УДК 532.137.3

О НЕРЕГУЛЯРНОМ РЕЖИМЕ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ВИСКОЗИМЕТРЕ ШВИДКОВСКОГО Е.Г.

И.В. Елюхина

Исследован переходный режим крутильных колебаний в вискозиметре Швидковского Е.Г. и выявлены условия, при которых справедливо положение о регулярности режима.

В основе теории крутильно-колебательного метода измерения вязкости жидкости [1] лежит положение о *регулярном режиме* колебаний, т.е. предполагается, что начальное распределение скоростей не оказывает влияния на движение среды. Рассмотрим развитие данного режима и изучим случаи, не позволяющие корректно решить вискозиметрическую задачу при пренебрежения переходными процессами.

Для этого воспользуемся зависимостью для амплитуды колебаний, полученной Дж.Кестином и Ф.Ньюэллом [2] при решении нестационарной задачи крутильных колебаний цилиндра операторным методом:

$$\alpha(\bar{t}) = -\alpha_0 \sum_k \frac{(1+\Delta_0^2)\exp(S_k\bar{t})}{S_k\left[2S_k + 2\Delta_0 + dL(s)/ds\big|_{S_k}\right]}, \tag{1}$$

где S_k – корни уравнения

$$(S_k+\Delta_0)^2 + 1 + L(S_k) = 0,\ L(S_k) = S_k K' K^{-1}\left[\frac{4J_2(\sqrt{S_k}\xi_0 i)}{\sqrt{S_k}\xi_0 i J_1(\sqrt{S_k}\xi_0 i)} + 4S_k\eta_0^{-1}\sum_n \frac{th(s_\mu\eta_0)}{\mu_n^2 s_\mu^3}\right], \tag{2}$$

$L(S_k)$ – функция трения, определенная в (2) для вискозиметра со свободной поверхностью; α – угловое смещение цилиндра; α_0 – начальное смещение; $K' = MR^2/2$; $\Delta_0 = \delta_0/(2\pi)$; $\bar{t} = q_0 t$; $\xi_0 = R/d$; $\eta_0 = H/d$; $d = \sqrt{\nu/q_0}$; $s_\mu^2 = S_k + \mu_n^2/\xi_0^2$; μ_n – корни уравнения $J_1(\mu_n) = 0$; t – время, остальные обозначения – см. в работе [3], представленной в настоящем сборнике.

Установлено, что уравнение (2) имеет два комплексно сопряженных корня:

$$S_k = s_{1,2} = {}^{q}\!/_{q_0}(-\Delta \pm i), \tag{3}$$

отвечающие *регулярному режиму,* и бесконечное множество отрицательных действительных корней, которые можно определить графическим способом.

Сравним параметры переходного и основного процессов *для длинного цилиндра,* т.е. учтем только первое слагаемое в правой части выражения для функции трения (2). Длительность затухания возмущений, вызванных переходными процессами по сравнению с регулярными колебаниями охарактеризуем, например, соотношением

$$U = U1 - U2, \tag{4}$$

где $U1 = |S_1|$, S_1 – минимальный по модулю корень для соответствующего значения ξ_0, характеризующий затухание самого медленного из переходных возмущений, $U2 = |\mathrm{Re}(s_{1,2})| = q\Delta/q_0$ – модуль действительной части от корней $s_{1,2}$,

Для длинного цилиндра корень S_1 можно считать приближенно равным

$$S_1 = {}^{\mu_1^2}\!/_{\xi_0^2}. \tag{5}$$

Выразим декремент затухания колебаний Δ заполненного жидкостью вискозиметра согласно приближенной зависимости Швидковского Е.Г. [1]:

$$\Delta(\xi)=\mathrm{Re}\left[\frac{2K'}{K}\left(\frac{\sqrt{i}}{\zeta}\,\frac{J_0\left(\xi\sqrt{i}\right)}{J_1\left(\xi\sqrt{i}\right)}-\frac{2}{\zeta^2}\right)\right], \tag{6}$$

где Re, Im – действительная и мнимая части от комплексного выражения; $\xi=R/\delta'$; $\delta'=\sqrt{\nu/q}$, т.е. $\xi=\xi_0\sqrt{q/q_0}$, где $\sqrt{q/q_0}$ можно представить согласно [1] как

$$\sqrt{q/q_0}=1\Big/\sqrt{1+w(\xi)},\; w(\xi)=-\mathrm{Im}\left[\frac{4K'}{K}\left(\frac{\sqrt{i}}{\zeta}\cdot\frac{J_0\left(\zeta\sqrt{i}\right)}{J_1\left(\zeta\sqrt{i}\right)}-\frac{2}{\zeta^2}\right)\right]. \tag{7}$$

Из рис. 1 видно, что при $\xi>\xi_{\lim}$ колебательное движение, описывающее так называемый установившийся режим, затухает быстрее, чем апериодическое движение, характеризующее переходный процесс, в то время как при $K'K^{-1}>0.3$ реализуются условия эксперимента ($\xi<25$), достаточно часто встречающиеся на практике (рис. 2).

