

ОСОБЕННОСТИ УСТАНОВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В КРУТИЛЬНОМ ВИСКОЗИМЕТРЕ

А.Е. Коренченко, В.П. Бескачко

Численными методами рассматривается модельная задача о течениях вязкой жидкости, заключенной внутри колеблющегося круглого цилиндра (вискозиметра). Для решения используется метод конечных разностей. Получены картины течений в вискозиметре, поля скоростей и давления. Исследуются частотные характеристики колебаний вискозиметра.

В связи с интерпретацией опытных данных, обнаруживающих аномалии в поведении полтерм вязкости металлических расплавов, в работах [1, 2] были предприняты попытки учесть влияние на результаты прямых измерений факторов, отсутствующих в стандартной вискозиметрической теории [3, 4], но обычно присутствующих в экспериментах. В настоящей работе мы намерены продолжить анализ теоретических основ метода крутильных колебаний, обратив внимание на те предположения, на которых базируются все существующие ныне расчетные схемы. Именно, всегда считается, что:

а) колебания совершаются столь долго, что все переходные процессы, связанные с выбором начальных условий (выбором способа возбуждения колебаний) уже завершились, и система находится в режиме установившихся затухающих колебаний;

б) единственной существенной компонентой скорости жидкости является азимутальная. Первое предположение избавляет нас от рассмотрения эволюции системы во времени, второе (вместе с соображениями симметрии) – от нелинейностей в уравнениях Навье–Стокса, а оба они вместе позволяют найти решение вискозиметрической задачи в аналитическом виде, который и используется на практике во всех схемах расчета вязкости.

Выполнение первого условия в экспериментах обеспечить тем легче, чем меньше декремент затухания системы, то есть чем меньше отношение I'/I , где I' и I моменты инерции «замороженной» жидкости и подвесной системы соответственно. Справедливость второго условия зависит от того, насколько мала угловая амплитуда Φ колебаний подвеса. Ясно, что амплитуда азимутальной компоненты скорости жидкости в цилиндре также имеет порядок Φ , а амплитуды двух оставшихся компонент имеют порядок Φ^2 , как показано в [5]. Таким образом, каждое из высказанных предположений справедливо лишь асимптотически (при $t \rightarrow \infty$) – в пределе исчезающе малых колебаний.

Стремление к последнему пределу на практике быстро ограничивается падением отношения «сигнал/шум» при измерении необходимых для расчета вязкости параметров колебаний – периода и декремента затухания. Поэтому для корректной интерпретации опытных данных необходимы количественные оценки длительности переходного процесса и роли «вторичных» течений, обусловленных радиальной и осевой компонентами скорости жидкости. Такие оценки позволили бы ответить на следующие вопросы, касающиеся методики выполнения экспериментов.

1. Спустя какое время τ_1 после старта подвесной системы, осуществляемого тем или иным способом, устанавливается режим затухающих колебаний, а данные прямых измерений уже не содержат методических погрешностей, связанных с наблюдением переходного процесса?

2. Начиная с какого момента времени τ_2 амплитуда колебаний становится достаточно малой для того, чтобы влиянием вторичных течений на наблюдаемые параметры можно было пренебречь, и как выбирать начальную амплитуду колебаний, чтобы τ_2 было по возможности меньше?

3. Каким способом можно обнаружить присутствие указанных двух погрешностей по опытным данным, полученным с помощью той или иной схемы регистрации колебаний?

Насколько нам известно, попыток систематического исследования этих вопросов еще не предпринималось. В отсутствие ответов на них остается только надеяться, что «конкретно в наших экспериментах» условия, требуемые для применения стандартных вискозиметрических ме-

тодик, выполняются. Целью настоящей работы является создание математической модели, описывающей совместное движение подвешенной системы вискозиметра и содержащейся в нем жидкости, на основе точных уравнений движения, и не использующей приближения, указанные выше. В силу последнего обстоятельства такая модель является численной, поскольку надежд на аналитическое решение нет.

