



# ВЕСТНИК

## ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО № 16 (192) ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

## 2010

ISSN 2071-0216

---

СЕРИЯ

### «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ»

Выпуск 5

---

#### Редакционная коллегия

к.ф.-м.н., проф. Заляпин В.И., к.ф.-м.н., доц. Манакова Н.А. (*отв. секретарь*),  
д.ф.-м.н., проф. Менихес Л.Д., д.ф.-м.н., проф. Свиридюк Г.А. (*отв. редактор*),  
д.ф.-м.н., проф. Соколинский Л.Б.

#### Редакционный совет

д.ф.-м.н., чл.-кор. РАН Абрамов С.М., д.ф.-м.н., акад. РАН Васильев С.Н.,  
д.ф.-м.н., чл.-кор. РАН Воеводин В.В., д.ф.-м.н., акад. РАН Еремин И.И.  
(*председатель*), д.ф.-м.н., проф. Кадченко С.И., д.ф.-м.н., проф. Кожанов А.И.,  
д.ф.-м.н., проф. Лакеев А.В., д.т.н., проф. Логиновский О.В., д.ф.-м.н., проф.  
Паников А. В., д.ф.-м.н., проф. Танана В.П., д.ф.-м.н., проф. Ухоботов В.И.,  
д.ф.-м.н., проф. Федоров В.Е., д.ф.-м.н., чл.-кор. РАН Ченцов А.Г.,  
д.т.н., проф. Ширяев В.И.

## Содержание

ЗАДАЧА ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ А.А. Баязитова . . . . .	4
УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ХОФФА НА ГРАФЕ С.А. Загребина, П.О. Пивоварова . . . . .	11
О ЛИНЕЙНОСТИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭПР-ОТКЛИКА НА ВОЗДЕЙСТВИЕ ИОНИЗИРУЮЩЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ДОЗИМЕТРИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ ЭМАЛИ ЗУБОВ Заляпин В.И., Шишкина Е.А. . . . .	17
НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА – ЛЯВА А.А. Замышляева, А.В. Юзеева . . . . .	23
СВОЙСТВО РЕГУЛЯРИЗУЕМОСТИ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ИЗМЕРЕНИЯ А.В. Келлер, Е.И. Назарова . . . . .	32
КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ТРАЕКТОРИИ ЗАДАЧИ ТЕЙЛОРА ДЛЯ МОДЕЛИ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ НЕНУЛЕВОГО ПОРЯДКА О.П. Матвеева . . . . .	39
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ АНАЛИЗА РЫНОЧНОЙ КОРЗИНЫ НА ПРОЦЕССОРАХ CELL К.С. Пан, М.Л. Цымблер . . . . .	48
МАРШРУТЫ С ЛОКАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ Т.А. Панюкова . . . . .	58
ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ РЕАКЦИИ И ДИФФУЗИИ В ТРУБЧАТОМ РЕАКТОРЕ И.А. Плюхина . . . . .	68
О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ СТЕПЕНИ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА А.И. Седов . . . . .	73
НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ХОФФА НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ Н.П. Семенова . . . . .	79
ЗАДАЧА ТЕРМОКОНВЕКЦИИ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ Т.Г. Сукачева . . . . .	83
ИССЛЕДОВАНИЕ УНИВЕРСАЛЬНОСТИ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКОГО ПОДХОДА К ОЦЕНКЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ЭПР-ДОЗИМЕТРИИ ЗУБНОЙ ЭМАЛИ Ю.С. Тимофеев, Е.А. Шишкина, Д.В. Иванов, P. Fattibene, A. Wieser, В.И. Заляпин . . . . .	94
CAEBEANS BROKER: БРОКЕР РЕСУРСОВ СИСТЕМЫ CAEBEANS А.В. Шамакина . . . . .	107
НОВЫЙ ПОДХОД К ИЗМЕРЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКИ ИСКАЖЕННЫХ СИГНАЛОВ А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридов . . . . .	116

