УДК 512.54

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ ИЗ КОУРОВСКОЙ ТЕТРАДИ

В.А. Антонов, В.И. Осмоловский

Приведено решение вопроса 10.1 из Коуровской тетради.

С.Н. Адамов и А.Н. Фомин поставили задачу ([1], вопрос 10.1.) описания групп порядка p^9 и ступени нильпотентности 2, содержащих такие подгруппы X и Y, что $|X|=|Y|=p^3$ и любые неединичные элементы $x\in X$ и $y\in Y$ неперестановочны. Решением этой задачи является следующая теорема.

Теорема. *Пусть G – двуступенно нильпотентная группа порядка p^{3n}. Группа G в том и только том случае содержит такие подгруппы X и Y порядков p^n, что любые неединичные элементы $x\in X$ и $y\in Y$ неперестановочны, когда*

$$G=(x\times Z)\lambda Y,$$

где

$$X=\prod_{i=1}^{n}\langle x_i\rangle,\ Y=\prod_{i=1}^{n}\langle y_i\rangle,\ Z=\prod_{i=1}^{n}\langle z_i\rangle -$$

элементарные абелевы группы порядка p^n, $[y_i,z_j]=1$, $[x_i,y_j]=\sum_{k=1}^{n} z_k^{t_{ijk}}$ для $i,j=1,2,\ldots,n$, причем матрицы $A_k=(t_{ijk})$ D-независимы, т.е. из $\det(\sum_{k=1}^{n}\beta_k A_k)\equiv 0(p)$ следует, что $\beta_k\equiv 0(p)$ для всех $k=1,2,\ldots,n$.

Доказательство. Пусть G – группа из условия теоремы, $Z=Z(G)$. Так как $Z\cap X=Z\cap Y=1$ и фактор-группа G/Z абелева, то подгруппы X и Y тоже абелевы и $X\times Z\lhd G$. Из $X\times Z\le C(X)$ следует, что $(X\times Z)\cap Y=1$. Если $x\in X$ и $y_1,y_2\in Y$ неединичные элементы, то из $[x,y_1]=[x,y_2]$ получим, что $y_1y_2^{-1}\in C(x)\cap Y=1$. Поэтому $Z=G'$ имеет порядок p^n, $G=(X\times Z)\lambda Y$ и для любых неединичных элементов $x_1\in X$ и $y_1\in Y$ выполняются равенства

$$Z=\{[x_1,y]\mid y\in Y\}=\{[x,y_1]\mid x\in X\}.$$

Пусть $x\in X$, $y\in Y$, $g=xy\ne 1$ и $y_1\in Y$. Из предыдущего абзаца доказательства следует, что найдется такой элемент $x_1\in X$, что $[x,y_1]=[x_1,y]$. Но тогда $x_1y_1\in C(g)$. Это означает, что $|C(g)|=p^{2n}$ для любого $g\in G\setminus Z$. Но тогда $C^2(g)=C(C(g))$ является минимальным централизатором в группе G. Поэтому подгруппы вида $C^2(g)$, где $g\in G$, индуцируют расщепление абелевой группы G/Z. Так как это расщепление содержит две компоненты порядка p^n (XZ/Z и YZ/Z), то G/Z – элементарная абелева группа. Но тогда каждая из подгрупп X, Y, а следовательно и Z, тоже является элементарной абелевой группой. Пусть

$$X=\prod_{i=1}^{n}\langle x_i\rangle,\ Y=\prod_{i=1}^{n}\langle y_i\rangle,\ Z=\prod_{i=1}^{n}\langle z_i\rangle.$$

