

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПОЛЮСОВ $(\lambda-1)$ -Й СТРОКИ ТАБЛИЦЫ ПАДЕ

*В.М. Адуков, Д.Н. Микушин*

Целью работы является численное моделирование асимптотического поведения знаменателей аппроксимацией Паде для строки с номером  $(\lambda-1)$ . Рассмотрены примеры, демонстрирующие разнообразие геометрии множества предельных точек полюсов аппроксимации Паде.

Эта работа является продолжением статей [1], [2]. В них рассматривалась мероморфная в круге  $|z| < R$  и аналитическая в окрестности  $z = 0$  функция  $a(z)$ , имеющая в точках  $z_1, \dots, z_\ell$  полюсы кратностей  $s_1, \dots, s_\ell$ , соответственно. Пусть  $\lambda = s_1 + \dots + s_\ell$  – общее число полюсов  $a(z)$  в данном круге. В работах [1], [2] построена полная теория сходимости  $(\lambda-1)$ -й строки таблицы Паде для функции  $a(z)$ . Оказалось, что предельное поведение полюсов аппроксимации Паде  $\pi_{n,\lambda-1}(z) = \frac{P_{n,\lambda-1}(z)}{Q_{n,\lambda-1}(z)}$  при  $n \rightarrow \infty$  полностью определяется арифметической природой доминирующих полюсов  $z_1, \dots, z_\nu$  функции  $a(z)$  и коэффициентами  $A_1, \dots, A_\nu$  старших членов ряда Лорана  $a(z)$  в окрестности этих полюсов. Доминирующими полюсами мы называем те полюсы  $a(z)$  максимального модуля, которые имеют максимальную кратность. Предельные точки множества полюсов семейства  $\{\pi_{n,\lambda-1}(z)\}_{n=0}^\infty$  состоят из точек  $z_1, \dots, z_\ell$  и нулей семейства многочленов  $\omega(z, \tau) = \sum_{j=1}^\nu C_j \Delta_j(z) \tau_j$ . Последнее множество назовем множеством дополнительных предельных точек и обозначим  $\mathcal{M}_\mathbb{F}$ . Формула для вычисления коэффициентов  $C_j$  имеет следующий вид

$$C_j = \frac{1}{(s_j - 1)! z_j^{s_j - 1} D_j^2(z_j) A_j}, \quad (1)$$

где  $D_j(z) = \frac{D(z)}{(z-z_j)^{s_j}}$ ,  $D(z) = (z-z_1)^{s_1} \dots (z-z_\ell)^{s_\ell}$  и  $A_j$  – коэффициент при  $(z-z_j)^{-s_j}$  в разложении мероморфной функции  $a(z)$  в ряд Лорана в окрестности полюса  $z = z_j$ . Многочлены  $\Delta_j(z)$  и параметры  $\tau_j$  определяются следующим образом:  $\Delta_j = \frac{\Delta(z)}{z-z_j}$ ;  $\Delta(z) = (z-z_1) \dots (z-z_\nu)$ ;  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_\nu) \in \mathbb{F}$ , где  $\mathbb{F}$  – монотетическая подгруппа  $\mathbb{T}^\nu$ , полученная замыканием циклической группы с образующей  $(e^{2\pi i \Theta_1}, \dots, e^{2\pi i \Theta_\nu})$ ;  $2\pi i \Theta_j$  – аргумент  $z_j$ . Группа  $\mathbb{F}$  явно вычислена в [1]. Геометрия  $\mathcal{M}_\mathbb{F}$  в некоторых важных частных случаях изучена в [2].

Цель данной работы – проиллюстрировать на числовых примерах результаты, полученные в [2]. Кроме того, вычисляя нули достаточно обширного подмножества семейства  $\{\omega(z, \tau)\}_{\tau \in \mathbb{F}}$ , мы численно промоделируем геометрию  $\mathcal{M}_\mathbb{F}$  в тех случаях, когда явно построить это множество не удастся. Все вычисления выполнены с использованием системы "MapleB". Были созданы процедура нахождения группы  $\mathbb{F}$  по матрице линейных зависимостей аргументов  $\Theta_1, \dots, \Theta_\nu$  (см. §1 статьи [1]), процедура вычисления коэффициентов  $C_j$  и процедура нахождения знаменателей аппроксимаций Паде типа  $(n, \lambda-1)$  для рациональной дроби  $r(z)$  с помощью рекуррентного процесса

$$V_{k+1}(z) = zV_k(z) - v_k D(z), \quad k \geq 0. \quad (2)$$

Здесь  $v_k$  старший коэффициент многочлена  $V_k(z)$ , а начальное условие  $V_0(z)$  находится с помощью алгоритма Евклида из уравнения Безу  $U_0(z)D(z) + V_0(z)N(z) = 1$ ,  $r(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$  – рациональная часть мероморфной функции  $a(z)$ . Последняя процедура значительно эффективнее стандартной функции "rade" пакета "Maple6".

<sup>10</sup> Рассмотрим прежде всего случай  $\nu = 1$ . Теорема 1 из [2] утверждает, что в этом и только в этом случае вся последовательность  $Q_{n,\lambda-1}(z)$  имеет предел. Продемонстрируем этот факт примером.

