

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ЛЮСТЕРНИКА

С.М. Григорьев

Изучается предельное поведение пуассоновского случайного блуждания в R^n , порождающего широкий класс специальных функций. Для данного случайного блуждания получена предельная теорема и построен главный член асимптотического разложения функций Люстерника.

1. Обозначения

Нам будет удобно в дальнейшем для сокращения записи использовать следующие обозначения:

$$x, y, z, \dots \in R^l, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_l \end{pmatrix}, \dots, x^y = \prod_i x_i^{y_i}, S(x) = \sum_i x_i, \Gamma(x) = \prod_i \Gamma(x_i).$$

Здесь $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера.

2. Пуассоновское блуждание в R^{n+1}

Рассмотрим $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ – базис в R^{n+1} . Зададим случайное блуждание в R^{n+1} с помощью однородной переходной функции $P(x, y)$:

$$\forall x, y \in R^{n+1} : P(x, y) = P(0, y-x) = \begin{cases} p_j, & y-x = e_j, \\ 0, & y-x \neq e_j, \end{cases} \quad \sum_{i=1}^{n+1} p_i = 1. \quad (1)$$

Предполагается, что количество N_τ переходов за время τ , прошедшее с некоторого момента времени $\tau = 0$, регулируется пуассоновским процессом с параметром λ :

$$p\{N_\tau = s\} = e^{-\lambda\tau} \frac{(\lambda\tau)^s}{s!}. \quad (2)$$

Будем обозначать θ_τ – положение данного случайного блуждания в момент времени τ .

3. Орбиты в R^{n+1}

Векторы $x, y \in R^{n+1}$ назовем эквивалентными (и обозначим $x \equiv y$), если $y-x = (m, m, \dots, m)$, где $m \in Z$. Отношение $x \equiv y$, очевидно, является отношением эквивалентности и разбивает R^{n+1} на непересекающиеся классы: $R^{n+1} = \bigcup H_x$, где $H_x = \{y \in R^{n+1} | y \equiv x\}$. Для $\forall x, y \in R^{n+1}$ таких, что $x \not\equiv y$, выполнено $H_x \cap H_y = \emptyset$.

Обозначим Ω_{n+1} – целочисленную сеть в R^{n+1} , т.е. множество векторов с целочисленными в R^{n+1} координатами:

$$\Omega_{n+1} = \{x | x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}), x_i \in Z, i = 1, 2, \dots, n+1\}.$$

Очевидно, что если $x \in \Omega_{n+1}$ и $x \equiv y$, то $y \in \Omega_{n+1}$. Таким образом, сеть Ω_{n+1} распадается в прямую сумму целочисленных классов эквивалентности: $\Omega_{n+1} = \sum_k H_k$, где классы

$H_k = \{r \in \Omega_{n+1} | r = k + (m, m, \dots, m), m \in Z\}$, k – целочисленный вектор. Далее всякий класс H_k будем называть *орбитой целочисленного вектора* $k \in R^{n+1}$.

4. Функции Люстерника

Случайное блуждание (1)–(2) индуцирует случайное блуждание по орбитам сети Ω_{n+1} , задаваемое однородной функцией перехода $P^*(H_k, H_r)$:

$$P^*(H_k, H_r) = \begin{cases} 0, & \forall m \in Z : k - r - (m, m, \dots, m) = e_i \\ p_i, & \exists m \in Z : k - r - (m, m, \dots, m) = e_i \end{cases} \quad (3)$$

Известно [2], что вероятность $P_\tau(H_k)$ для этого случайного блуждания за время τ попасть из начала координат на орбиту H_k точки k равна:

$$P_\tau(H_k) = P(\theta_\tau \in H_k) = e^{-\lambda\tau} G_k(\lambda\bar{p}\tau), \quad (4)$$

где $\bar{p} = (p_1, p_2, \dots, p_{n+1})$, а функции $G_k(\bar{z})$, называемые в дальнейшем функциями Люстерника, даются соотношением

$$G_k(\bar{z}) = \sum \frac{\bar{z}^{k+mA}}{(k+mA)!}, \quad A = (1, 1, \dots, 1). \quad (5)$$

(см. обозначения), в котором суммирование ведется по всем целым значениям параметра $m \in Z$. Функции $G_k(\bar{z})$, впервые определенные в [1], являются широким обобщением классических специальных функций математической физики – цилиндрических функций, в частности функций Бесселя, функций параболического цилиндра и др.