Математическая формулировка задачи. Пусть прямой круговой цилиндр с внутренним радиусом R и моментом инерции I подвешен вдоль своей геометрической оси на упругой нити, имеющей крутильную жесткость κ (рис. 1). Цилиндр частично или до конца заполнен исследуемой жидкостью, которая полагается ньютоновской и обладает плотностью ρ и кинематической вязкостью ν . Высота столба жидкости $H \leq H_c$, где H_c – высота внутренней части боковой поверхности цилиндра, так что момент инерции «замороженной» жидкости есть $I' = MR^2/2 = \rho\pi R^2 H/2$. Рассматриваются два способа возбуждения крутильных колебаний:

1) при $t < 0$ цилиндр вместе с жидкостью покоится в положении равновесия, а в момент $t = 0$ ему сообщается угловая скорость ω_0 ;

2) при $t < 0$ цилиндр с жидкостью удерживается в состоянии покоя в положении, повернутом на угол ϕ_0 относительно положения равновесия.

При $t > 0$ цилиндр предоставляется самому себе, совершая крутильные колебания под действием моментов упругих ($M_e = -\kappa\phi$) и вязких (M_f) сил, приложенных к нему со стороны нити и заполняющей его жидкости. Уравнение его движения имеет вид

$$I \frac{d\omega}{dt} = -\kappa\phi + M_f. \tag{1}$$

В соответствии со сказанным выше начальными условиями для уравнения (1) являются:

$$\omega(0) = \omega_0, \quad \phi(0) = 0, \tag{2}$$

или
$$\omega(0) = 0, \quad \phi(0) = \phi_0. \tag{3}$$

Момент вязких сил относительно оси вращения определяется полем скорости жидкости на ее границе с твердым телом:

$$M_f = M_1 + M_2, \tag{4}$$

где моменты M_1 и M_2 обусловлены трением жидкости о боковую поверхность цилиндра и его торцы соответственно:

$$M_1 = 2\pi\eta R^2 \int_0^H \left(\frac{\partial V_\phi}{\partial r} - \frac{V_\phi}{r} \right) dz, \tag{5}$$

$$M_2 = 2\pi\eta \int_0^R \left(\frac{\partial V_\phi}{\partial z} \right) r^2 dr - 2\pi\eta \int_0^R \left(\frac{\partial V_\phi}{\partial z} \right) r^2 dr, \tag{6}$$

Здесь $\eta = \nu\rho$ – динамическая вязкость жидкости; $V_\phi = V_\phi(r, \phi, z, t)$ – азимутальная компонента поля ее скорости $\mathbf{V} = (V_r, V_\phi, V_z)$ (мы ввели цилиндрическую систему координат, ось которой совпадает с осью цилиндра, а начало отсчета располагается на его дне). В случае, если жидкость не смачивает верхнюю крышку цилиндра, последнее слагаемое в (6) отсутствует. Движение цилиндра возбуждает течение заполняющей его жидкости, подчиняющееся уравнениям:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\mathbf{V} + \rho\mathbf{g}, \tag{7}$$

$$(\nabla, \mathbf{V}) = 0. \tag{8}$$

Уравнения (7) есть уравнения баланса импульса (уравнения Навье–Стокса), а (8) – условие несжимаемости жидкости. В этих уравнениях P – поле давления; \mathbf{g} – ускорение свободного падения. Граничными условиями для (7)–(8) служат:

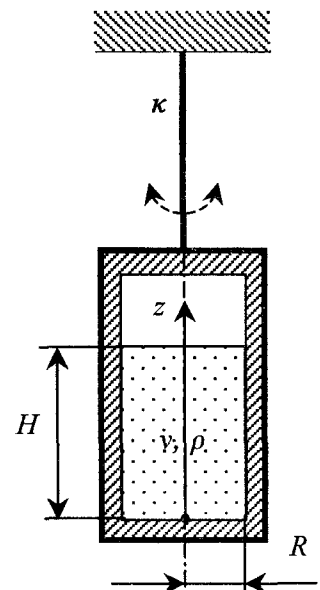


Рис. 1. Схема крутильного вискозиметра

$$V_\varphi(R, z, t) = \omega R, \quad (9)$$

$$V_\varphi(r, 0, t) = \omega r, \quad V_\varphi(r, H_c, t) = \omega r, \quad (10)$$

$$V_r(r, 0, t) = V_z(r, 0, t) = V_r(r, H_c, t) = V_z(r, H_c, t) = V_r(R, z, t) = V_z(R, z, t) = 0. \quad (11)$$

Они означают условия прилипания жидкости ко всем твердым границам. Последнее равенство в (10) имеет место, если жидкость целиком заполняет цилиндр ($H = H_c$). В противном случае ее верхняя граница свободна. В каждом из рассматриваемых случаев (2), (3) возбуждения колебаний жидкость в начальный момент времени покоится