**Пример 1.** Рассмотрим мероморфную функцию

$$a(z) = e^z + \frac{1}{(z-1)(z+2)(z-2)^2}$$

с рациональной частью

$$r(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)(z-2)^2}.$$

В этом случае имеется только один доминирующий полюс  $z = 2$  кратности 2 и  $\nu = 1$ ,  $\lambda = 4$ . Обозначим через  $Q_n(a, z)$  и  $Q_n(r, z)$  нормированные знаменатели аппроксимаций Паде типа  $(n, 3)$  для функций  $a(z)$  и  $r(z)$ , соответственно. По теореме 1 имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(a, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(r, z) = W(z),$$

где  $W(z) = (z-1)(z+2)(z-2) = 4 - 4z - z^2 + z^3$

В таблице (см. Приложение) приведены результаты численной проверки с помощью функции "rade" системы "Maple6" асимптотического поведения знаменателей  $Q_n(a, z)$  и  $Q_n(r, z)$  для  $n \in [1; 200]$ , которые подтверждают этот вывод.

<sup>20</sup> Полное описание геометрии множества  $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$  имеется только при  $\nu = 2$  (см. теорему 2 в [2]). Если доминирующие полюсы  $z_1, z_2$  лежат в вершинах правильного  $\sigma$ -угольника. то  $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$  состоит из конечного числа ( $\sigma$  или  $\sigma - 1$ ) точек, лежащих на окружности Аполлония

$$\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = \left| \frac{C_1}{C_2} \right|. \tag{3}$$

В противном случае множество  $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$  совпадает со всей окружностью Аполлония. Заметим, что окружность Аполлония может вырождаться в прямую при  $\left| \frac{C_1}{C_2} \right| = 1$ .

Проиллюстрируем случай, когда конечное число дополнительных предельных точек лежит на прямой.

**Пример 2.** Рассмотрим мероморфную функцию с рациональной частью

$$r(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{4(i + \frac{1}{2})^2(z+i)} + \frac{1}{z - \frac{1}{2}}$$

Доминирующие полюсы есть  $z_1 = 1$  и  $z_2 = -i$ ,  $\nu = 2$ , полюсы лежат в точках деления окружности на 4 равные части. Лорановские коэффициенты  $A_1, A_2$  равны соответственно  $A_1 = 1, A_2 = 4(i + \frac{1}{2})^{-2}$ .

Вычисления показывают, что

$$\left| \frac{C_1}{C_2} \right| = \left| \frac{A_2}{A_1} \right| \left| \frac{(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_3)} \right|^2 = 1,$$

В данном примере формально мы имеем 4 дополнительные предельные точки, которые являются корнями многочленов

$$\omega_j(z) = C_1(z - z_2) + C_2 e^{-\frac{\pi i j}{2}} (z - z_1), \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

Легко показать, что  $\omega_2 = \text{const}$ , следовательно, корней у данного многочлена нет, поэтому в действительности мы имеем только три дополнительные предельные точки (случай вырождения), являющиеся корнями многочленов  $\omega_0, \omega_1, \omega_3$ . Эти корни есть

$$\zeta_0 = \frac{1-i}{2}, \quad \zeta_1 = 1-i, \quad \zeta_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}, \quad \zeta_3 = 0.$$

Таким образом, множество  $\mathcal{M}_{\mathbb{F}}$  состоит из конечного числа точек, лежащих на прямой. Расположение дополнительных предельных точек в данном случае изображено на рис. 1а.

Следующий пример демонстрирует случай, когда имеется континуум дополнительных предельных точек, лежащих на окружности Аполлония.

**Пример 3.** Рассмотрим мероморфную функцию с рациональной частью

$$r(z) = \frac{1}{(z-1)(z-e^{2\pi i\sqrt{2}})(z-\frac{1}{2})}.$$

Доминирующие полюсы:  $z_1 = 1$  и  $z_2 = e^{2\pi i\sqrt{2}}$ ,  $\nu = 2$ ,  $\lambda = 3$ . Ясно, что полюсы  $z_1, z_2$  не лежат в точках деления окружности на равные части, следовательно множество дополнительных предельных точек заполняет всю окружность Аполлония (3), где

$$\left| \frac{C_1}{C_2} \right| = \sqrt{5 - 4 \cos 2\pi\sqrt{2}}.$$

Эта окружность построена на рис. 1б. С помощью функции "pade" легко проверить, что многочлены  $Q_n(a, z)$  и  $Q_n(r, z)$  становятся достаточно близкими уже начиная с  $n = 10$ . Поэтому предельные точки множества полюсов аппроксимаций Паде при большом  $n$  достаточно близки к нулям знаменателей  $Q_n(r, z)$  аппроксимаций Паде для рациональной функции  $r(z)$ . Поскольку при больших  $n$  вычисления  $Q_n(r, z)$  с помощью функции "pade" требуют больших затрат времени, мы найдем многочлены  $Q_n(r, z)$  с помощью рекуррентной процедуры (2). На рис. 1б показаны нули этих многочленов для  $n \in [10, 200]$ . Хорошо видно, что все они лежат на окружности Аполлония достаточно плотно заполняя ее.

