УДК 513.71

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ СУММЫ МНОГОГРАННИКОВ

М.В. Уханов

Предложен алгоритм точного построения суммы по Минковскому двух многогранников, заданных системами линейных неравенств.

Введение

Определение. Суммой по Минковскому двух множеств P_1 и P_2 из n-мерного евклидового пространства $\Re^n$ называется множество $P \in \Re^n$ такое, что

$$P = P_1 + P_2 \triangleq \{x \in \Re^n \,|\, x = x_1 + x_2,\, x_1 \in P_1,\, x_2 \in P_2\}$$

или по-другому

$$P = P_1 + P_2 \triangleq \bigcup_{x_1 \in P_1} (x_1 + P_2).$$

В том специальном случае, когда каждое из множеств P_1 и P_2 содержит только по одной точке, эта операция совпадает с обыкновенным сложением векторов. Особого внимания заслуживает выполнение операции над пустым множеством $\varnothing$, а именно: $A + \varnothing = \varnothing$. Операция сложения, очевидно, коммутативна и ассоциативна, то есть

$$P_1 + P_2 = P_2 + P_1; \quad P_1 + (P_2 + P_3) = (P_1 + P_2) + P_3.$$

Из определения суммы по Минковскому легко следует, что сумма $P_1 + P_2$ зависит от относительного положения P_1 и P_2 по отношению к началу координат. Но все получающиеся при изменении этого относительного положения различные суммы совмещаются параллельным переносом. Обозначим через α и β два параллельных переноса и через $\alpha\beta$ – результат их последовательного выполнения. Тогда

$$P_1^\alpha + P_2^\beta = (P_1 + P_2)^{\alpha\beta}.$$

При сложении по Минковскому выпуклых многогранников опорная функция ведет себя просто. Обозначим через $h(A,u)$ величину опорной функции произвольного выпуклого многогранника A в направлении u. Тогда

$$h(P_1 + P_2, u) = h(P_1, u) + h(P_2, u),$$

то есть величины опорных функций в фиксированном направлении складываются.

Задача построения суммы множеств является одной из задач вычислительной геометрии [1]. Когда многогранные множества P_1 и P_2 заданы множествами своих вершин

$$V_1 = \{v_1^1, v_1^2, \ldots, v_1^{k_1}\},$$

$$V_2 = \{v_2^1, v_2^2, \ldots, v_2^{k_2}\}.$$

Тогда построение суммы сводится к построению выпуклой оболочки

$$P = P_1 + P_2 = conv\{v_1^i + v_2^j \,|\, v_1^i \in V_1,\, v_2^j \in V_2\},$$

то есть, к нахождению вершин вида $v_1^i + v_2^j$, лежащих на границе выпуклой оболочки. Известные в настоящее время алгоритмы построения выпуклой оболочки из N точек в n-мерном пространстве имеют время решения $O(N^{\lfloor n/2 \rfloor + 1})$ [1, с. 172], что неприемлемо для многих практических задач. Кроме того, зачастую удобнее представлять многогранник не своими вершинами, а гранями. Способ задания множества его гранями, как правило, требует меньшего объема памяти по сравнению с заданием множества вершинами.

Будем рассматривать суммирование многогранников, заданных системами линейных неравенств (гранями)

$$P_1 = \{x_1 \in \Re^n \,|A_1 x_1 \le b_1,\, A_1 \in \Re^{m_1 \times n},\, b_1 \in \Re^{m_1}\},$$
$$P_2 = \{x_2 \in \Re^n \,|A_2 x_2 \le b_2,\, A_2 \in \Re^{m_2 \times n},\, b_2 \in \Re^{m_2}\}.$$