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, 0) = 0. \quad (12)$$

Соотношениями (1)–(3), (7)–(12) полностью определена сопряженная краевая задача о движении твердого цилиндра с содержащейся в нем жидкостью. В приведенной постановке она является весьма громоздкой даже и для численного решения. Поэтому на данном этапе исследования рассмотрим следующие возможности ее упрощения. Во-первых, мы ограничимся изучением только осесимметричных режимов течения, когда ни одна из интересующих нас полевых переменных не зависит от азимутального угла φ . Во-вторых, поскольку нас интересует случай малых колебаний, мы будем считать их малыми настолько, что можно пренебречь деформацией свободной поверхности жидкости и считать ее плоской в любой момент времени. Заодно мы считаем, что радиус цилиндра достаточно велик для того, чтобы можно было пренебречь деформацией границы также и вследствие капиллярных эффектов. Первое предположение позволяет опустить в уравнениях (7)–(8) все слагаемые, содержащие производные по φ , получив в результате

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\varphi^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right], \\ \frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} + \frac{V_r V_\varphi}{r} &= \nu \left[\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial z^2} \right], \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right] + \rho g, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Второе предположение позволяет записать условие отсутствия сдвиговых напряжений на границе в виде

$$\left. \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right|_{z=H} = 0, \quad V_z|_{z=H} = 0.$$

Если ввести теперь безразмерные переменные и параметры так, что все расстояния отнесены к внутреннему радиусу R цилиндра, скорость – к ν/R , давление – к $\rho\nu^2/R^2$, время – к R^2/ν , движение цилиндра и заполняющей его жидкости описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} + v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} + v \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{w^2}{y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v}{y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial w}{\partial \tau} + v \frac{\partial w}{\partial y} + u \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{vw}{r} &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{w}{y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \frac{1}{y} \frac{\partial(yv)}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{df}{d\tau} &= -G\varphi + m_f. \end{aligned} \quad (13)$$

Введенные здесь безразмерные величины означают: (x, y) , $x = \frac{z}{R}$, $y = \frac{r}{R}$ – компоненты радиус-вектора; (u, v, w) – компоненты вектора скорости; p – возмущение давления относительно $\rho g x$; f – угловая скорость цилиндра; $G = \frac{R^4 \kappa}{\nu^2 I}$ – коэффициент упругости,

$$m_f = \frac{2\pi\rho R^5}{I} \left(\int_0^{H/R} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{w}{y} \right) \Big|_{y=1} dx + \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} y^2 dy - \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_{x=H/R} y^2 dy \right)$$

– момент вязких сил. Граничные условия запишутся в виде

$$w(1, x, \tau) = f,$$

$$w(y, 0, \tau) = f \cdot y, \quad w(y, H_c/R, \tau) = f \cdot y, \tag{14}$$

$$v(y, 0, \tau) = u(y, 0, \tau) = v(y, H_c/R, \tau) = u(y, H_c/R, \tau) = v(1, x, \tau) = u(1, x, \tau) = 0.$$

Кроме того, на оси сосуда выполняются условия $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$, $v = 0$, обусловленные осевой симметрией течения. Задача заключается в отыскании закона движения цилиндра $f = f(\tau)$ и заполняющей его жидкости.

Численное решение. Численное решение системы (13) с граничными условиями (14) находилось методом сеток. Использовались равномерные пространственные сетки с максимальной размерностью 64×64 в осевом и радиальном направлениях. Дискретизация гидродинамических уравнений производилась по схеме центральных разностей с точностью $(\Delta x)^2$ по пространственным переменным. Линеаризация получаемых в результате нелинейных разностных уравнений проводилась методом Ньютона, а решение линеаризованных систем уравнений – методом исключения Гаусса. Консервативные свойства решения контролировались на каждом временном шаге, соответствующие погрешности оказались находящимися в пределах схемной точности. Расчеты проводились для цилиндра с внутренним радиусом 1–3 см и высотой заполнения его жидкостью 1–3 см, так что диапазон изменения параметра задачи H/R был от $1/3$ до 1. Физические параметры жидкости отвечали воде.