## Contents

THE STURM – LIOUVILLE PROBLEM ON GEOMETRIC GRAPH A.A. Bayazitova . . . . .	4
THE STABILITY OF THE HOFF LINEAR EQUATIONS ON A GRAPH S.A. Zagrebina, P.O. Pivovarova . . . . .	11
ON THE LINEARITY OF A STATISTICAL MODEL FOR THE EPR-RESPONSE TO THE IONIZING RADIATION IN DOSIMETRIC STUDIES OF TOOTH ENAMEL Zalyapin V.I., Shishkina E.A. . . . .	17
THE INITIAL-FINISH VALUE PROBLEM FOR THE BOUSSINESQ – LÖVE EQUATION A.A. Zamyslyayeva, A.V. Yuzeeva . . . . .	23
THE REGULARIZATION PROPERTY AND THE COMPUTATIONAL SOLUTION OF THE DYNAMIC MEASURE PROBLEM A.B. Keller, E.I. Nazarova . . . . .	32
QUASISTATIONARY TRAJECTORIES OF THE TAYLOR PROBLEM FOR THE MODEL OF THE INCOMPRESSIBLE VISCOELASTIC LIQUID OF THE NONZERO ORDER O.P. Matveeva . . . . .	39
A PARALLEL ALGORITHM FOR MARKET BASKET ANALYSIS ON THE CELL PROCESSOR C.S. Pan, M.L. Zymbler . . . . .	48
THE PATHS WITH LOCAL RESTRICTIONS T.A. Panyukova . . . . .	58
PHASE SPACE OF DEGENERATE MODEL OF REACTION AND DIFFUSION IN A TUBE REACTOR I.A. Plyuhina . . . . .	68
ABOUT THE APPROXIMATE SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM OF THE SPECTRAL ANALYSIS FOR LAPLACE OPERATOR A.I. Sedov . . . . .	73
THE INITIAL-FINITE PROBLEM FOR HOFF'S EQUATIONS ON GEOMETRICAL GRAPH N.P. Semenova . . . . .	79
THE THERMOCONVECTION PROBLEM FOR THE LINEARIZED MODEL OF THE INCOMPRESSIBLE VISCOELASTIC FLUID T.G. Sukacheva . . . . .	83
UNIVERSALITY INVESTIGATION OF SEMI-EMPIRICAL APPROACH TO UNCERTAINTY ESTIMATION IN EPR-DOSIMETRY OF A TOOTH ENAMEL Y.S. Timofeev, E.A. Shishkina, D.V. Ivanov, P. Fattibene, A. Wieser, V.I. Zalyapin . .	94
CAEBEANS BROKER: RESOURCE BROKER IN CAEBEANS SYSTEM A.V. Shamakina . . . . .	107
A NEW APPROACH TO MEASUREMENT OF DYNAMICALLY PERTURBED SIGNALS A.L. Shestakov, G.A. Sviriduk . . . . .	116

УДК 517.9

## ЗАДАЧА ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

*A.A. Bayazitova*

## THE STURM – LIOUVILLE PROBLEM ON GEOMETRIC GRAPH

*A.A. Bayazitova*

В последнее время внимание многих исследователей привлекают дифференциальные уравнения на графах с условиями непрерывности и баланса потока. Между тем, было отмечено, что моделирование различных процессов в естественных и технических науках в ряде случаев описывают уравнения соболевского типа. При изучении уравнений соболевского типа на графах возникает задача Штурма – Лиувилля. Статья обобщает предыдущие результаты и посвящена изучению свойств собственных значений и обобщенных собственных функций задачи Штурма – Лиувилля на геометрических графах.

*Ключевые слова:* собственные значения, собственные функции, оператор Штурма – Лиувилля

The differential equations on graphs with continuity and balance of flow conditions attract attention of many researches. Meantime, there was noted that modeling of different processes in natural and technical sciences in row of events is described by the equations of Sobolev type. At studying Sobolev type equations the Sturm – Liouville problem appeared. The article generalized the previous results and is devoted to the study of characteristics of eigenvalues and generalized eigenfunctions of the Sturm – Liouville problem on geometric graphs.