В настоящей работе, опираясь на идеи статьи А.В. Лотова о задаче построения множеств достижимости [2], разработан алгоритм построения суммы P многогранников P_1 и P_2 в виде системы линейных неравенств

$$P = \{x \in \Re^n \,|Ax \le b,\, A \in \Re^{m \times n},\, b \in \Re^m\}.$$

1. Алгоритм построения суммы

Для нахождения суммы запишем систему линейных неравенств и равенств относительно переменных $x \in \Re^n$, $x_1 \in \Re^n$ и $x_2 \in \Re^n$

$$\begin{cases} x - x_1 - x_2 = 0; \\ A_1 x_1 \le b_1; \\ A_2 x_2 \le b_2. \end{cases} \qquad (1)$$

Заменяем в системе (1) x_1 на разность $x - x_2$ и получаем эквивалентную ей систему относительно переменных x и x_2

$$\begin{cases} A_1 x - A_1 x_2 \le b_1; \\ A_2 x_2 \le b_2. \end{cases} \qquad (2)$$

Тогда имеет место утверждение

$$x \in P \Leftrightarrow \exists x_2 : -A_1 x_2 \le b_1 - A_1 x,\, A_2 x_2 \le b_2. \qquad (3)$$

Доказательство.

$\Rightarrow$ Пусть $x \in P$. Тогда по определению суммы по Минковскому $\exists x_1 \exists x_2 : A_1 x_1 \le b_1,\, A_2 x_2 \le b_2$ такие, что $x = x_1 + x_2$. Следовательно, $x_1 = x - x_2$ и $-A_1 x_2 \le b_1 - A_1 x$.

$\Leftarrow$ Пусть $\exists x_2 : -A_1 x_2 \le b_1 - A_1 x,\, A_2 x_2 \le b_2$. Обозначим через $x_1 = x - x_2$. Тогда $x = x_1 + x_2$, $A_1 x_1 \le b_1$, $A_2 x_2 \le b_2$. То есть x принадлежит сумме P.

Введем обозначения

$$C = \begin{pmatrix} -A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \in \Re^{(m_1 + m_2) \times n},\quad d = \begin{pmatrix} b_1 - A_1 x \\ b_2 \end{pmatrix} \in \Re^{m_1 + m_2}$$

и запишем (2) в матричной форме

$$C x_2 \le d. \qquad (4)$$

Теорема Минковского-Фаркаша [3, с. 139]. Для того чтобы система линейных неравенств $C x_2 \le d$ имела решения необходимо и достаточно, чтобы для любого такого y, что

$$C^T y = 0, \quad y \ge 0 \qquad (5)$$

выполнялось условие

$$(d, y) \ge 0 \qquad (6)$$

или по-другому

$$\exists x_2 : C x_2 \le d \Leftrightarrow \forall y : C^T y = 0,\, y \ge 0 \Rightarrow (d, y) \ge 0.$$

Заметим, что всякое решение (5) можно представить в виде суммы с неотрицательными коэффициентами конечного числа фундаментальных решений этой системы. Таким образом, условие (6) необходимо проверять только для фундаментальных решений (5). Из утверждения (3) и теоремы Минковского-Фаркаша получаем следствие

$$x \in P \Leftrightarrow \forall y : C^T y = 0,\, y \ge 0 \Rightarrow (d, y) \ge 0. \qquad (7)$$

Найдем с помощью схемы Н.Б. Черниковой [4] все фундаментальные решения системы уравнений с матрицей C^T. Пусть их число k. Обозначим через $V \in \Re^{k \times (m_1 + m_2)}$ матрицу, строки которой являются фундаментальными решениями. Через $V_1 \in \Re^{k \times m_1}$ обозначим ту часть матрицы, которая соответствует неравенствам матрицы $-A_1$, а через $V_2 \in \Re^{k \times m_2}$ – ту часть, которая соответствует неравенствам матрицы A_2. Тогда неравенства (6) запишутся в виде

$$V_1(b_1 - A_1x) + V_2b_2 \geq 0.$$

Введем обозначения

$$A = V_1A_1, \quad b = V_1b_1 + V_2b_2. \tag{8}$$

Следовательно, сумма будет описываться ограничениями $Ax \leq b$.