$3^0$ . При  $\nu \geq 3$  геометрия  $\mathcal{M}_{\mathbb{F}}$  изучена только в некоторых частных случаях. Среди них самый важный – это случай линейно независимых над полем рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  аргументов  $\Theta_0 = 1, \Theta_1, \dots, \Theta_\nu$ , когда  $\mathcal{M}_{\mathbb{F}}$  состоит из замкнутых областей

$$|C_j \Delta_j(z)| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\nu} |C_k \Delta_k(z)|, \quad j = 1, \dots, \nu, \quad (4)$$

(теорема 3 в [3]). Это множество обозначим  $\mathcal{N}$ . Легко показать, что всегда  $\mathcal{M}_{\mathbb{F}} \subseteq \mathcal{N}$ .

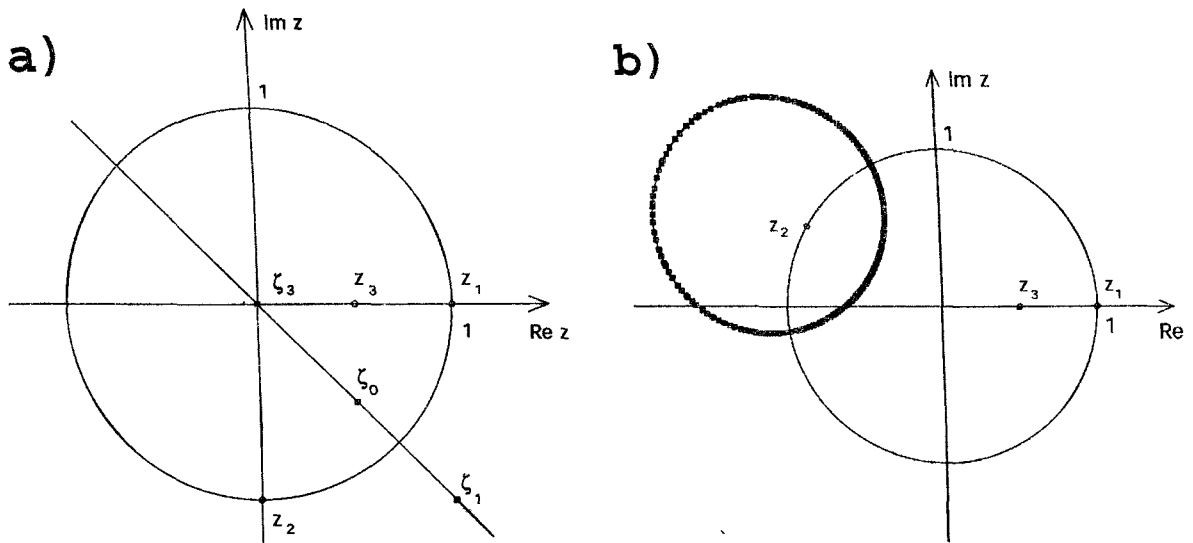


Рис. 1. а) Конечное число предельных точек на прямой ( $\nu = 2$ ), б) континуум предельных точек на окружности Аполлония ( $\nu = 2$ ).

**Пример 4.** Рассмотрим мероморфную функцию

$$a(z) = e^z + \frac{z^2 + z}{(z - e^{2\pi i\sqrt{2}})(z - e^{2\pi i\sqrt{3}})(z - e^{2\pi i\sqrt{5}})(z - \frac{1}{2})}$$

с рациональной частью

$$r(z) = \frac{z^2 + z}{(z - e^{2\pi i\sqrt{2}})(z - e^{2\pi i\sqrt{3}})(z - e^{2\pi i\sqrt{5}})(z - \frac{1}{2})}$$

Здесь доминирующие полюсы есть

$$z_1 = e^{2\pi i\sqrt{2}} = -0.8582161855 + 0.5132883974 i,$$

$$z_2 = e^{2\pi i\sqrt{3}} = -0.1125391807 - 0.9936472879 i,$$

$$z_3 = e^{2\pi i\sqrt{5}} = 0.08742571683 + 0.9961710416 i.$$

Аргументы  $\Theta_1 = \sqrt{2}$ ,  $\Theta_2 = \sqrt{3}$ ,  $\Theta_3 = \sqrt{5}$  линейно независимы по модулю  $\mathbb{Z}$  над полем  $\mathbb{Q}$ . Вычисления коэффициентов  $C_j$  формуле (1) дают следующие значения:

$$C_1 = 0.7040076094 + 0.1709505671i, \quad C_2 = 0.07853024260 + 0.1743759673i,$$

$$C_3 = 0.2927491140 + 0.04486932302 i.$$

Граница множества  $\mathcal{N}$  состоит из 4 связных компонент. Область  $\mathcal{N}$  выделена на рис. 2а серым цветом. Для проверки равенства  $\mathcal{N}_{\mathbb{F}} = \mathcal{N}$  мы используем рекуррентную процедуру (2). Результат работы процедуры представлен на рис. 2б. Видно, что нули  $Q_{n,\lambda-1}(r, z)$  действительно заполняют область  $\mathcal{N}$ .

<sup>4</sup>0. В теореме 4 [2] представлен еще один случай, когда множество  $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$  вычисляется явно. Из указанной теоремы нетрудно получить два важных следствия.