*Keywords:* eigenvalues, eigenfunctions, Sturm – Liouville operator

### Введение

Пусть  $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}, \mathfrak{E})$  – конечный связный ориентированный граф, где  $\mathfrak{V} = \{V_i\}$  – множество вершин, а  $\mathfrak{E} = \{E_i\}$  – множество ребер. Каждому ребру поставим в соответствие два числа  $l_j, d_j \in \mathbb{R}_+$ , обозначающие длину и площадь поперечного сечения ребра  $E_j$  соответственно. На графе  $\mathbf{G}$  рассмотрим задачу Штурма – Лиувилля для уравнения

$$a_j(x)u_j - (c_j(x)u_{jx})_x = f_j, \quad u_j = u_j(x) \quad \text{для всех } x \in (0, l_j), t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Для уравнений (1) в каждой вершине графа зададим условия

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j c_j(x)u_{jx}(0, t) - \sum_{E_m \in E^\omega(V_i)} d_m c_m(x)u_{mx}(l_m, t) = 0, \quad (2)$$

$$u_j(0, t) = u_k(0, t) = u_m(l_m, t) = u_n(l_n, t), \quad (3)$$

где  $E_j, E_k \in E^\alpha(V_i), E_m, E_n \in E^\omega(V_i), t \in \mathbb{R}$ . Здесь через  $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$  обозначено множество дуг с началом (концом) в вершине  $V_i$ . Условие (2) обозначает, что поток через каждую

вершину должен равняться нулю, а условие (3) – что решение  $u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots)$  в каждой вершине должно быть непрерывным. В частном случае, когда граф  $\mathbf{G}$  состоит из одного ребра и двух вершин, условие (3) исчезает, а условие (2) превращается в условие Неймана.

Дифференциальные уравнения на графах – сравнительно новая часть математического знания. Первые публикации в этой области появились в последнее десятилетие прошлого века, первая монография вышла в 2004 г. [1] и была посвящена изучению качественных свойств дифференциальных уравнений на многообразиях типа сети. В [2] на графе  $\mathbf{G}$  рассмотрены уравнения реакции-диффузии

$$u_{jt} = u_{jxx} + f(u_j), \quad x \in (0, l_j), t \in \mathbb{R}_+, \quad (4)$$

где  $f$  – гладкая функция, общая для всех дуг  $E_j$ , с условиями типа Кирхгоффа. Между тем было замечено, что в ряде случаев уравнения соболевского типа описывают процессы реакции-диффузии лучше, чем полулинейные уравнения вида (4).

Уравнения соболевского типа на графах впервые были рассмотрены в 2002 г. [3]; первое диссертационное исследование в этом направлении было выполнено в 2002 – 2005 гг. [4] и содержало результаты [5] – [7]. В работах [3] – [7] и последующих [8] – [10] неизменно возникала задача Штурма – Лиувилля (1) – (3), правда, в частном случае ( $c_j(x) \equiv 1, a_j(x) \equiv a = \text{const}$ ), причем предложенный подход имел мало общего с результатами [1]. Дальнейшее исследование [11] привело к новой задаче Штурма – Лиувилля вида (1) – (3), теперь уже в случае  $c_j(x) \equiv 1, a_j(x) \equiv a_j$ . Это обстоятельство побудило рассмотреть задачу (1) – (3), которая является естественным обобщением рассмотренных ранее задач. Полученные результаты носят окончательный и исчерпывающий характер.

Статья кроме вводной части и списка литературы состоит из двух параграфов. В первом параграфе вводятся определения классического и обобщенного решений, изучаются условия существования и единственности обобщенного решения задачи (1) – (3), второй параграф посвящен исследованию свойств собственных значений и собственных функций задачи.

## 1. Существование и единственность обобщенного решения

Следуя [11], введем в рассмотрение гильбертово пространство

$$L_2(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots), g_j \in L_2(0, l_j)\}$$

со скалярным произведением

$$\langle g, h \rangle = \sum_j d_j \int_0^{l_j} g_j h_j dx$$

и банахово пространство  $\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots) : u_j \in W_2^1(0, l_j) \text{ и выполнено (2)}\}$  с нормой

$$\|u\|_{\mathfrak{U}}^2 = \sum_j d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}^2 + u_j^2) dx.$$

Отметим, что условие (2) имеет смысл в силу абсолютной непрерывности компонентов  $u_j$ , а пространство  $\mathfrak{U}$  плотно и компактно вложено в  $L_2(\mathbf{G})$ . Обозначим через  $\mathfrak{F}$  сопряженное к  $\mathfrak{U}$  относительно  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  банахово пространство. Очевидна плотность и компактность вложения  $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$ .