В итоге, построение суммы двух многогранников сводится к нахождению общей формулы неотрицательных решений системы однородных линейных уравнений и использованию формул (8).

Замечание 1. Если в строке матрицы V есть положительные элементы как в V_1 так и в V_2, то строка дает неравенство суммы, иначе – нет.

Вычислительная схема. Н.Б. Черниковой [3] разработан алгоритм для нахождения общей формулы неотрицательных решений системы однородных линейных уравнений $Ax = 0$, сводящийся к последовательным однотипным преобразованиям таблицы

$$V^1 = (V_1^1 \quad V_2^1) = (E \quad A^T) \in \Re^{n \times 2m},$$

в которой $E \in \Re^n$ – единичная матрица (левая часть таблицы), $A^T \in \Re^{n \times m}$ – правая часть таблицы. Эти преобразования, не меняющие числа столбцов в левой и правой частях таблицы, проводятся по следующему правилу.

Пусть уже составлены таблицы $V^2, \ldots, V^{t-1}$. Тогда для составления таблицы V^t выделим в правой части таблицы V^{t-1} произвольный ненулевой столбец (если он имеется), например первый столбец; назовем его основным столбцом таблицы V^{t-1}. Переносим без изменения в очередную таблицу V^t те строки таблицы V^{t-1}, на пересечении которых с основным столбцом стоят нули (если такие строки имеются). Выделяем далее в таблице V^{t-1} любую пару строк, на пересечении которых с основным столбцом находятся ненулевые элементы противоположных знаков (понятно, что таких строк может и не быть). Такую пару называют допустимой парой. Если таблица V^{t-1} содержит более двух строк, и существуют столбцы таблицы V_1^{t-1}, пересекающие по нулевым элементам обе строки допустимой пары, но не существует никакой другой строки таблицы V^{t-1}, пересекающейся по нулевым элементам со всеми столбцами такого рода, то при этом условии допустимую пару строк называют уравновешенной. Если таблица V^{t-1} содержит только две строки, и они составляют допустимую пару, то последняя считается уравновешенной. Строкой равновесия уравновешенной допустимой пары строк таблицы V^{t-1} называют такую их линейную комбинацию с положительными коэффициентами, которая пересекается по нулевому элементу с основным столбцом. Строки равновесия всех уравновешенных пар строк таблицы V^{t-1} вносятся в таблицу V^t. На этом составление таблицы заканчивается.

Через конечное число шагов рассматриваемый процесс оканчивается, так как в правой части очередной таблицы либо не окажется ненулевых столбцов (и, значит, применение к этой таблице правила преобразования не изменит ее), либо столбец, который принят за основной столбец, не содержит нулей и не определяет уравновешенных допустимых пар строк (следующая таблица – пуста). В первом случае минимальную систему образующих элементов конуса неотрицательных решений системы линейных уравнений составляют строки левой части последней из таблиц, а во втором – конус не содержит ненулевых элементов.

Замечание 2. Очевидно, число преобразований зависит не только от матрицы данной системы уравнений, но и от выбора основных столбцов. Для сокращения процесса отыскания ненулевых решений следует по возможности принимать за основной такой столбец правой части очередной таблицы, который определял бы новую таблицу с возможно меньшим числом строк. Если, в частности, в правой части очередной (в том числе и исходной) таблицы имеется столбец, все элементы которого отрицательны, то, очевидно, сразу же можно сказать, что данная система не имеет ненулевых неотрицательных решений.

Временная сложность алгоритма построения суммы. В разработанном алгоритме суммирования основной и самой трудоемкой по времени вычисления операцией является нахождение общей формулы неотрицательных решений системы однородных линейных уравнений методом Н.Б. Черниковой для специальной задачи. Метод Н.Б. Черниковой хоть и ускоряет работу метода исключений Фурье-Моцкина [2, с. 239] для нахождения неотрицательных решений системы линейных уравнений, но все равно не является полиномиальным алгоритмом в общем случае.