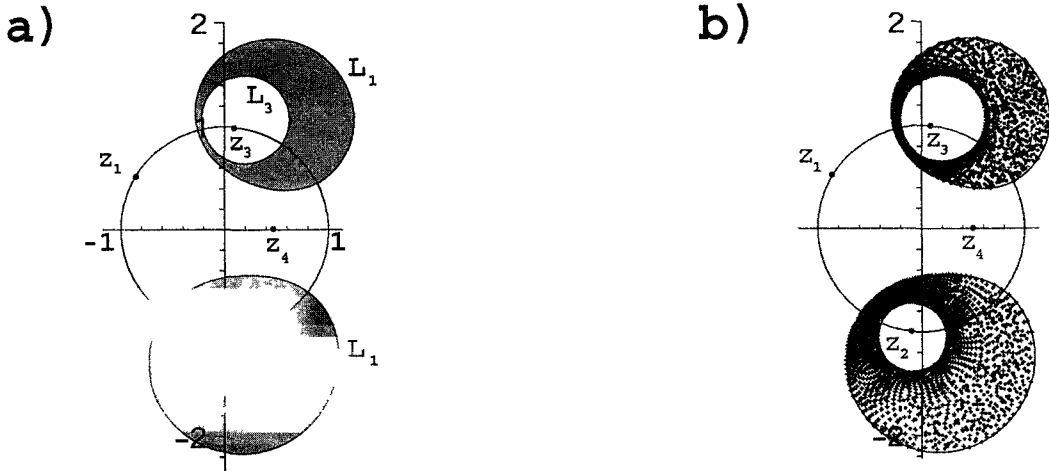


Рис. 2. а) Область  $\mathcal{N}_{\mathbb{F}} = \mathcal{N}$  для линейно независимых аргументов, б) результат работы рекуррентного процесса (4000 итераций).

**Следствие 1.** Пусть  $\Theta_0 = 1$ ,  $\Theta_1$  линейно независимы над  $\mathbb{Q}$  ( $r = 1$ ) и  $\Theta_2, \dots, \Theta_\nu$  - рациональные числа, причем

$$\Theta_k = \frac{n_k}{\sigma}, \quad k = 2, \dots, \nu, \quad 0 \leq n_k \leq \sigma - 1.$$

Тогда множество  $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$  состоит из  $\sigma$  линий

$$|C_1 \Delta_1(z)| = \rho^{-n} \left| \sum_{k=2}^{\nu} C_k \Delta_k(z) z_k^n \right|, \quad n = 0, 1, \dots, \sigma - 1.$$

Рассмотрим числовой пример, иллюстрирующий это следствие.

**Пример 5.** Пусть

$$r(z) = \frac{2z - 5}{(z - e^{2\pi i \sqrt{5}})(z + 1)(z - 1)(z - \frac{1}{2})}$$

Тогда  $r = 1$ ,  $\sigma = 2$  и множество  $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$  состоит из двух линий

$$\mathcal{N}^0 : |C_1 \Delta_1(z)| = |C_2 \Delta_2(z) + C_3 \Delta_3(z)|$$

и

$$\mathcal{N}^1 : |C_1 \Delta_1(z)| = |C_2 \Delta_2(z) - C_3 \Delta_3(z)|.$$

Здесь

$$\begin{aligned} C_1 &= 0.007700973064 - 0.08883928653 i, \\ C_2 &= 0.02380952381 - 0.02181147435 i, \\ C_3 &= -0.1666666667 - 0.1819342381 i. \end{aligned}$$

На рис. 3а построены эти линии. Оказалось, что  $\mathcal{N}^1$  распадается на две связные компоненты. На этом же рисунке показаны нули многочленов  $V_n(z)$ , т.е. нули знаменателей аппроксимаций Паде рациональной функции  $r(z)$ , для  $n \in [10, 500]$ . Видно, что они действительно заполняют линии  $\mathcal{N}^0$  и  $\mathcal{N}^1$ .