Предположим, что $[x_i,y_j]=\prod_{k=1}^{n} z_k^{t_{ijk}}$ и $A_k=(t_{ijk})$. Покажем, что матрицы A_k D – независимы. Пусть $\det(\sum_{k=1}^{n}\beta_k A_k)=0$ в поле $GF(p)$. Тогда система линейных уравнений

$$(\sum_{k=1}^{n} \beta_k A_k)[x] = [0]$$

имеет ненулевое решение $[a] = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^t$. Если положить $x = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\beta_i}$ и $y = \prod_{i=1}^{n} y_i^{\alpha_i}$, то, как нетрудно видеть, будем иметь

$$[x, y] = \left[\prod_{i=1}^{n} x_i^{\beta_i}, \prod_{j=1}^{n} y_j^{\alpha_j} \right] = \prod_{i,j,k} z_k^{\beta_i \alpha_j t_{ijk}} = \prod_{k=1}^{n} z_k^{\sum \beta_i \alpha_j t_{ijk}} = 1.$$

Поэтому из $C(y) = Z \cdot Y$ получаем $x = 1$, т.е. $\beta_k = 0$ для $k = 1,2,...n$.

Достаточность утверждения теоремы очевидна.

Сделаем некоторые дополнительные замечания. Выберем образующие $x_1, x_2, ..., x_n$ подгруппы X произвольным образом. И пусть $y_1 \in Y \setminus 1$, а y_i при $i > 1$ определяются равенствами $[x_1, y_i] = [x_i, y_1]$. Кроме того, положим $z_i = [x_1, x_i]$. Построенную таким образом систему образующих группы G назовем согласованным базисом. В случае согласованного базиса в матрицах A_k выполняются равенства

$$t_{1ik} = t_{i1k} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k, \\ 1, & \text{если } i = k. \end{cases}$$

Предположим, что в группе G существует отличная от $X \times Z$ и $Y \times Z$ абелева подгруппа B порядка p^{2n}. И пусть $B = C(ab)$, где $a \in X$ и $b \in Y$. Положим $x_1 = a$, $y_1 = b$. Если дополнить элементы x_1 и y_1 до согласованного базиса то из $C(x_1 y_1) = Z \cdot \prod_{i=1}^{n} \langle x_i y_i \rangle$ и $[x_i y_i, x_j y_j] = 1$ получим, что матрицы A_k являются симметрическими матрицами.

Если $n = 1$, то G – неабелева группа порядка p^3. При $n = 2$ в группе G все собственные централизаторы абелевы, т.е. матрицы A_k симметричны в любом согласованном базисе. Рассмотрим случай $n = 3$. Если $p = 2$, то в группе G снова все собственные централизаторы абелевы. Если же $p > 2$, то могут реализоваться все перечисленные ниже возможности.

В группе G все собственные централизаторы абелевы, т.е. матрицы A_k симметрические при любом выборе согласованного базиса. Примером таких групп являются группы $UT(3, p^3)$.

В группе G более двух абелевых подгрупп порядка p^6 и есть неабелев собственный централизатор, т.е. в зависимости от выбора согласованного базиса матрицы A_k могут быть как симметрическими, так и несимметрическими. Такой является, например, группа указанного в теореме типа, имеющая порядок 3^9 и определяющие отношения

$$[x_1, y_1] = z_1, [x_1, y_2] = [x_2, y_1] = z_2, [x_1, y_3] = [x_2, y_2] = [x_3, y_1] = z_3,$$
$$[x_2, y_3] = z_1 z_3, [x_3, y_2] = z_1 z_2, [x_3, y_3] = z_2 z_3.$$

В этой группе $C(x_1 y_1)$ неабелев, а $C(x_1 y_2^{-1})$ абелев.

В группе G ровно две абелевых подгруппы порядка p^6. В этом случае в любом согласованном базисе хотя бы одна из матриц A_k не является симметрической матрицей. Такую группу получим, если в примере из предыдущего абзаца положить $[x_3, y_2] = z_1 z_2 z_3^2$ и $[x_3, y_3] = z_2$.

Литература

1. Нерешенные вопросы теории групп // *Коуровская тетрадь*. – 13-е изд. – Новосибирск, 1995. - 130 с.