Результаты и обсуждение. В настоящей работе приводятся результаты численных экспериментов для случая, когда жидкость целиком заполняет цилиндр. На рис. 2 показаны линии тока «вторичных» течений, обусловленных радиальной и осевой компонентами поля скорости, для различных фаз колебаний цилиндра. Рис. 2а соответствует максимальной, а рис. 2б – нулевой угловой скорости цилиндра. В первом случае образуется вихрь, в котором жидкость поднимается вверх около боковой поверхности цилиндра и опускается вниз вблизи его оси. Во втором случае около дна цилиндра возникает второй вихрь с противоположным направлением циркуляции. Подобные вихри существуют в любой фазе движения цилиндра. Вблизи верхнего торца сосуда, где скорости велики, формируется зона низкого давления, куда выталкиваются линии тока (на рисунке видна область сгущения линий тока). Основной вихрь не всегда занимает всю область

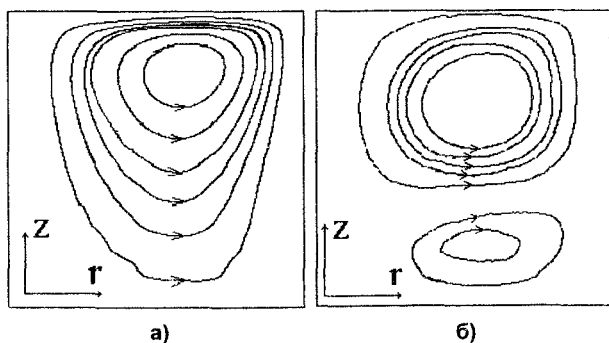


Рис. 2. Линии тока вторичных течений:
а) угловая скорость цилиндра максимальна;
б) угловая скорость цилиндра равна нулю

внутри цилиндра, в нижних областях (вблизи дна цилиндра) в моменты, когда скорость цилиндра близка к нулю, возникают дополнительные рециркуляционные зоны (рис. 2б). На рис. 3а и 3б показаны законы изменения угловой скорости цилиндра f , а также осевой $u(\tau)$ и радиальной $v(\tau)$ скоростей жидкости вблизи боковой стенки для случая, когда цилиндр стартует из состояния покоя, будучи предварительно повернут на некоторый начальный угол, а затухание велико. Особенностью движения жидкости в цилиндре является то, что частота колебаний осевой и радиальной скоростей в два раза выше частоты основных колебаний

(рис. 3а и 3б). Этот факт легко объяснить присутствием в уравнении Навье–Стокса для радиальной скорости слагаемого, описывающего действие центробежной силы $\frac{w^2}{y}$. Ясно, что этот член

имеет смысл источника для уравнения радиальной скорости и имеет двойную, по сравнению с основной, частоту колебаний. В свою очередь, колебания осевой и радиальной скоростей вызывают появление высших гармоник в спектре азимутальной скорости, благодаря членам вида $-w \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$ и $-w \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$. Визуально трудно заметить существование какого-либо переходного процесса

в колебаниях цилиндра (рис. 3б). Однако анализ спектра этого движения указывает, что наряду с основной частотой присутствуют и высшие гармоники, обусловленные затуханием колебаний, влиянием начальных условий, а также нелинейным взаимодействием между различными колебаниями. На рис. 4 изображены зависимости отношения амплитуд второй и первой (основной) гармоник колебаний для двух случаев возбуждения колебаний. В процессе установления колебаний