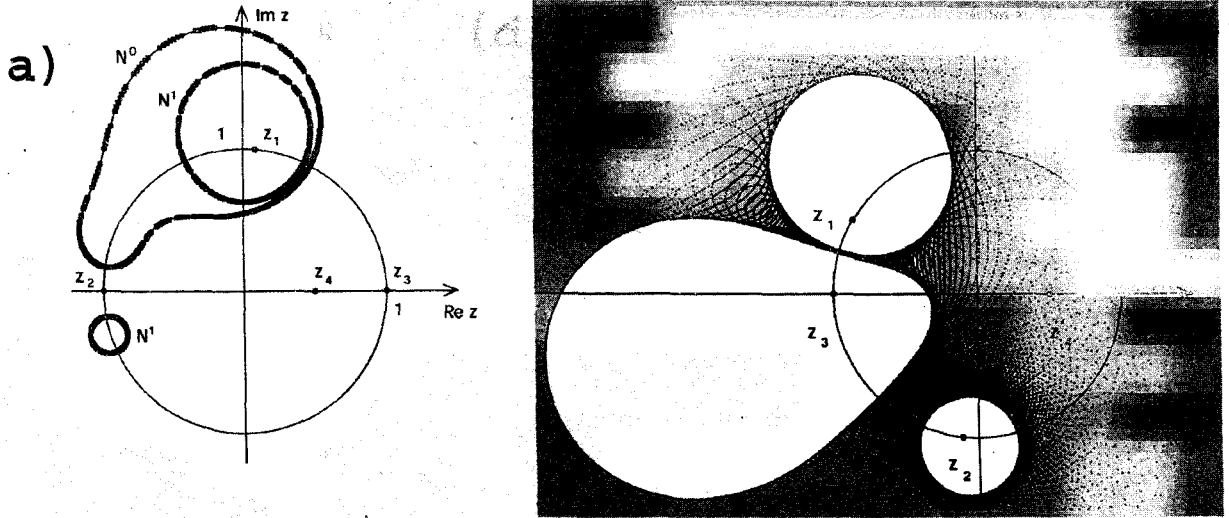


Рис. 3. а) Пример множества  $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$ , состоящего из конечного числа линий в случае  $r = 1$ , б) заполнение множества  $\mathcal{N}$  нулями многочленов из семейства  $\omega(z, \tau)$  в случае  $r = \nu - 1$ .

**Следствие 2.** Если  $\Theta_0 = 1, \Theta_1, \dots, \Theta_{\nu-1}$  линейно независимы над  $\mathbb{Q}$  ( $r = \nu - 1$ ) и  $\Theta_{\nu}$  рациональное число, то множество  $\mathcal{N}_{\mathbb{F}} = \mathcal{N}$ .

Рассмотрим пример.

**Пример 6.** Пусть

$$r(z) = \frac{z}{(z - e^{2\pi i \sqrt{2}})(z - e^{2\pi i \sqrt{3}})(z + 1)(z - \frac{1}{2})}$$

В этом случае  $\nu = 3, r = 2, \sigma = 2$ .

По следствию 2 имеем  $\mathcal{N}_{\mathbb{F}} = \mathcal{N}$ . Для проверки этого равенства найдем нули достаточно обширного подмножества семейства многочленов  $\omega(z, \tau), \tau \in \mathbb{F}$ . На рис. 3б область  $\mathcal{N}$  показана серым цветом и продемонстрировано ее заполнение нулями семейства  $\omega(z, \tau)$ , когда на торе  $\mathbb{T}^2$  взято  $140^2$  точек.

Продемонстрируем теорему 4 [2] в случае  $1 \leq r \leq \nu - 1$ . Следующий пример показывает, что при этом множество  $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$  является подмножеством  $\mathcal{N}$ .

**Пример 7.** Пусть

$$r(z) = \frac{z^3}{(z - e^{2\pi i \sqrt{5}})(z - e^{2\pi i \sqrt{3}})(z - 1)(z + 1)(z - \frac{1}{2})}$$

Доминирующие полюсы в этом случае есть

$$z_1 = e^{2\pi i \sqrt{5}}, \quad z_2 = e^{2\pi i \sqrt{3}},$$

$$z_3 = 1, \quad z_4 = -1.$$

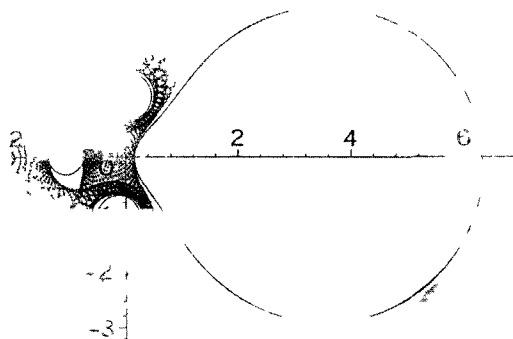


Рис. 4. Пример множества  $\mathcal{N}_F$  не совпадающего с  $\mathcal{N}$ .

Здесь  $\Theta_0 = 1, \Theta_1 = \sqrt{5}, \Theta_2 = \sqrt{3}$  линейно независимы над  $\mathbb{Q}$ ,  $\Theta_3 = 0, \Theta_4 = \frac{1}{2}$ . По теореме 4 [2] область  $\mathcal{N}_F$  является частью области  $\mathcal{N}$ . Границы множества  $\mathcal{N}_F$ , найденные по этой теореме, есть

$$L_1 : \left| \frac{C_3}{(z - z_3)} + \frac{C_4}{(z - z_4)} \right| = \left| \frac{C_1}{(z - z_1)} \right| + \left| \frac{C_2}{(z - z_2)} \right|$$

$$L_2 : \left| \frac{C_1}{(z - z_1)} \right| = \left| \frac{C_3}{(z - z_3)} + \frac{C_4}{(z - z_4)} \right| + \left| \frac{C_2}{(z - z_2)} \right|$$

$$L_3 : \left| \frac{C_2}{(z - z_2)} \right| = \left| \frac{C_3}{(z - z_3)} + \frac{C_4}{(z - z_4)} \right| + \left| \frac{C_1}{(z - z_1)} \right|$$

$$L_4 : \left| \frac{C_3 z_3}{(z - z_3)} + \frac{C_4 z_4}{(z - z_4)} \right| = \left| \frac{C_1}{(z - z_1)} \right| + \left| \frac{C_2}{(z - z_2)} \right|$$

$$L_5 : \left| \frac{C_1}{(z - z_1)} \right| = \left| \frac{C_3 z_3}{(z - z_3)} + \frac{C_4 z_4}{(z - z_4)} \right| + \left| \frac{C_2}{(z - z_2)} \right|$$

$$L_6 : \left| \frac{C_2}{(z - z_2)} \right| = \left| \frac{C_3 z_3}{(z - z_3)} + \frac{C_4 z_4}{(z - z_4)} \right| + \left| \frac{C_1}{(z - z_1)} \right|.$$