Целью настоящей заметки является получение главного члена асимптотического разложения функций (5).

Каждой орбите H_k поставим в соответствие вектор в R^n , координаты которого $\hat{k} = \{k_1 - k_{n+1}, \dots, k_n - k_{n+1}\}$.

При этом случайное блуждание (1)–(2) порождает случайное блуждание $\zeta_\tau = \sum_{i=1}^{N_\tau} \xi_i$ в R^n , где $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ – независимые в совокупности, одинаково распределенные в R^n случайные векторы, ряд распределения которых

$$P\{\xi_i = x\} = \begin{cases} p_j, & x = e_j, & j = 1, 2, \dots, n \\ p_{n+1}, & x = (-1, -1, \dots, -1) = e_{n+1} \\ 0, & x \neq e_j, & j = 1, 2, \dots, n+1 \end{cases}.$$

Здесь вероятности p_j – такие же, как и в п. 2, $\{e_j\}_{j=1}^n$ – базис в R^n , $\sum_{i=1}^{n+1} e_i = 0$, N_τ – пуассоновская величина с параметром λ , не зависящая от ξ_i . Очевидно, имеет место

Лемма 1

Для случайного блуждания (3) по орбитам сети Ω_{n+1} справедливо:

$$P_\tau(H_k) = P\left(\zeta_\tau = \hat{k} = (k_1 - k_{n+1}, k_2 - k_{n+1}, \dots, k_n - k_{n+1})\right), \quad \forall k = (k_1, k_2, \dots, k_{n+1}) \in \Omega_{n+1}.$$

Доказательство

Рассмотрим события $C_m = \{\theta_\tau = k + (m, m, \dots, m)\}$. Событие C_m происходит, если за время τ произошло $k_i + m$ переходов в направлении e_i . Пусть C – событие $\{\theta_\tau \in H_k\}$. Тогда, если

$$k_0 = \min_{i=1-n+1} k_i, \text{ то } C = \sum_{m=-k_0}^\infty C_m.$$

Рассмотрим теперь события D_m , происходящие тогда, когда за время τ вектор ζ_τ образовался как сумма $\zeta_\tau = \sum_{i=1}^{N_\tau} \xi_i$, где среди слагаемых – по $k_j - k_{n+1} + m$ штук в направлении e_j ($j = 1 \div n+1$), и событие $D = \{\zeta_\tau = \hat{k}\}$. Тогда, если $k'_0 = \max_i (k_{n+1} - k_i) = k_{n+1} - k_0$, то

$D = \sum_{m=k_0}^{\infty} D_m = \sum_{m'=-k_0}^{\infty} D_{m'+k_{n+1}}$, где $m' = m - k_{n+1}$. Из описания случайного блуждания (1–2) и вектора ζ_{τ} очевидным образом вытекает, что $P(C_m) = P(D_{k_{n+1}+m})$. Отсюда:

$$P(C) = \sum_{m=-k_0}^{\infty} P(C_m) = \sum_{m=-k_0}^{\infty} P(D_{m+k_{n+1}}) = P(D),$$

что и требовалось доказать.

5. Некоторые предельные теоремы

Заметим, что описанный выше процесс удовлетворяет закону больших чисел и для него справедливы аналоги классических предельных теорем, важнейшими из которых для дальнейшего являются следующие.

Лемма 2 (предельная теорема для случайной суммы одинаково распределенных векторов)

Пусть случайные векторы $\xi_i \in R^n$ ($i = 1, 2, \dots$) независимы и одинаково распределены с рядом распределения $P\{\xi = e_i\} = p_i, i = 1, 2, \dots, n+1, \sum_i p_i = 1$; $e_i (i = 1, \dots, n)$ – орты в R^n , $\sum_{i=1}^{n+1} e_i = 0$, N_{τ} – пуассоновская случайная величина с параметром $\lambda\tau$, не зависящая от $\bar{\xi}_i$. Обозначим

$\bar{p} = \sum_{i=1}^{n+1} p_i e_i = \sum_{i=1}^n (p_i - p_{n+1}) e_i$. Тогда при $\lambda\tau \rightarrow \infty$ распределение вектора $\bar{\zeta}_{\tau} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{\tau}} \bar{\xi}_i - \lambda\bar{p}\tau}{\sqrt{\lambda\tau}}$ стремится к нормальному распределению с характеристической функцией

$$\omega(\bar{t}) \sim \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} p_i t_i^2\right]. \quad (6)$$

Доказательство

Пусть $\sum_{i=1}^{N_{\tau}} \bar{\xi}_i$ – характеристическая функция вектора ξ_i .