Пусть на графике  $\mathbf{G}$  задано уравнение (1), коэффициенты которого вещественны и удовлетворяют условиям

$$a_j(x) \in C[0, l_j], \quad c_j(x) \in C^1[0, l_j], \quad c_j(x) \geq c_0 > 0 \text{ для всех } x \in (0, l_j).$$

**Определение 1.** Вектор-функцию  $u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots)$  такую, что  $u_j \in C^2(0, l_j) \cap C^1[0, l_j]$  назовем классическим решением задачи (1) – (3), если она удовлетворяет уравнению (1) и краевым условиям (2), (3).

**Определение 2.** Вектор-функцию  $u \in \mathfrak{U}$  назовем обобщенным решением задачи (1) – (3) при  $f \in \mathfrak{F}$ , если для нее выполняется тождество

$$\sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (c_j(x)u_{jx}v_{jx} + a_j(x)u_jv_j) dx = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} f_j v_j dx \quad (5)$$

при всех  $v \in \mathfrak{U}$ .

Далее будем предполагать, что  $a_j(x)$ ,  $c_j(x)$  – вещественные, ограниченные, измеримые на  $(0, l_j)$  функции, причем выполнено  $c_j(x) \geq \delta > 0$ . Введем оператор  $A : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$ , взяв в качестве определения левую часть равенства (5)

$$\langle Au, v \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (c_j(x)u_{jx}v_{jx} + a_j(x)u_jv_j) dx. \quad (6)$$

Тождество (5) запишем в виде уравнения

$$\langle Au, v \rangle = \langle f, v \rangle, \quad (7)$$

где  $u, v \in \mathfrak{U}$ ,  $f \in \mathfrak{F}$ , разрешимость которого и будем изучать в дальнейшем.

**Лемма 1.** Пусть  $a_j(x) \geq 0$  и хотя бы одна из функций  $a_j(x)$  не равна нулю тождественно. Тогда формула (6) определяет скалярное произведение, эквивалентное скалярному произведению в пространстве  $\mathfrak{U}$ .

Уравнение (7) перепишем в виде

$$[u, v] = \langle f, v \rangle. \quad (8)$$

Так как при фиксированном  $f \in \mathfrak{F}$  линейный по  $v \in \mathfrak{U}$  функционал  $\langle f, v \rangle$  ограничен:  $|\langle f, v \rangle| \leq \|f\|_{\mathfrak{F}} \|v\|_{L_2(\mathbf{G})} \leq C \|f\|_{\mathfrak{F}} \|v\|_{\mathfrak{U}}$ , где постоянная  $C > 0$  не зависит от  $f$  и  $v$ , то по теореме Рисса в  $\mathfrak{U}$  существует функция  $F$ , для которой  $\langle f, v \rangle = [F, v]$  при любой  $v \in \mathfrak{U}$ , причем эта функция единственна и  $\|F\|_{\mathfrak{U}} \leq C \|f\|_{\mathfrak{F}}$ . Следовательно, в  $\mathfrak{U}$  существует единственная функция  $u = F$ , удовлетворяющая тождеству (8).

Таким образом, доказана

**Теорема 1.** Если  $a_j(x) \geq 0$  и хотя бы одна из функций  $a_j(x)$  не равна нулю тождественно, то для любой  $f \in \mathfrak{F}$  существует единственное обобщенное решение задачи (1) – (3). При этом

$$\|u\|_{\mathfrak{U}} \leq C \|f\|_{\mathfrak{F}},$$

где положительная постоянная  $C$  не зависит от  $f$ .

Из всего вышесказанного следует, что если  $a_j(x) \geq 0$  и хотя бы одна из функций  $a_j(x)$  не равна нулю тождественно, то оператор  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$  – топлинейный изоморфизм пространств  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{F}$ . В силу теоремы Банаха существует оператор  $A^{-1} : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{U}$ , причем  $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$ . Поскольку вложение  $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$  компактно, оператор  $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$  является компактным.