На рис. 4 построена граница области  $\mathcal{N}$ , область  $\mathcal{N}_F \subset \mathcal{N}$  окрашена серым цветом, и показаны нули знаменателей аппроксимаций Паде  $r(z)$  найденные с помощью рекуррентной процедуры (2) при 3500 итерациях.

5<sup>0</sup>. Рассмотрим теперь примеры функций, для которых множество  $\mathcal{N}_F$  в явном виде в работах [1], [2] не найдено. Прежде всего изучим случай  $r = 1$ .

**Пример 8.** Пусть мероморфная функция имеет рациональную часть

$$r(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z - e^{2\pi i \sqrt{3}})(z - e^{2\pi i(1/2 - \sqrt{3}/3)})(z - e^{2\pi i(1 + 3\sqrt{3}/4)})(z - \frac{1}{2})}$$

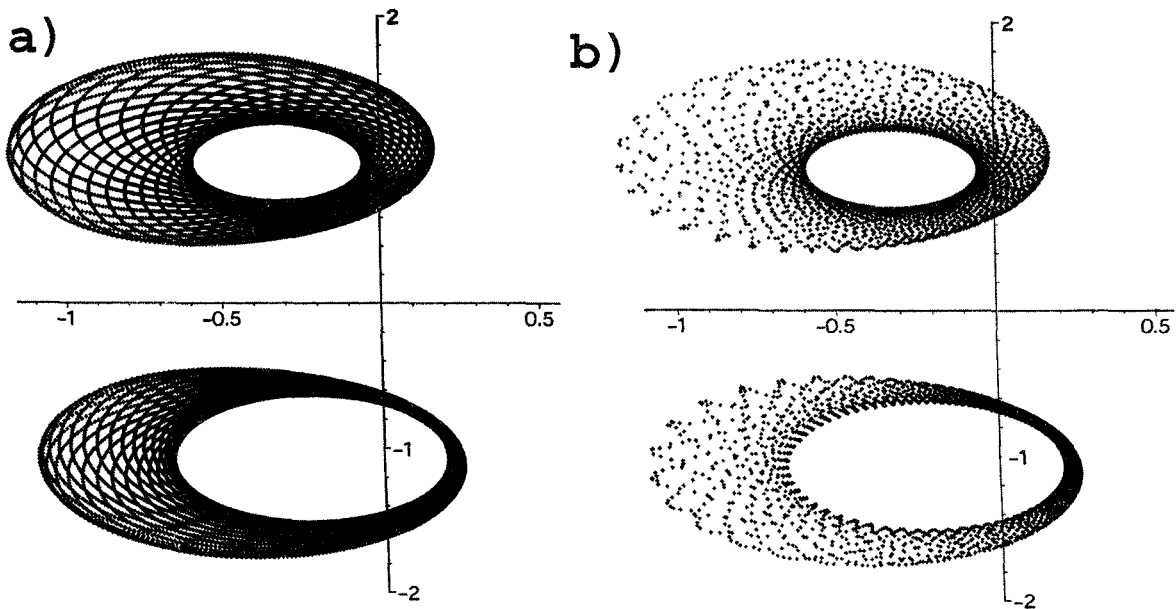


Рис. 5. а) Расположение предельных точек в случае  $r = 1, \nu = 3$ , б) результат работы рекуррентного процесса (3500 итераций).

Тогда  $\Theta_0 = 1, \Theta_1 = \sqrt{3}, \Theta_2 = \frac{1}{2}\Theta_0 - \frac{1}{3}\Theta_1, \Theta_3 = \Theta_0 + \frac{3}{4}\Theta_1$  и матрица линейных зависимостей имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/3 \\ 1 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Вычисление группы параметров  $\mathbb{F}$  для данных линейных зависимостей дает следующий результат:

$$\mathbb{F} = \{(t_1^{-12}, (-1)^j t_1^4, t_1^{-9}) | t_1 \in \mathbb{T}, j = 0, 1\}.$$

В нашем случае теория не дает точного ответа о геометрии множества дополнительных предельных точек, поэтому промоделируем построение этого множества, вычисляя нули достаточно обширного подмножества семейства  $\omega(z, \tau)$ . Результаты этого моделирования показаны на рис. 5а. Здесь окружность  $\mathbb{T}$  разбита на двадцать тысяч равных сегментов и параметр  $t_1$  принимает дискретные значения. Этот и другие аналогичные примеры позволяют сделать предположение о том, что множество  $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$  в случае  $r = 1$  состоит из конечного числа линий.

Сравним теперь результаты моделирования множества  $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$  с численным экспериментом. Для этого воспользуемся рекуррентным процессом (2). На рис. 5б показаны результаты этого эксперимента.