Из условия: $\varphi(\bar{t}) = \sum_{i=1}^{n+1} p_i e^{i\bar{t}e_i} = \sum_{i=1}^{n+1} p_i e^{t_i}$, где $t_{n+1} = -\sum_{i=1}^n t_i$.

Далее, характеристическая функция вектора $\sum_{i=1}^{N_{\tau}} \bar{\xi}_i$:

$$\psi(\bar{t}) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(e^{-\lambda\tau} \frac{(\lambda\tau)^s}{s!} \right) \varphi^s(\bar{t}) = e^{-\lambda\tau} \cdot e^{\lambda\tau \varphi(\bar{t})} = \exp[\lambda\tau(\varphi(\bar{t}) - 1)].$$

Отсюда характеристическая функция вектора $\bar{\eta}_{\tau} = \left(\sum_{i=1}^{N_{\tau}} \bar{\xi}_i \right) - \lambda\tau\bar{p}$ такова:

$$\psi_0(\bar{t}) = e^{-\lambda\tau\bar{p}\bar{t}} \cdot \psi(\bar{t}) = \exp[\lambda\tau(\varphi(\bar{t}) - \bar{p}\bar{t} - 1)].$$

Здесь, очевидно, $\bar{p}\bar{t} = \sum_{i=1}^n (p_i - p_{n+1}) t_i = \sum_{i=1}^{n+1} p_i t_i$.

Заметим, что $\varphi(t)$ раскладывается в ряд Тейлора:

$$\varphi(\bar{t}) = \sum_{i=1}^{n+1} p_i \left(1 + it_i - \frac{t_i^2}{2} + \dots \right) = \sum_{i=1}^{n+1} p_i + i \sum_{i=1}^{n+1} p_i t_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} p_i t_i^2 + \dots = 1 + \bar{p}\bar{t} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} p_i t_i^2 + \dots$$

Отсюда

$$\varphi(\bar{t}) - \bar{p}\bar{t} - 1 = \sum_{s=2}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{i=1}^{n+1} p_i t_i^s.$$

Но тогда для характеристической функции случайного вектора $\bar{\xi}_\tau = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N_t} \xi_i\right) - \lambda\tau\bar{p}}{\sqrt{\lambda\tau}} = \frac{\eta_\tau}{\sqrt{\lambda\tau}}$ получаем:

$$\omega(\bar{t}) = \psi_0\left(\frac{\bar{t}}{\sqrt{\lambda\tau}}\right) = \exp\left[\lambda\tau\left(\sum_{s=2}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{i=1}^{n+1} p_i \left(\frac{t_i}{\sqrt{\lambda\tau}}\right)^s\right)\right] = \exp\left[-\sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{i^s}{(s+2)!} \sum_{i=1}^{n+1} p_i \frac{t_i^{s+2}}{(\lambda\tau)^{s/2}}\right)\right].$$

При $\lambda\tau \rightarrow \infty$ имеем $\omega(\bar{t}) \sim \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} p_i t_i^2\right]$, что и требовалось.

Следующая лемма есть многомерный аналог известной леммы о выражении вероятностей дискретного распределения через характеристические функции (например, [3], с. 573).

Лемма 3 (формула обращения)

Пусть $\bar{\xi}$ – случайный n -мерный вектор, имеющий решетчатое дискретное распределение с шагами по осям h_1, h_2, \dots, h_n и одним из узлов $\bar{b}_0 = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Тогда вероятности $p_{\bar{k}} = p_{k_1, k_2, \dots, k_n}$ того, что вектор $\bar{\xi}$ примет значение $\bar{b}_{\bar{k}} = (b_1 + k_1 h_1, b_2 + k_2 h_2, \dots, b_n + k_n h_n)$, могут быть получены из соотношения

$$p_{\bar{k}} = \frac{h_1 h_2 \dots h_n}{(2\pi)^n} \int_{-\pi/h_1}^{\pi/h_1} \int_{-\pi/h_2}^{\pi/h_2} \dots \int_{-\pi/h_n}^{\pi/h_n} \varphi(\bar{t}) e^{-i\bar{b}_{\bar{k}} \bar{t}} d\bar{t}, \tag{7}$$

где $\varphi(\bar{t})$ – характеристическая функция вектора $\bar{\xi}$.