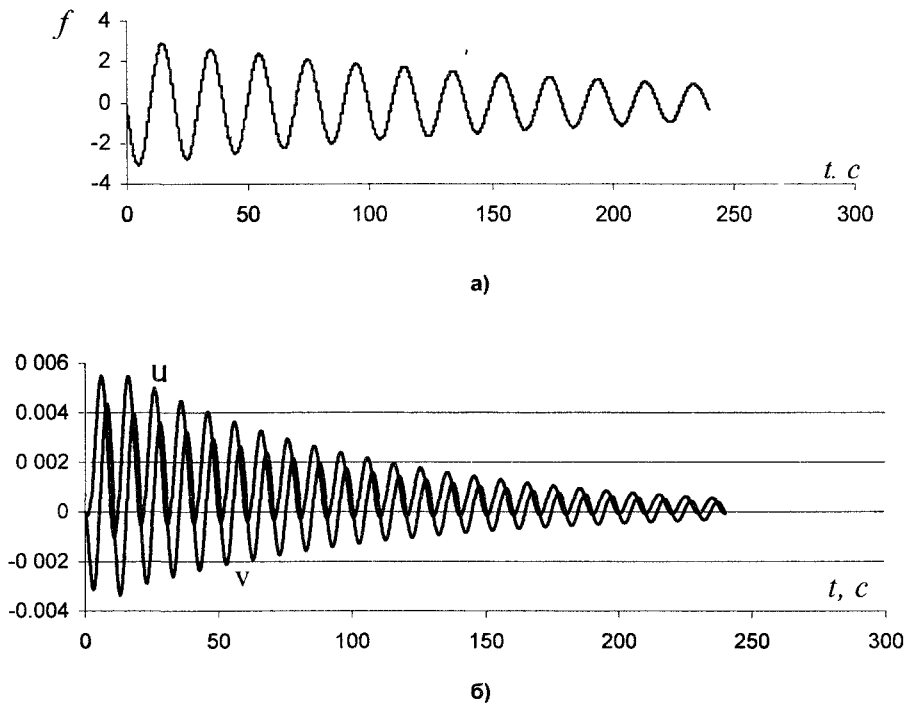


Рис. 3. а) закон $f(t)$ движения цилиндра при старте из состояния $f(0) = 0, \varphi(0) = \varphi_0$; б) законы $u(t)$ и $v(t)$ для скоростей жидкости во внутренней точке при начальных условиях, соответствующих рис. 3а

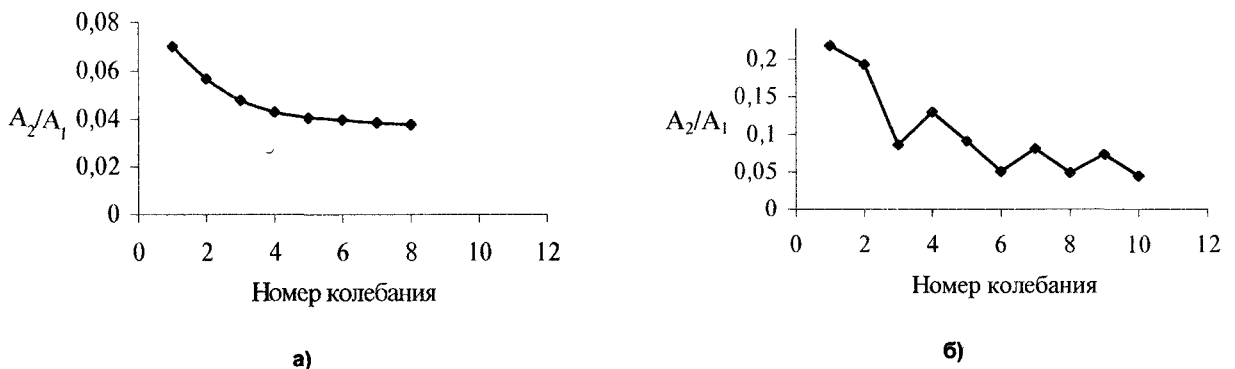


Рис. 4. Относительное убывание амплитуды гармоник для двух случаев возбуждения колебаний

отношение амплитуд второй и первой, а также нулевой и первой гармоник изменяется, приближаясь к некоторому постоянному значению (рис. 4). Отметим, что установление колебаний в случае возбуждения их толчком (рис. 4б), имеет колебательный характер и длится дольше, по сравнению со случаем, показанным на рис. 4а. Приблизительно с десятого колебания в обоих случаях можно считать, что колебания установились, и проводить измерения затухания.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 01-01-96424 Урал.

Литература

1. Бескачко В.П., Вяткин Г.П., Писарев Н.М., Щека А.И. Влияние поверхностных пленок на результаты измерения вязкости по методу Швидковского. I. Теория // *Расплавы*. – 1990. – № 6. – С. 3–8; II. Численные эксперименты. – Там же. – С. 9–16.
2. Бескачко В.П., Вяткин Г.П., Писарев Н.М., Хисматулин М.Б. Теория крутильного вискозиметра, помещенного в осевое магнитное поле // *Магнитная гидродинамика*. – 1992. – № 2. – С. 65–70.
3. Швидковский Е.Г. Некоторые вопросы вязкости расплавленных металлов. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 206 с.
4. Kestin J., Newell G.F. Theory of oscillating type viscometers: the oscillating cap. Part I. // *ZAMP*. – 1957. – V. VIII. – P. 433–449.
5. Grouvel J.M., Kestin J. Working equations for the oscillating-cup viscometer // *Appl. Sci. Res.* – 1978. – V. 34. – P. 427–443.