Как мы видели выше (см. пример 6) множество  $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$  может совпадать с  $\mathcal{N}$  не только для линейно независимых  $\Theta_0 = 1, \Theta_1, \dots, \Theta_\nu$ . Как показывают следующие примеры это может осуществляться достаточно часто. Рассмотрим вначале такой случай, когда  $r = \nu - 1$ , но не выполняются условия следствия 2.

**Пример 9.**

$$r(z) = \frac{1}{(z - e^{2\pi i\sqrt{2}})(z - e^{2\pi i\sqrt{3}})(z - e^{2\pi i\Theta_3})(z - \frac{1}{2})},$$



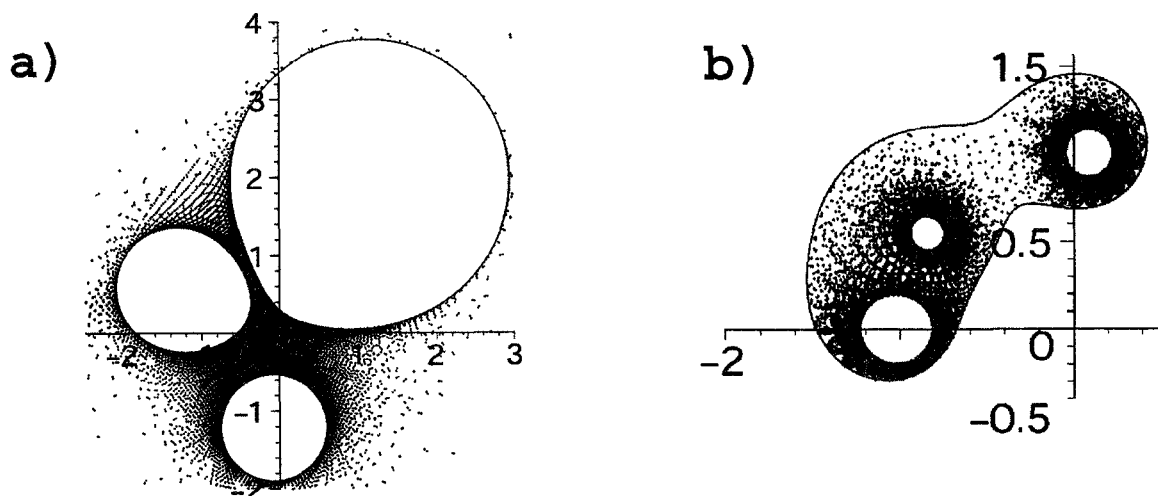


Рис. 6. а) Совпадение  $\mathcal{N}_{\mathbb{F}} = \mathcal{N}$  в случае  $r = \nu - 1$  (пример 9), б) совпадение  $\mathcal{N}_{\mathbb{F}} = \mathcal{N}$  в случае  $1 \leq r \leq \nu - 2$  (пример 10).

Здесь  $\Theta_3 = \frac{1}{2}\Theta_0 + \Theta_1 + \frac{3}{4}\Theta_2$ . На рис. 6а показано заполнение множества  $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$  нулями семейства многочленов  $\omega(z, \tau)$ , когда на торе  $\mathbb{T}^2$  взято  $160^2$  точек. Это моделирование достаточно убедительно подтверждает равенство  $\mathcal{N}_{\mathbb{F}} = \mathcal{N}$ .

Промоделируем построение множества  $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$  для  $1 \leq r \leq \nu - 2$ . Оказывается, что и в этом случае возможно совпадение множеств  $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$  и  $\mathcal{N}$ .

**Пример 10.**

$$r(z) = \frac{A_1}{(z - e^{2\pi i\sqrt{3}})} + \frac{A_2}{(z - e^{2\pi i\sqrt{5}})} + \frac{A_3}{(z - e^{2\pi i\Theta_3})} + \frac{A_4}{(z - e^{2\pi i\Theta_4})},$$

$$\Theta_3 = \frac{1}{2}, \Theta_4 = \Theta_1 + \frac{3}{4}\Theta_2.$$

Здесь нам удобнее задать значения  $C_j$ :

$$C_1 = 10, C_2 = -1, C_3 = -2, C_4 = -1$$

и по формуле (1) восстановить следующие значения  $A_j$ :

$$A_1 = 0.002650640428 + 0.004101033363i,$$

$$A_2 = -0.06279967837 - 0.08717534896i,$$

$$A_3 = 0.2925425007 + 0.2844910223i,$$

$$A_4 = -0.3431243703 + 0.9610937484i.$$

Группа параметров  $\mathbb{F}$  имеет следующий вид

$$\mathbb{F} = \{(t_1^{-1}t_2^{-3}, (-1)^j t_1^{-6}, t_2, t_1^{-5}t_2^{-3}) \mid (t_1, t_2) \in \mathbb{T}^2, j = 0, 1\}.$$

На рис. 6б показано заполнение множества  $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$  нулями семейства многочленов  $\omega(z, \tau)$ , когда на торе  $\mathbb{T}^2$  взято  $2 \times 80^2$  точек. Скорее всего и в этом случае выполняется равенство  $\mathcal{N}_{\mathbb{F}} = \mathcal{N}$ .