Доказательство

Характеристическую функцию вектора $\bar{\xi}$ можно записать в виде $\varphi(\bar{t}) = \sum_{\bar{k}} p_{\bar{k}} e^{-i\bar{b}_{\bar{k}} \bar{t}}$.

Отсюда:

$$\begin{aligned} \frac{h_1 h_2 \dots h_n}{(2\pi)^n} \int_{-\pi/h_1}^{\pi/h_1} \int_{-\pi/h_2}^{\pi/h_2} \dots \int_{-\pi/h_n}^{\pi/h_n} \varphi(\bar{t}) e^{-i\bar{b}_{\bar{k}} \bar{t}} d\bar{t} &= \frac{h_1 h_2 \dots h_n}{(2\pi)^n} \int_{-\pi/h_1}^{\pi/h_1} \int_{-\pi/h_2}^{\pi/h_2} \dots \int_{-\pi/h_n}^{\pi/h_n} \sum_{\bar{r}} \left[p_{\bar{r}} e^{i(\bar{b}_{\bar{r}} - \bar{b}_{\bar{k}}) \bar{t}} \right] d\bar{t} = \\ &= \frac{h_1 h_2 \dots h_n}{(2\pi)^n} \sum_{\bar{r}} p_{\bar{r}} I(\bar{k}, \bar{r}), \end{aligned}$$

где

$$I(\bar{k}, \bar{r}) = \int_{-\pi/h_1}^{\pi/h_1} \int_{-\pi/h_2}^{\pi/h_2} \dots \int_{-\pi/h_n}^{\pi/h_n} e^{i(\bar{b}_{\bar{k}} - \bar{b}_{\bar{r}}) \bar{t}} d\bar{t} = \int_{-\pi/h_1}^{\pi/h_1} e^{ih_1(k_1 - r_1)t_1} dt_1 \int_{-\pi/h_2}^{\pi/h_2} e^{ih_2(k_2 - r_2)t_2} dt_2 \dots \int_{-\pi/h_n}^{\pi/h_n} e^{ih_n(k_n - r_n)t_n} dt_n.$$

Заметим, что

$$\int_{-\pi/h_j}^{\pi/h_j} e^{ih_j(k_j - r_j)t_j} dt_j = \frac{1}{ih_j(k_j - r_j)} \left(e^{i\pi(k_j - r_j)} - e^{-i\pi(k_j - r_j)} \right) = \begin{cases} 0, & k_j \neq r_j \\ 2\pi/h_j, & k_j = r_j \end{cases},$$

что влечет за собой

$$I(\bar{k}, \bar{r}) = \begin{cases} 0, & \bar{k} \neq \bar{r} \\ \frac{(2\pi)^n}{h_1 h_2 \dots h_n}, & \bar{k} = \bar{r} \end{cases}.$$

Поэтому

$$\frac{h_1 h_2 \dots h_n}{(2\pi)^n} \sum_{\bar{r}} p_{\bar{r}} I(\bar{k}, \bar{r}) = p_{\bar{k}},$$

что и требовалось.

Теорема 1 (вариант предельной теоремы для случайной суммы в R^n)

Пусть случайные векторы $\bar{\xi}_i \in R^n$ ($i=1,2,\dots$) независимы и одинаково распределены с рядом распределения; $P\{\bar{\xi} = e_i\} = p_i$, $i=1,2,\dots,n+1$, $\sum_{i=1}^{n+1} p_i = 1$, e_i ($i=1,\dots,n$) – базис в R^n , $\sum_{i=1}^{n+1} e_i = 0$, N_τ – пуассоновская величина с параметром $\lambda\tau$, не зависящая от $\bar{\xi}_i$. Обозначим:

$$a = \frac{1}{d} - \frac{1}{d\sqrt{1+p_{n+1}d}}; \quad d = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}. \tag{8}$$