## 2. Собственные функции и собственные значения

**Определение 3.** Не равная нулю функция  $u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots)$  называется собственной функцией задачи (1) – (3) для оператора

$$A = \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( -c_1(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) + a_1(x), \frac{\partial}{\partial x} \left( -c_2(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) + a_2(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x} \left( -c_j(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) + a_j(x), \dots \right),$$

если существует такое число  $\lambda$ , что функция  $u$  является классическим решением следующей задачи:

$$a_j(x)u_j - (c_j(x)u_{jx})_x = \lambda u_j, \quad (9)$$

$$u_j(0, t) = u_k(l_k, t), \quad E_j, \quad E_k \in E^\alpha(V_i) \cup E^\omega(V_i), \quad (10)$$

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j c_j(x) u_{jx}(0, t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k c_k(x) u_{kx}(l_k, t) = 0. \quad (11)$$

Число  $\lambda$  называется собственным значением (соответствующим собственной функции  $u$ ).

Легко видеть, что собственная функция задачи (1) – (3) при всех  $v \in \mathfrak{U}$  удовлетворяет интегральному тождеству

$$\sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (c_j(x)u_{jx}v_{jx} + a_j(x)u_jv_j) dx = \lambda \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} u_jv_j dx. \quad (12)$$

**Определение 4.** Не равная нулю функция  $u \in \mathfrak{U}$  называется обобщенной собственной функцией задачи (1) – (3) для оператора  $A$ , если существует такое число  $\lambda$  (собственное значение, отвечающее  $u$ ), что функция  $u$  при всех  $v \in \mathfrak{U}$  удовлетворяет интегральному тождеству (12).

В дальнейшем мы будем рассматривать только обобщенные собственные функции и соответствующие им собственные значения, нормированные условием  $\|u\|_{L_2(\mathbf{G})} = 1$ . Нам удобно рассматривать тождество (12), определяющее обобщенные собственные функции, как равенство скалярных произведений в пространстве  $L_2(\mathbf{G})$  и в пространстве  $\mathfrak{U}$  соответственно. Пусть  $m = \min_j \left( \min_{x \in (0, l_j)} a_j(x) \right)$  (здесь мы не предполагаем, что  $a_j(x) \geq 0$ ). Тогда функции  $\tilde{a}_j(x) = a_j(x) - m + 1 \geq 1$ . Поэтому скалярное произведение (эквивалентное обычному) в  $\mathfrak{U}$  можно задать равенством

$$[u, v] = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (c_j(x)u_{jx}v_{jx} + \tilde{a}_j(x)u_jv_j) dx. \quad (13)$$

Тождество (12) после этого можно переписать в виде

$$[u, v] = (\lambda - m + 1) \langle u, v \rangle. \quad (14)$$

**Лемма 2.** Существует линейный ограниченный оператор  $B$  из  $L_2(\mathbf{G})$  в  $\mathfrak{U}$  с областью определения  $L_2(\mathbf{G})$ , для которого при всех  $v \in \mathfrak{U}$  имеет место равенство

$$\langle u, v \rangle = [Bu, v]. \quad (15)$$

Оператор  $B$  имеет обратный  $B^{-1}$ . Оператор  $B$ , если его рассматривать как оператор из  $\mathfrak{U}$  в  $\mathfrak{U}$ , является самосопряженным, положительным и вполне непрерывным.

*Доказательство.* Для любой (фиксированной) функции  $u \in L_2(\mathbf{G})$  линейный по  $v, v \in \mathfrak{U}$ , функционал  $l(v) = \langle u, v \rangle$  ограничен, так как

$$|l(v)| = |\langle u, v \rangle| \leq \|u\|_{L_2(\mathbf{G})} \|v\|_{L_2(\mathbf{G})} \leq C \|u\|_{L_2(\mathbf{G})} \|v\|_{\mathfrak{U}}.$$

Поэтому согласно лемме Рисса существует единственная функция  $U \in \mathfrak{U}$ ,  $\|U\|_{\mathfrak{U}} = \|l\| \leq C \|u\|_{L_2(\mathbf{G})}$  такая, что  $l(v) = [U, v]$  для всех  $v \in \mathfrak{U}$ . Это означает, что на  $L_2(\mathbf{G})$  задан оператор  $B$  (очевидно, линейный):  $Bu = U$ , для которого выполняется (15). Так как  $\|Bu\|_{\mathfrak{U}} \leq C \|u\|_{L_2(\mathbf{G})}$ , то оператор  $B$  из  $L_2(\mathbf{G})$  в  $\mathfrak{U}$  ограничен. Если при некотором  $u$  из  $L_2(\mathbf{G})$  выполнено равенство  $Bu = 0$ , то в силу (15)  $\langle u, v \rangle = 0$  для всех  $v \in \mathfrak{U}$ , т.е.  $u = 0$ . Это означает, что существует оператор  $B^{-1}$ .