## Заключение

Моделирование на числовых примерах асимптотического поведения полюсов аппроксимаций Паде  $(\lambda - 1)$ -й строки показало полное согласие с ранее развитой теорией. Продемонстрировано разнообразие геометрии множества предельных точек  $\mathcal{N}_F$ . В случаях, когда множество  $\mathcal{N}_F$  явно не найдено, численное моделирование позволило выдвинуть ряд предположений о его структуре.

Авторы благодарят за финансовую поддержку Российский фонд фундаментальных исследований (проект N 01-01-96422). Кроме того, один из авторов (Д.Н. Микушин) благодарит за финансовую поддержку программу молодежных грантов для студентов, аспирантов и молодых ученых Челябинской области.

## Литература

1. Адуков В.М. – О равномерной сходимости подпоследовательностей  $(\lambda - 1)$ -й строки таблицы Паде // *Известия Челябинского научного центра*. – 2001. – Вып. 1. – С. 3–7.
2. Адуков В.М. – О геометрии множества предельных точек полюсов  $(\lambda - 1)$ -й строки таблицы Паде // *Известия Челябинского научного центра*. – 2001. – Вып. 1. – С. 8–11.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Сравнение предельного поведения знаменателей аппроксимаций Паде для мероморфной функции и для ее рациональной части

Табл. Знаменатели аппроксимаций Паде для примера 1

$n$	$Q_n(r, z), Q_n(a, z)$
1	$Q_1(r, z) = 2.181818182 - 2.545454545 z - 0.545454545 z^2 + z^3$ $Q_1(a, z) = 2.195765082 + 0.2253296045 z - 0.8365960847 z^2 + z^3$
2	$Q_2(r, z) = 3.259259259 - 4.000000000 z - 0.222222222 z^2 + z^3$ $Q_2(a, z) = -5.112562852 + 8.917347241 z - 4.541724681 z^2 + z^3$
3	$Q_3(r, z) = 2.880000000 - 3.146666667 z - 0.720000000 z^2 + z^3$ $Q_3(a, z) = -6.078460011 + 10.22941291 z - 4.956565554 z^2 + z^3$
4	$Q_4(r, z) = 3.508771930 - 4.000000000 z - 0.5029239766 z^2 + z^3$ $Q_4(a, z) = 51.00773518 - 63.97380408 z + 11.88952593 z^2 + z^3$
5	$Q_5(r, z) = 3.203747073 - 3.400468384 z - 0.8009367681 z^2 + z^3$ $Q_5(a, z) = 4.476359610 - 2.522937121 z - 2.974811072 z^2 + z^3$
...	.....
20	$Q_{20}(r, z) = 3.875000031 - 4.000000000 z - 0.8750000084 z^2 + z^3$ $Q_{20}(a, z) = 3.875000029 - 3.999999998 z - 0.8750000092 z^2 + z^3$
21	$Q_{21}(r, z) = 3.764705897 - 3.823529412 z - 0.9411764743 z^2 + z^3$ $Q_{21}(a, z) = 3.764705897 - 3.823529413 z - 0.9411764742 z^2 + z^3$
22	$Q_{22}(r, z) = 3.885714293 - 4.000000000 z - 0.8857142876 z^2 + z^3$ $Q_{22}(a, z) = 3.885714293 - 4.000000000 z - 0.8857142876 z^2 + z^3$
23	$Q_{23}(r, z) = 3.783783787 - 3.837837838 z - 0.9459459468 z^2 + z^3$ $Q_{23}(a, z) = 3.783783787 - 3.837837838 z - 0.9459459468 z^2 + z^3$
...	.....
195	$Q_{195}(r, z) = 3.972881356 - 3.979661017 z - 0.9932203390 z^2 + z^3$ $Q_{195}(a, z) = 3.972881356 - 3.979661017 z - 0.9932203390 z^2 + z^3$
196	$Q_{196}(r, z) = 3.986486486 - 4.000000000 z - 0.9864864865 z^2 + z^3$ $Q_{196}(a, z) = 3.986486486 - 4.000000000 z - 0.9864864865 z^2 + z^3$
197	$Q_{197}(r, z) = 3.973154362 - 3.979865772 z - 0.9932885906 z^2 + z^3$ $Q_{197}(a, z) = 3.973154362 - 3.979865772 z - 0.9932885906 z^2 + z^3$
198	$Q_{198}(r, z) = 3.986622074 - 4.000000000 z - 0.9866220736 z^2 + z^3$ $Q_{198}(a, z) = 3.986622074 - 4.000000000 z - 0.9866220736 z^2 + z^3$
199	$Q_{199}(r, z) = 3.973421927 - 3.980066445 z - 0.9933554817 z^2 + z^3$ $Q_{199}(a, z) = 3.973421927 - 3.980066445 z - 0.9933554817 z^2 + z^3$
200	$Q_{200}(r, z) = 3.986754967 - 4.000000000 z - 0.9867549669 z^2 + z^3$ $Q_{200}(a, z) = 3.986754967 - 4.000000000 z - 0.9867549669 z^2 + z^3$
	$W(z) = 4 - 4z - z^2 + z^3$