Тогда при $\lambda\tau \rightarrow \infty$ для вероятности $P_\tau(\bar{k}) = P\left\{\sum_{i=1}^{N_\tau} \bar{\xi}_i = \bar{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)\right\}$ справедливо соотношение

$$P_\tau(\bar{k}) \sim \frac{1}{\sqrt{(2\pi\lambda\tau)^n p_1 p_2 \dots p_{n+1} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_{n+1}}\right)}} \times \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\left(\lambda(p_j - p_{n+1})\tau - k_j - a \sum_{l=1}^n \frac{\lambda(p_l - p_{n+1})\tau - k_l}{p_l}\right)^2}{\lambda p_j \tau}\right). \tag{9}$$

Доказательство

Пусть $\bar{p} = \sum_{i=1}^n (p_i - p_{n+1})e_i = \sum_{i=1}^{n+1} p_i e_i$. Рассмотрим вектор $\bar{\zeta}_\tau = \frac{\sum_{i=1}^{N_\tau} \bar{\xi}_i - \lambda\bar{p}\tau}{\sqrt{\lambda\tau}}$. Из условия теоремы очевидным образом вытекает, что вектор $\bar{\eta}_\tau$ имеет решетчатое распределение с узлом $(0, 0, \dots, 0)$ и периодами по каждой оси $h_i = 1$, поэтому $\bar{\zeta}_\tau$ имеет решетчатое распределение с узлом $\bar{b}_0 = -\bar{p}\sqrt{\lambda\tau}$ и периодами по каждой оси $h_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda\tau}}$. В соответствии с леммой 3 заключаем:

$$P_{\bar{k}} = P\left\{\sum_{i=1}^{N_\tau} \bar{\xi}_i = \bar{k}\right\} = P\left\{\bar{\zeta}_\tau = \frac{\sum_{i=1}^{N_\tau} \bar{\xi}_i - \lambda\bar{p}\tau}{\sqrt{\lambda\tau}} = \bar{b}_{\bar{k}} = \frac{\bar{k} - \lambda\bar{p}\tau}{\sqrt{\lambda\tau}}\right\} = \frac{1}{(2\pi\sqrt{\lambda\tau})^n} \int_{-\pi\sqrt{\lambda\tau}}^{\pi\sqrt{\lambda\tau}} \dots \int_{-\pi\sqrt{\lambda\tau}}^{\pi\sqrt{\lambda\tau}} \omega(\bar{t}) e^{-i\bar{b}_{\bar{k}}\bar{t}} dt_1 \dots dt_n,$$

где $\omega(\bar{t})$ – характеристическая функция случайного вектора $\bar{\zeta}_\tau$. Тогда из леммы 2 следует:

$$P_\tau(\bar{k}) \sim \frac{1}{(2\pi\sqrt{\lambda\tau})^n} \int_{-\pi\sqrt{\lambda\tau}}^{\pi\sqrt{\lambda\tau}} \dots \int_{-\pi\sqrt{\lambda\tau}}^{\pi\sqrt{\lambda\tau}} \exp\left[-\sum_{i=1}^{n+1} \frac{p_i t_i^2}{2} + \frac{i\bar{t}}{\sqrt{\lambda\tau}} (\lambda\bar{p}\tau - \bar{k})\right] dt_1 \dots dt_n = \frac{1}{(2\pi\sqrt{\lambda\tau})^2} \iint_{D_\tau} \dots \int \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n+1} p_i t_i^2 - \frac{2i\bar{t}}{\sqrt{\lambda\tau}} (\lambda\bar{p}\tau - \bar{k})\right)\right] d\bar{t} = I, \tag{10}$$

где

$$D_\tau = \bigcap_{i=1}^n \{-\pi\sqrt{\lambda\tau} < x_i < \pi\sqrt{\lambda\tau}\}.$$

Для вычисления интеграла (10) перейдем к новым переменным:

$$\bar{t} = Q\bar{T}, \text{ где } Q = \|q_{ij}\|_{i,j=1}^n, \quad q_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{p_i}} - \frac{a}{p_i\sqrt{p_j}}.$$

