;
$U(\boldsymbol{Z}+2^4 3^2\omega\boldsymbol{Z})=\langle -1\rangle\times\langle\omega^{12}\rangle$;
$U(\boldsymbol{Z}+2^5\omega\boldsymbol{Z})=\langle -1\rangle\times\langle\omega^{24}\rangle$;
$U(\boldsymbol{Z}+2^4 3^3\omega\boldsymbol{Z})=\langle -1\rangle\times\langle\omega^{36}\rangle$;
$U(\boldsymbol{Z}+3^2\omega\boldsymbol{Z})=\langle -1\rangle\times\langle\omega^{12}\rangle$.

Доказательство. Известно, что $\omega^K=f_{K-1}+f_K\omega$. Если $\omega^t=a+2^5b\omega$ и $\omega^p=c+3d\omega$, то $\omega^K=m+2^5 3n\omega$, где $k=\text{НОК}(t,p)$. Поэтому для доказательства первого утверждения ищем числа Фибоначчи, сравнимые с нулем по модулю 2^5 и 3. Непосредственное вычисление дает следующее· $f_{24}\equiv 0 \pmod{2^5}$ и $f_4\equiv 0 \pmod 3$. Значит $k=\text{НОК}(24,4)=24$.

Другие утверждения получаются аналогично. Что и требовалось доказать.

Теорема А2. *Классовым кольцом неприводимого характера для группы* J_1 *является одно из следующих колец:* Z; $Z+11\cdot 19\omega Z$; $Z+2^2 19\omega Z$; $Z+2^2 11\omega Z$; $Z+7\cdot 11\cdot C\cdot Z+7\cdot 11\cdot E\cdot Z$, *где* $C=\varepsilon(19)+\varepsilon(19)^7+\varepsilon(19)^8+\varepsilon(19)^{11}+\varepsilon(19)^{12}+\varepsilon(19)^{18}$, $E=\varepsilon(19)^2+\varepsilon(19)^3+\varepsilon(19)^5+\varepsilon(19)^{14}+\varepsilon(19)^{16}+\varepsilon(19)^{17}$.

Доказывается аналогично теореме А1.

Теорема В2. *Для группы* J_1 *выполняется*:

$U(Z+11\cdot 19\omega Z)=\langle -1\rangle\times\langle\omega^{90}\rangle$;

$U(Z+2^2 19\omega Z)=\langle -1\rangle\times\langle\omega^{18}\rangle$;

$U(Z+2^2 11\omega Z)=\langle -1\rangle\times\langle\omega^{30}\rangle$;

$U(Z+7\cdot 11\cdot C\cdot Z+7\cdot 11\cdot E\cdot Z)=\langle -1\rangle\times\langle(2+C)^{30}\rangle\times\langle(2+E)^{30}\rangle$.

Доказательство. Первые три утверждения доказываются аналогично теореме В1, а последнее получается анализом степеней чисел 2+C и 2+E, которые являются фундаментальными единицами соответствующего поля характера.

И, наконец, разберем случай группы J_3.

Теорема А3. *Классовым кольцом характеров для группы* J_3 *является одно из следующих колец:* Z; $Z+2^6 3^4\omega Z$; $Z+2^5 3^3\omega Z$; $Z+2^6 19\sqrt{17}Z$; $Z+\sqrt{-19}\cdot 2^6 3^5 Z$; $Z+3\cdot 17\cdot 19C\cdot Z+3\cdot 17\cdot 19D\cdot Z$, *где*

$C=-\varepsilon(9)^2+\varepsilon(9)^4+\varepsilon(9)^5-\varepsilon(9)^7$, $D=2\varepsilon(9)^2+\varepsilon(9)^4+\varepsilon(9)^5+2\varepsilon(9)^7$.

Доказывается аналогично теореме А1.

Теорема В3. *Для группы* J_3 *выполняется*:

$U(Z+2^6 3^4\omega Z)=\langle -1\rangle\times\langle\omega^{432}\rangle$;

$U(Z+2^5 3^3\omega Z)=\langle -1\rangle\times\langle\omega^{72}\rangle$;

$U(Z+\sqrt{-19}\cdot 2^6 3^5 Z)=\langle -1\rangle$;

$U(Z+2^6 19\cdot\sqrt{17}Z)=\langle -1\rangle\times\langle(33+8\sqrt{17})^{72}\rangle$;

$U(Z+3\cdot 17\cdot 19C\cdot Z+3\cdot 17\cdot 19D\cdot Z)=\langle -1\rangle\times\langle(2-C-D)^{24}\rangle\times\langle(-1-C-2D)^{24}\rangle$.

Доказательство. Первые два утверждения доказываются аналогично теореме В1, в третьем утверждении тривиальность имеет место, так как кольцо получено присоединением $\sqrt{-d}$, где d – натуральное число, а последние утверждения получаются путем анализа степеней фундаментальных единиц аналогично теореме В2.

Литература

1. Алеев, Р. Ж. Центральные элементы целочисленных групповых колец. // *Алгебра и логика.* – Т. 39. – № 5. – С. 513–525.

2. Schönert, Martin et al. GAP – Groups, Algorithms, and Programming/ M. Schönert; Lehrstuhl D für Mathematik, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule. – 6-th ed.– Aachen, Germany, 1997.

3. Горенстейн Д. Конечные простые группы: Введение в их классификацию/ Д. Горенстейн; Под ред. А.И. Кострикина. – М.: Мир, 1985.

Поступила в редакцию 2 апреля 2003 года