

ТЕЧЕНИЕ, ВОЗБУЖДАЕМОЕ ДИСКОМ, ВРАЩАЮЩИМСЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

В.П. Бескачко, А.Е. Коренченко

Рассматривается задача о равномерном вращении толстого диска, погруженного в жидкость на некоторую глубину, получены картины возникающих в жидкости течений. Изучено затухающее движение диска после прекращения действия сил, поддерживающих его вращение. Расчеты показали, что при затухающем движении диска в ньютоновской жидкости не возникают возвратные движения, наблюдавшиеся в [1].

Непосредственной мотивацией для выполнения настоящей работы послужили результаты экспериментов, выполненных в [1] и указывающих на возможность присутствия упругих свойств в жидкостях, обычно считающихся ньютоновскими. В этих экспериментах поплавков в виде диска помещался на поверхность исследуемой жидкости и приводился во вращение вокруг собственной оси. По достижении некоторой (небольшой) угловой скорости диск предоставлялся самому себе, и наблюдали процесс затухания его вращения вследствие вязкого трения о жидкость. Обнаружилось, однако, что затухание носит осциллирующий характер, неожиданный для ньютоновской жидкости. Это дало повод авторам [1] предположить, что в исследованных ими жидкостях наряду с вязкими присутствуют также и упругие свойства. Не исключая подобной возможности, мы хотели бы обратить внимание также и на то, что характеристики течения, возбуждаемого вращающимся диском в жидкости, сложным образом зависят от:

- 1) «начальных условий» – точнее от истории раскрутки диска от состояния покоя до прекращения действия внешнего вращающего момента;
- 2) от формы и размеров твердых поверхностей, ограничивающих жидкость;
- 3) от механических параметров самого диска (его момента инерции, например).

Учитывая нестационарность, трехмерность и нелинейность задачи, даже в ньютоновском случае трудно предвидеть характер течения, например, априори исключить возможность возвратных течений. Последние могли бы быть причиной наблюдаемого движения диска и в отсутствие упругих свойств жидкости. В связи с этим в настоящей работе предпринята попытка численного исследования некоторых упрощенных вариантов задачи.

Математическая формулировка задачи. Пусть диск радиуса R_d (рис. 1) плавает на поверхности вязкой несжимаемой жидкости (с плотностью ρ и кинематической вязкостью ν), погружившись в нее на некоторую глубину. Жидкость содержится в круговом цилиндре радиуса R_c и заполняет его до высоты H_c . Геометрические оси цилиндра и диска совпадают. Рассматриваются следующие случаи относительного движения диска и цилиндра.

1. В момент $t = 0$ диск начинает вращение с угловой скоростью ω_d , цилиндр неподвижен. Изучается поле скорости жидкости до момента установления стационарного вращения.

2. Цилиндр с жидкостью, покоившийся до момента $t = 0$, начинает вращаться с угловой скоростью ω_c . Диск остается неподвижным все время движения. Исследуется стационарное распределение скоростей в сосуде.

3. До момента $t = 0$ вся система покоится. При $t = 0$ диск начинает вращаться с угловой скоростью ω_d . После достижения стационарного состояния приводящий диск в движение момент исчезает, и диск продолжает движение по инерции. Исследуется характер этого затухающего движения.

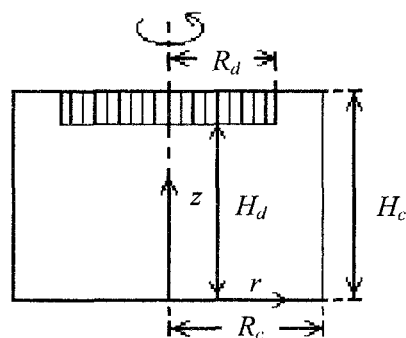


Рис. 1. Схема установки

В безразмерных переменных, когда все расстояния отнесены к радиусу R_c цилиндра, скорость – к ν/R_c (ν – кинематическая вязкость жидкости), возмущение давления сверх $\rho g z$ – к $\rho \nu^2/R_c^2$ (ρ – плотность жидкости), время – к R_c^2/ν , движение диска и окружающей его жидкости описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \Delta \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla p, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d\omega_d}{dt} = M_{fr}. \quad (3)$$