Таким образом, переменные t_1, t_2, \dots, t_n выражаются через переменные T_1, T_2, \dots, T_n в следующем виде:

$$t_i = \frac{T_i}{\sqrt{p_i}} - \frac{aS}{p_i},$$

где для краткости обозначено:

$$S = S(\bar{T}) = \sum_{j=1}^n \frac{T_j}{\sqrt{p_j}}, \quad t_{n+1} = -\sum_{i=1}^n t_i = -S(1-ad). \quad (11)$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} p_i t_i^2 &= \sum_{i=1}^n (t_i \sqrt{p_i})^2 + p_{n+1} t_{n+1}^2 = \sum_{i=1}^n \left(T_i - \frac{aS}{\sqrt{p_i}} \right)^2 + p_{n+1} S^2 (1-ad)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(T_i^2 - \frac{2aS T_i}{\sqrt{p_i}} + \frac{a^2 S^2}{p_i} \right) + p_{n+1} S^2 (1-ad)^2 = \left(\sum_{i=1}^n T_i^2 \right) - 2aS \cdot S + a^2 S^2 \cdot d + p_{n+1} S^2 (1-ad)^2 = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n T_i^2 \right) + S^2 \left[a^2 d(1+p_{n+1}d) - 2a(1+p_{n+1}d) + p_{n+1} \right] = \left(\sum_{i=1}^n T_i^2 \right), \end{aligned}$$

т.к. выражение в квадратных скобках в силу (8) равно 0. Далее:

$$\begin{aligned} -\frac{2i\bar{t}}{\sqrt{\lambda\tau}} (\lambda\bar{p}\tau - \bar{k}) &= -\frac{2i}{\sqrt{\lambda\tau}} \sum_{i=1}^n t_i (\lambda(p_i - p_{n+1})\tau - k_i) = -2i\sqrt{\lambda\tau} \left[\sum_{j=1}^n t_j p_j - p_{n+1} \sum_{j=1}^n t_j - \frac{1}{\lambda\tau} \sum_{j=1}^n k_j t_j \right] = \\ &= -2i\sqrt{\lambda\tau} \left[\sum_{j=1}^n (t_j \sqrt{p_j} - aS) - p_{n+1} S(1-ad) - \frac{1}{\lambda\tau} \sum_{j=1}^n \frac{k_j t_j}{\sqrt{p_j}} + \frac{aS}{\lambda\tau} \sum_{j=1}^n \frac{k_j}{p_j} \right] = \\ &= -2i \sum_{i=1}^n \frac{T_i}{\sqrt{\lambda p_i \tau}} \left[\lambda p_i \tau - k_i - a n \lambda \tau - \lambda p_{n+1} \tau (1-ad) + a \sum_{j=1}^n \frac{k_j}{p_j} \right] = \\ &= -2i \sum_{j=1}^n \frac{T_j}{\sqrt{\lambda p_j \tau}} \left[\lambda(p_j - p_{n+1})\tau - k_j - a \sum_{j=1}^n \frac{\lambda(p_j - p_{n+1})\tau - k_j}{p_j} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} p_j t_j^2 - \frac{2i\bar{t}}{\sqrt{\lambda\tau}} (\lambda\bar{p}\tau - \bar{k}) &= \sum_{j=1}^n \left(T_j - \frac{i}{\sqrt{\lambda p_j \tau}} \left(\lambda(p_j - p_{n+1})\tau - k_j - a \sum_{j=1}^n \frac{\lambda(p_j - p_{n+1})\tau - k_j}{p_j} \right) \right)^2 + \\ &+ \sum_{j=1}^n \frac{\left(\lambda(p_j - p_{n+1})\tau - k_j - a \sum_{j=1}^n \frac{\lambda(p_j - p_{n+1})\tau - k_j}{p_j} \right)^2}{\lambda p_j \tau}. \end{aligned}$$

Тогда интеграл (10) равен:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\det Q}{\sqrt{(2\pi\sqrt{\lambda\tau})^n}} \left(\iint \dots \int_{\Delta_\tau} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n \left(T_j - \frac{i}{\sqrt{\lambda p_j \tau}} \left(\lambda(p_j - p_{n+1})\tau - k_j - a \sum_{j=1}^n \frac{\lambda(p_j - p_{n+1})\tau - k_j}{p_j} \right) \right) \right)^2 \right] d\bar{T} \right) \times \\ &\times e^{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\left(\lambda(p_j - p_{n+1})\tau - k_j - a \sum_{j=1}^n \frac{\lambda(p_j - p_{n+1})\tau - k_j}{p_j} \right)^2}{\lambda p_j \tau}}. \end{aligned}$$