Из (15) вытекает, что оператор  $B$  из  $\mathfrak{U}$  в  $\mathfrak{U}$  является самосопряженным

$$[Bu, v] = \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle = [Bv, u] = [u, Bv].$$

Из (15) вытекает также, что оператор  $B$  положителен.

Покажем, что оператор  $B$  из  $\mathfrak{U}$  в  $\mathfrak{U}$  является вполне непрерывным. Возьмем произвольное ограниченное в  $\mathfrak{U}$  множество. В силу компактности вложения  $\mathfrak{U} \hookrightarrow L_2(\mathbf{G})$  это множество компактно в  $L_2(\mathbf{G})$ . Значит, из любого его бесконечного подмножества можно выбрать фундаментальную в  $L_2(\mathbf{G})$  последовательность  $u_s, s = 1, 2, \dots$ . Так как оператор  $B$  из  $L_2(\mathbf{G})$  в  $\mathfrak{U}$  ограничен и, следовательно, непрерывен, то последовательность  $Bu_s, s = 1, 2, \dots$ , фундаментальна в  $\mathfrak{U}$ .  $\square$

**Теорема 2.** Собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  задачи (1) – (3) для оператора

$$A = \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( -c_1(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) + a_1(x), \frac{\partial}{\partial x} \left( -c_2(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) + a_2(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x} \left( -c_j(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) + a_j(x), \dots \right)$$

вещественны и  $\lambda_s \rightarrow +\infty$  при  $s \rightarrow \infty$ . Собственные значения удовлетворяют неравенству  $\lambda_s > m = \min_j \left( \min_{x \in (0, l_j)} a_j(x) \right)$  во всех случаях, кроме  $a_j(x) = a_i(x) = \text{const}$  для всех  $i, j$ .

Если же  $a_j(x) = a_i(x) = \text{const}$  для всех  $i, j$ , то собственные значения удовлетворяют неравенству  $\lambda_s \geq m, s = 1, 2, \dots$ , причем существует однократное собственное значение, равное  $m$ , с собственной функцией  $\left( \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} c_j(x) dx \right)^{-1} (1, 1, \dots, 1, \dots)$ .

*Доказательство.* Согласно лемме 2 и тождествам (14), (15) число  $\lambda$  является собственным значением задачи (1) – (3) для оператора  $A$ , а  $u$  – соответствующей ему обобщенной собственной функцией тогда и только тогда, когда  $(\lambda - m + 1)$  есть характеристическое число самосопряженного вполне непрерывного оператора  $B$  из  $\mathfrak{U}$  в  $\mathfrak{U}$ , а  $u$  – соответствующий ему собственный элемент. Поэтому существует не более чем счетное множество собственных значений задачи (1) – (3); это множество не имеет конечных предельных точек; все собственные значения вещественны; каждому собственному значению отвечает конечное число (кратность собственного значения) взаимно ортогональных в  $\mathfrak{U}$  собственных функций; собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны в  $\mathfrak{U}$ . Отметим, что для каждого собственного значения  $\lambda$  можно выбрать ровно  $k$ , где  $k$  – кратность  $\lambda$ , действительных попарно ортогональных в  $\mathfrak{U}$  собственных функций.

Пусть

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s, \dots \tag{16}$$

– последовательность, содержащая все собственные значения задачи (1) – (3) для оператора  $A$ , причем каждое собственное значение повторяется столько раз, сколько его кратность. Пусть

$$u_1, u_2, \dots, u_s, \dots \tag{17}$$

– система взаимно ортогональных в  $\mathfrak{U}$  обобщенных собственных функций ( $\|u_s\|_{L_2(\mathbf{G})} = 1$ ); каждая  $u_s$  соответствует собственному значению  $\lambda_s$ :

$$(\lambda_s - m + 1)Bu_s = u_s, \quad s = 1, 2, \dots . \quad (18)$$

Умножая (18) скалярно в  $\mathfrak{U}$  на  $u_s$ , получим в силу (15) равенства

$$\|u\|_{\mathfrak{U}}^2 = (\lambda_s - m + 1)\|u\|_{L_2(\mathbf{G})} = (\lambda_s - m + 1), \quad (19)$$