Здесь мы ввели цилиндрическую систему координат (r, θ, z) , начало отсчета которой поместили на дне сосуда (рис. 1), $\mathbf{u} = (u_z, u_r, u_\theta)$ и p – поля безразмерной скорости и безразмерного возмущения давления в жидкости, ω_d – угловая скорость диска, M_{fr} – безразмерный момент вязких сил трения, приложенных к диску со стороны жидкости, учитывающий трение о боковую поверхность и нижний торец диска. Выражение для момента учитывает направление внешней нормали к поверхности и записывается в виде [2]:

$$M_{fr} = M_1 + M_2 = T \left[- \int_{\text{по нижней поверхности диска}} r^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial z} dr + \int_{\text{по боковой поверхности диска}} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) dz \right], \quad T = \frac{2\pi \rho R^5}{I},$$

здесь I – момент инерции диска.

Уравнение (1) – уравнение баланса импульса в вязкой несжимаемой жидкости (уравнение Навье–Стокса), (2) – условие ее несжимаемости, (3) – уравнение движения диска по инерции. Граничные условия состоят в прилипанию жидкости ко всем твердым границам:

$$z = 0, \quad 0 < r < R_c: \quad u_z = 0, \quad u_r = 0, \quad u_\theta = \omega_c \cdot r;$$

$$z = H_d, \quad 0 < r < R_d: \quad u_z = 0, \quad u_r = 0, \quad u_\theta = \omega_d r;$$

$$0 < z < H_c, \quad r = R_c: \quad u_z = 0, \quad u_r = 0, \quad u_\theta = \omega_c R_c;$$

$$H_d < z < H_c, \quad r = R_d: \quad u_z = 0, \quad u_r = 0, \quad u_\theta = \omega_d R_d;$$

и в отсутствии сдвиговых напряжений на свободной границе:

$$z = H_c, \quad R_d < r < R_c: \quad u_z = 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = 0.$$

В условиях осевой симметрии при $r = 0$ будут иметь место условия $\frac{\partial f}{\partial r} = 0, u_r = 0$ для всех функций $f(r, \theta, z)$.

Численные методы решения. Численное решение проводилось методом конечных разностей. Использовались равномерные пространственные сетки с максимальной размерностью 45×45 в осевом и радиальном направлениях. Дискретизация гидродинамических уравнений производилась по схеме центральных разностей с точностью $(\Delta x)^2$ по пространственным переменным. Линеаризация получаемых в результате нелинейных разностных уравнений проводилась методом Ньютона, а решение линеаризованных систем алгебраических уравнений – методом исключения Гаусса [3, 4]. Консервативные свойства решения контролировались на каждом временном шаге, и соответствующие погрешности оказались находящимися в пределах схемной точности ($\sim 1\%$). Расчеты проводились для цилиндрического контейнера с внутренним радиусом 3 см, параметр задачи H_c/R_c принимал значения в пределах между 1 и 3. Радиус диска варьировался в пределах 1...3 см. Физические параметры жидкости отвечали воде.

Результаты и обсуждение. Через некоторое время после начала движения во всех рассмотренных случаях наступало стационарное состояние. Линии тока стационарных движений для случаев 1 и 2 изображены на рис. 2а, б. Твердотельное вращение в таких обстоятельствах не на-