Интеграл, стоящий в скобках, есть интеграл Пуассона по области Δ_τ , которая является образом области D_τ при линейном невырожденном ($\det Q \neq 0$, см. ниже) преобразовании $\bar{t} = Q\bar{T}$. Но $\lim_{\lambda\tau \rightarrow \infty} D_\tau = R^n$, откуда аналогично $\lim_{\lambda\tau \rightarrow \infty} \Delta_\tau = R^n$. Поэтому интеграл в скобках при $\lambda\tau \rightarrow \infty$ стремится к $(\sqrt{2\pi})^n$. Отсюда

$$I \sim \frac{\det Q}{\sqrt{(2\pi\lambda\tau)^n}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\left(\lambda(p_j - p_{n+1})\tau - k_j - a \sum_{l=1}^n \frac{\lambda(p_l - p_{n+1})\tau - k_l}{p_l} \right)^2}{\lambda p_j \tau} \right]. \quad (12)$$

Осталось найти $\det Q$:

$$\begin{aligned} \det Q &= \det \left\| \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{p_i}} - \frac{a}{p_i \sqrt{p_j}} \right\| = \frac{1}{\sqrt{p_1 p_2 \dots p_{n+1}}} \det \left\| \delta_{ij} - \frac{a}{p_i} \right\| = \\ &= \frac{a^n}{(p_1 p_2 \dots p_{n+1})^{3/2}} \det \left\| \frac{p_i \delta_{ij}}{a} - 1 \right\| = \frac{a^n}{(p_1 p_2 \dots p_{n+1})^{3/2}} \det \left\| \frac{p_i \delta_{ij}}{a} - \frac{p_n}{a} \delta_{nj} (1 - \delta_m) - \delta_m \right\| = \\ &= \frac{a^n}{(p_1 p_2 \dots p_{n+1})^{3/2}} \det \left\| \frac{p_i \delta_{ij}}{a} - \frac{p_n}{a} \delta_{nj} (1 - \delta_m) - \delta_m \delta_{nj} \sum_{i=1}^n \frac{p_n}{p_i} \right\| = \frac{a^n \cdot \frac{p_1 p_2 \dots p_{n-1}}{a^{n-1}} \cdot \left(\frac{p_n}{a} - \sum_{i=1}^n \frac{p_n}{p_i} \right)}{(p_1 p_2 \dots p_n)^{3/2}} = \\ &= \frac{a \cdot \left(\frac{1}{a} - d \right)}{\sqrt{p_1 p_2 \dots p_n}} = \frac{1 - ad}{\sqrt{p_1 p_2 \dots p_n}} = \frac{1}{\sqrt{p_1 p_2 \dots p_n (1 + p_{n+1} d)}} = \frac{1}{\sqrt{p_1 p_2 \dots p_{n+1} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_{n+1}} \right)}}, \end{aligned}$$

откуда автоматически следует (9).

Полученное соотношение может служить источником для получения главного члена асимптотического разложения функций Люстерника. Точнее, имеет место

Следствие (асимптотическая формула для функций Люстерника).

Для функций Люстерника $G_k(\bar{x})$ (5) при $S(\bar{x}) \rightarrow \infty$ справедливо соотношение:

$$G_k(\bar{x}) \sim \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n x_1 x_2 \dots x_{n+1} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{n+1}} \right)}} \times \exp \left[S(\bar{x}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\left(x_j - x_{n+1} - k'_j - a(\bar{x}) \sum_{l=1}^n \frac{x_l - x_{n+1} - k'_l}{x_l} \right)^2}{x_j} \right], \quad (9')$$

где обозначено $k'_j = k_j - k_{n+1}$; $j = 1, 2, \dots, n$; $a(\bar{x}) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_{n+1}}{x_i}}} \right)$. (8')

Доказательство

Формула (9') немедленно вытекает из (9) и из леммы 1, если учесть, что $S(\lambda\bar{p}\tau) = \lambda\tau$ и подставить в формулу (4) \bar{x} вместо $\lambda\bar{p}\tau$, тогда $p_i = x_i/S(\bar{x})$.