которые (скалярное произведение в  $\mathfrak{U}$  определено формулой (13)) можно переписать в виде

$$\sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (c_j(x)u_{sjx}^2 + (a_j(x) - \lambda_s)u_{sj}^2) dx = 0. \quad (20)$$

Из равенства (20) вытекает, что для всех  $s = 1, 2, \dots$

$$\lambda_s \geq m = \min_{x \in (0, l_j)} a_j(x), \quad (21)$$

причем для всех  $s = 1, \dots$  имеет место строгое неравенство кроме случая, если значения  $a_j(x) = a_i(x) = \text{const}$  для всех  $i, j$ . Если же  $a_j(x) = a_i(x) = m$  для всех  $i, j$ , то среди собственных значений задачи (1) – (3) есть значение, равное  $-m$ , с собственной функцией, равной  $\left( \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} c_j(x) dx \right)^{-1} (1, 1, \dots, 1, \dots)$ . Это собственное значение имеет кратность 1, так как в силу (20) все собственные функции, ему отвечающие, удовлетворяют равенству  $\sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} c_j(x)u_{sjx}^2 dx = 0$ , т.е. являются постоянными.

Из (19) вытекает, что система

$$\frac{u_1}{\sqrt{\lambda_s - m + 1}}, \frac{u_2}{\sqrt{\lambda_s - m + 1}}, \dots, \frac{u_s}{\sqrt{\lambda_s - m + 1}}, \dots \quad (22)$$

ортонормирована в  $\mathfrak{U}$ . В силу теоремы Гильберта – Шмидта она является ортонормированным базисом в  $\mathfrak{U}$ . Так как пространство  $\mathfrak{U}$  бесконечномерно, то множество (22), а значит, и (16) бесконечно. Поэтому  $\lambda_s \rightarrow +\infty$  при  $s \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Теорема 3.** *Обобщенные собственные функции  $u_1(x), u_2(x), \dots$  задачи (1) – (3) образуют ортонормированный базис в  $L_2(\mathbf{G})$ , т.е. любая функция  $f \in L_2(\mathbf{G})$  разлагается в ряд Фурье*

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} f_s u_s, \quad f_s = \langle f, u_s \rangle, \quad (23)$$

*сходящийся в  $L_2(\mathbf{G})$ . Для функции  $f \in \mathfrak{U}$  ряд (23) по обобщенным собственным функциям задачи (1) – (3) сходится в  $\mathfrak{U}$  и имеет место неравенство*

$$\sum_{s=1}^{\infty} |\lambda_s| |f_s|^2 \leq C \|f\|_{\mathfrak{U}}^2, \quad (24)$$

*где постоянная  $C$  не зависит от  $f$ .*

*В заключении автор считает своим приятным долгом выразить свою искреннюю благодарность профессору Г.А. Свиридову за постановку задачи и интерес к работе и профессору В.Е. Федорову за строгую, но конструктивную критику, в немалой степени способствующую улучшению статьи.*