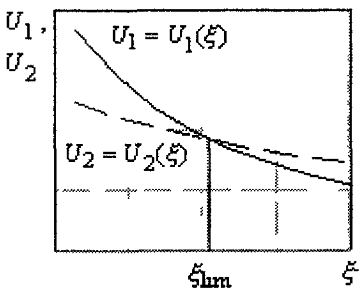

Рис. 1. Зависимость корней от параметра ξ

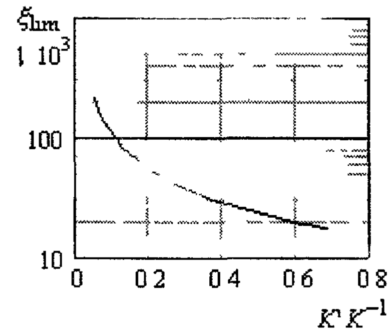

Рис. 2. Зависимость ξ_{lim} от отношения K'/K

Исследуем также поведение отношения величин основного, регулярного, процесса и накладываемых на него негармонических возмущений:

$$\bar{\alpha}=\alpha_{reg}/\alpha_{nreg}, \tag{8}$$

где α_{reg}, α_{nreg} – модули $\alpha(\bar{t})$ (1), определенные при корнях $s_{1,2}$ (3) и S_1 (5). Очевидно, что при $\xi>\xi_{\lim}$ значение $\bar{\alpha}$ (8) со временем уменьшается. Интересным представляется определение предельного значения ξ^*, такого, что при $\xi<\xi^*$ после n_τ колебаний величина $\bar{\alpha}$ превышает 10^{k_τ}. Результаты, полученные для $n_\tau=5$, $k_\tau=4$, проиллюстрированы на рис. 3.

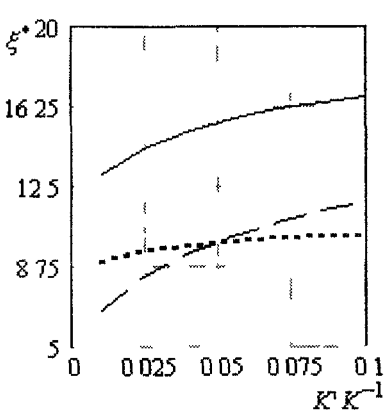

Рис. 3. Зависимость $\xi^*=\xi^*\left(K'/K\right)$

----- – $n_\tau=0$, $k_\tau=3$;
—— – $n_\tau=5$, $k_\tau=3$;
.... – $n_\tau=5$, $k_\tau=5$

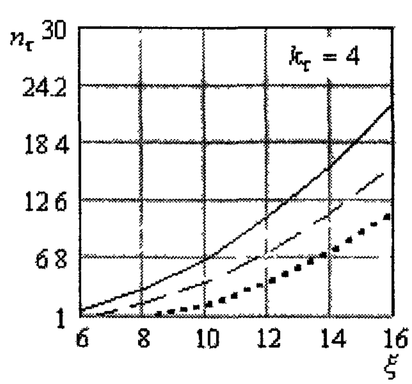

Рис. 4. Зависимость числа колебаний в переходном режиме от ξ:

—— – $K'K^{-1}=10^{-3}$;
----- – $K'K^{-1}=10^{-2}$;
•••• – $K'K^{-1}=10^{-1}$

Представляя $S_k \bar{t}$ в зависимости (1) как $2\pi S_k \cdot k \cdot q_0 / q$, где q_0 / q определяется из (7), находим число колебаний n_τ, проходимых для установления требуемого режима при различных условиях эксперимента, т.е. при различных ξ (рис. 4).

Таким образом, в настоящем исследовании *теория нерегулярного режима крутильных колебаний* для ньютоновских жидкостей дополнена практическими приложениями, к которым необходимо обращаться в каждом вискозиметрическом эксперименте. Задача решена для начальных условий: $\alpha(0) = \alpha_0$, $d\alpha / dt|_{t=0} = 0$.

Литература

1. Швидковский Е.Г. Некоторые вопросы вязкости расплавленных металлов. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 206 с.

2. Kestin J., Newell G.F. Theory of oscillating type viscometers: the oscillating cup. Part I. // *J. Appl. Math. Phys., ZAMP*. – 1957. – V. 8. – P. 433–449.

3. Елюхина И.В. Планирование оптимального эксперимента по одновременному определению вязкости и плотности ньютоновской среды – см. в наст. сборнике.