6. Пример

1. **Функции Люстерника одного переменного.** Пусть $\bar{x} = (x, x, \dots, x)$. Тогда

$$G_{\bar{k}}(\bar{x}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{x^{S(\bar{k} + mA)}}{(k + mA)!} = U_{\bar{k}}(x) - \text{функция Люстерника одного переменного, } A = [1, 1, \dots, 1]. \text{ Из (9')}$$

для $U_{\bar{k}}(x)$ имеем:

$$x_1 = x_2 = \dots x_{n+1} = x; S(\bar{x}) = (n+1)x; a(\bar{x}) = \frac{x}{n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right); \sum_{j=1}^n \frac{x_j - x_{n+1} - k'_j}{x_j} = -\frac{S(\bar{k}')}{x};$$

где $\bar{k}' = (k'_1, k'_2, \dots, k'_n)$. Отсюда:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \frac{\left(x_j - x_{n+1} - k'_j - a(\bar{x}) \sum_{j=1}^n \frac{x_j - x_{n+1} - k'_j}{x_j} \right)^2}{x_j} = \frac{1}{x} \sum_{j=1}^n \left(-k'_j + \frac{S(\bar{k}')}{n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \right)^2 = \\ & = \frac{1}{x} \sum_{j=1}^n \left(k_j'^2 - 2 \frac{k'_j S(\bar{k}')}{n \sqrt{n+1}} (\sqrt{n+1} - 1) + \frac{(S(\bar{k}'))^2 (\sqrt{n+1} - 1)^2}{n^2 (n+1)} \right) = \\ & = \frac{1}{x} \sum_{j=1}^n k_j'^2 + \frac{1}{x} \sum_{j=1}^n (S(\bar{k}'))^2 \left(\frac{2 - 2\sqrt{n+1}}{n \sqrt{n+1}} + \frac{(\sqrt{n+1} - 1)^2}{n^2 (n+1)} \cdot n \right) = \\ & = \frac{1}{x} \left(|\bar{k}'|^2 + (S(\bar{k}'))^2 \left(\frac{2\sqrt{n+1} - 2n - 2 + n + 1 - 2\sqrt{n+1} + 1}{n(n+1)} \right) \right) = \frac{1}{x} \left(|\bar{k}'|^2 - \frac{(S(\bar{k}'))^2}{n+1} \right). \end{aligned}$$

Итак:

$$U_{\bar{k}}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{(2\pi x)^n (n+1)}} \exp \left((n+1)x - \frac{1}{2x} \left(|\bar{k}'|^2 - \frac{(S(\bar{k}'))^2}{n+1} \right) \right) \quad (x \rightarrow \infty). \quad (13)$$

2. **Модифицированные функции Бесселя.** Для модифицированных функций Бесселя

$$I_k(x) = \sum_{m=-k}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{k+2m}}{(k+m)! m!} = U_{\{k,0\}}\left(\frac{x}{2}\right) \text{ из (13) имеем: } n=1; |\bar{k}'| = k = S(\bar{k}'). \text{ Отсюда:}$$

$$I_k(x) = U_{\{k,0\}}\left(\frac{x}{2}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{\left(2\pi \cdot \frac{x}{2}\right) \cdot 2}} \exp \left(2 \cdot \frac{x}{2} - \frac{1}{2 \cdot \frac{x}{2}} \left(k^2 - \frac{k^2}{2} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp \left(x - \frac{k^2}{2x} \right) \quad (x \rightarrow \infty). \quad (14)$$

Аналогичным образом из формулы (9') можно получить асимптотики для многих других функций.

В заключение автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору В.И. Заляпину за постановку задачи, многочисленные обсуждения возникавших вопросов и результатов, а также за предоставленное техническое и информационное обеспечение.

Литература

1. Люстерник Л.А. Об одной задаче теории массового обслуживания и связанном с ней обобщении цилиндрических функций // ДАН СССР. – 1967. – Т. 177, № 5.
2. Заляпин В.И., Люстерник Л.А. О системе функций пуассоновского блуждания // ДАН СССР. – 1972. – Т. 207. – Вып. 1.
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1984. – Т. II. – С. 738.