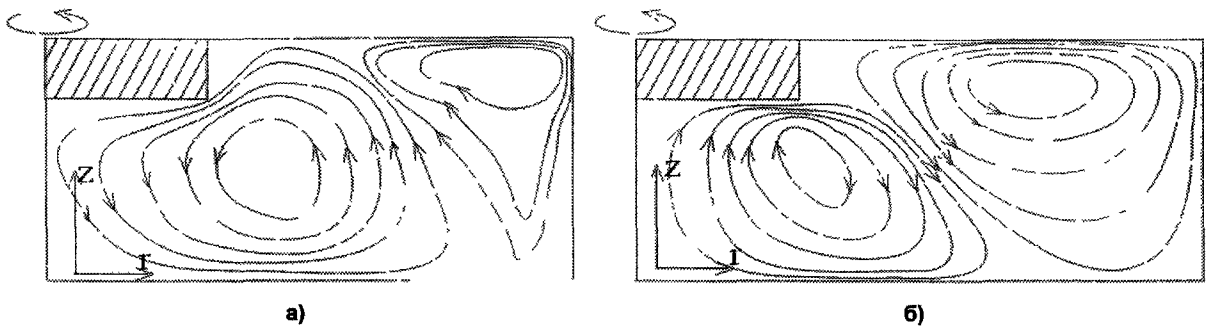


Рис. 2. Линии тока при вращательном движении: а) вращается контейнер; б) вращается диск

блюдалось даже при самых малых угловых скоростях. Движение жидкости в этих случаях имело сходные черты. Для обоих случаев характерно образование двух вихрей: первый возникает вблизи свободной поверхности, центр второго находится под диском. Однако имеется существенное различие в направлениях вращения жидкости, связанное с тем, что в случае вращения диска движение зарождается вблизи диска под его поверхностью, радиальные давления под диском обусловлены центробежной силой и направлены в сторону возрастания радиуса. Вихрь, возникающий вблизи свободной поверхности, имеет вторичное происхождение и появляется в результате распространения первого вихря внутри жидкости под действием центробежных и вязких сил. В случае вращения контейнера при покоящемся диске элементы жидкости, расположенные вблизи свободной поверхности, имеют меньшую, по сравнению со случаем твердотельного вращения, скорость и поэтому под действием центробежной силы приобретают некоторый импульс в направлении возрастания радиуса. Вихрь, сформированный вблизи свободной поверхности, является первичным, в результате его распространения в жидкости появляется вторичный вихрь, в котором жидкость затекает под поверхность диска. Если диск вращается в покоящемся контейнере и после достижения стационарного состояния вращение диска не поддерживается извне, то под действием сил трения со стороны жидкости диск постепенно останавливается. На рис. 3 изображена зависимость угловой скорости такого затухающего вращательного движения диска от времени. Уменьшение угловой скорости описывается экспоненциальной зависимостью, по коэф-

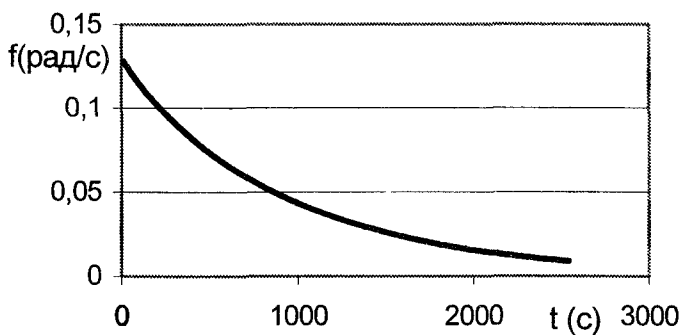


Рис. 3. Временная зависимость угловой скорости при затухающем движении диска

фициенту затухания этой кривой можно судить о коэффициенте кинематической вязкости жидкости. В затухающем движении диска в жидкости, подчиненной ньютоновскому закону вязкости не наблюдалось возвратных движений, из чего можно сделать вывод, что адекватное описание эксперимента [1] возможно лишь с помощью моделей жидкости, включающих возможность релаксации напряжений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 01-01-96424 Урал.

Литература

1. Apakashev R.A., Pavlov V.V. Determination of the shear strength and modulus of water at low flow velocities // *J. Fluid Dynamics*. – 1997. – V. 32, № 1. – P. 1.
2. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. *Механика сплошных сред*. – М.: Наука, 1988. – 518 с.
3. Ши Д. *Численные методы в задачах теплообмена*. – М.: Мир, 1988. – 537 с.
4. T. Inamuro, A. Yamaguchi, F. Ogino. Fluid flow in a rotating cylindrical container with a rotating disk at the fluid surface // *Fluid Dynamics Research*. – 21 (1997). – P. 417.