В 1982 году Нельсон установил [2, с. 242], что метод исключений Фурье-Моцкина для систем, каждое ограничение которых содержит не более двух переменных (то есть коэффициенты при остальных переменных – нули), имеет порядок времени работы

$$O(m \cdot n^{\lceil 2\log n \rceil + 3} \cdot \log n),$$

где m – число неравенств и n – число переменных.

2. Пример

Пусть суммируемые множества $P_1 \in \Re^3$ – куб, $P_2 \in \Re^3$ – пирамида

$$P_1 = \begin{cases} x_1 & \le 1; \\ x_2 & \le 1; \\ x_3 & \le 1; \\ -x_1 & \le 0; \\ -x_2 & \le 0; \\ -x_3 & \le 0; \end{cases} \quad \text{и} \quad P_2 = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & \le 1; \\ -x_1 & \le 0; \\ -x_2 & \le 0; \\ -x_3 & \le 0. \end{cases}$$

В соответствии с изложенной вычислительной схемой составим таблицу

$$V^1 = (V_1^1 \quad V_2^1) = \left(\begin{array}{cccccccccc|ccc} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&-1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&-1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&-1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&-1 \end{array}\right)$$

и, считая первый столбец ее правой части основным, преобразуем ее в новую таблицу

$$V^2 = (V_1^2 \quad V_2^2) = \left(\begin{array}{cccccccccc|ccc} 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&-1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&-1 \\ 1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1 \end{array}\right).$$

Считая второй столбец таблицы основным, преобразуем ее в следующую таблицу

$$V^3=(V_1^3\quad V_2^3)=\left(\begin{array}{cccccccccc|ccc}
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&-1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&-1\\
1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&0&1\\
0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1
\end{array}\right)$$

По ней составляем таблицу

$$V=(V_1\quad V_2)=V^4=(V_1^4\quad V_2^4)=\left(\begin{array}{cccccccccc|ccc}
1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&1&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&1&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0
\end{array}\right).$$

Строки левой части таблицы составляют минимальную систему образующих элементов конуса неотрицательных решений рассматриваемой системы уравнений. Используя формулы (8), получаем

$$A^T=\begin{pmatrix}
0&-1&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&0&0&-1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&-1&1&1&1&1&0&0&0&0
\end{pmatrix},$$

$$b^T=(1\quad 0\quad 1\quad 0\quad 1\quad 0\quad 4\quad 3\quad 3\quad 2\quad 3\quad 2\quad 1\quad 1).$$

Удаляя лишние неравенства, получаем описание суммы P куба и пирамиды

$$\begin{cases} -x_1 & & & \le & 0; \\ & -x_2 & & \le & 0; \\ & & -x_3 & \le & 0; \\ x_1 & & & \le & 2; \\ & x_2 & & \le & 2; \\ & & x_3 & \le & 2; \\ x_1 & +x_2 & & \le & 3; \\ x_1 & & +x_3 & \le & 3; \\ & x_2 & +x_3 & \le & 3; \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & \le & 4. \end{cases}$$

Заключение

Разработан алгоритм точного построения суммы многогранников. Алгоритм не использует вершины многогранника и может применяться в задачах вычислительной геометрии, когда наложены ограничения по объему используемой памяти для задания множеств.

Работа поддержана грантами РФФИ – УРАЛ № 01–01–96419 и МО № ТОО / 13.2 / 2647.

Литература

1. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: Введение. – М.: Мир, 1989. – 478 с.
2. Лотов А.В. Численный метод построения множеств достижимости для задач быстродействия // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* – 1975. – Т. 15, № 1. – С. 67–79.
3. Бренстед А. Введение в теорию выпуклых многогранников. – М.: Мир, 1988. – 240 с.
4. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. В 2-х т. – М.: Мир, 1991. – Т. 1. – 360 с.
5. Черникова Н.Б. Алгоритм для нахождения общей формулы неотрицательных решений системы линейных уравнений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* – 1964. – Т. 4, № 4. – С. 733–738.