## Литература

1. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев и др. – М.: Физматлит, 2004. – 272 с.
2. Kosugi, S. A semilinear elliptic equation in a thin network-shaped domain / S. Kosugi // J. Math. Soc. Jap.– 2000.– Vol. 52, № 3.– P. 672 – 697.
3. Свиридов, Г.А. Уравнения соболевского типа на графах / Г.А. Свиридов // Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. работ. – Новосибирск, 2002. – С. 221 – 225.
4. Шеметова, В.В. Исследование одного класса уравнений соболевского типа на графах: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02: защищена 27.12.05: утв. 10.05.06 / Шеметова Вероника Владимировна. – Магнитогорск, 2005. – 109 с. – Библиог.: с. 93 – 109.
5. Свиридов, Г.А. Уравнения Баренблатта-Желтова-Кочиной на графе / Г.А. Свиридов, В.В. Шеметова // Вестник МаГУ. Математика.– Магнитогорск. – 2003.– Вып. 4. – С. 129 – 139.
6. Свиридов, Г.А. Фазовое пространство одной неклассической модели / Г.А. Свиридов, В.В. Шеметова // Изв. вузов. Математика.– 2005.– № 10.– С. 47 – 52.
7. Свиридов, Г.А. Уравнения Хоффа на графе / Г.А. Свиридов, В.В. Шеметова // Дифференц. уравнения.– 2006.– Т. 42, № 1.– С. 126 – 131.
8. Пивоварова, П.О. О неустойчивости решений эволюционных уравнений соболевского типа на графике / П.О. Пивоварова // Вестн. ЮУрГУ. Сер. «Математическое моделирование и программирование». – 2008.– № 15(115), вып. 1. – С. 64 – 68.
9. Загребина, С.А. Начально-конечная задача для линейных эволюционных уравнений соболевского типа на графике / С.А. Загребина, Н.П. Соловьева // Обозрение приклад. и пром. математики. – М., 2009. – Т. 16, вып. 2. – С. 329 – 330.
10. Замышляева, А.А. Решение одного уравнения соболевского типа на графике / А.А. Замышляева // Обозрение приклад. и промыш. математики. – М., 2009. – Т. 16, вып. 2. – С. 332 – 333.
11. Свиридов, Г.А. О прямой и обратной задачах для уравнений Хоффа на графике / Г.А. Свиридов, А.А. Баязитова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2009. – № 1 (18). – С. 6 – 17.

Кафедра «Уравнения математической физики»,  
Южно-Уральский государственный университет  
alfiya@math.susu.ac.ru

Поступила в редакцию 1 марта 2010 г.

# УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ХОФФА НА ГРАФЕ

*C.A. Загребина, П.О. Пивоварова*

## THE STABILITY OF THE HOFF LINEAR EQUATIONS ON A GRAPH

*S.A. Zagrebina, P.O. Pivovarova*

Рассмотрена устойчивость стационарного решения линейных уравнений Хоффа на графе, являющемся моделью конструкции из двутавровых балок. Основной подход – второй метод Ляпунова, модифицированный соответственно нашей ситуации.

*Ключевые слова:* уравнение соболевского типа, граф, фазовое пространство, функция Ляпунова

The stability of stationary solution of the Hoff linear equations on a graph which is a model design of I-beams is considered. The main approach is the second Lyapunov method modifying respectively to our situation.

*Keywords:* Sobolev type equation, graph, phase space, Lyapunov function

## Введение

Пусть  $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}, \mathfrak{E})$  – конечный связный ориентированный граф, где  $\mathfrak{V} = \{V_i\}$  – множество вершин, а  $\mathfrak{E} = \{E_j\}$  – множество ребер, причем каждое ребро  $E_j$  имеет длину  $l_j \in \mathbb{R}_+$  и площадь поперечного сечения  $d_j \in \mathbb{R}_+$ . На графике  $\mathbf{G}$  рассмотрим линейные уравнения Хоффа

$$(\lambda - \lambda_0)u_{jt} + u_{jtxx} = \alpha u_j, \quad u_j = u_j(x, t), \quad x \in (0, l_j), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (0.1)$$

моделирующие динамику выпучивания конструкции из двутавровых балок в линейном приближении. Параметры  $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{R}_+$  характеризуют нагрузку на конструкцию, параметр  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  отвечает свойствам материала балок. Нас интересуют решения уравнений (0.1), удовлетворяющие «условиям непрерывности»

$$u_j(0, t) = u_k(0, t) = u_m(l_m, t) = u_n(l_n, t), \quad E_j, E_k \in E^\alpha(V_i), E_m, E_n \in E^\omega(V_i), \quad (0.2)$$

и «условиям баланса потоков»

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jx}(0, t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k u_{kx}(l_k, t) = 0 \quad (0.3)$$

в вершинах графа. Здесь через  $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$  обозначено множество ребер с началом (концом) в вершине  $V_i$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . (Обсуждение условий (0.2), (0.3) см. напр. в [1]). Основной целью статьи является доказательство асимптотической устойчивости по Ляпунову нулевых решений задачи (0.1) – (0.3) при параметрах  $\lambda \in [0, \lambda_0]$  и  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ .

Дифференциальные уравнения на графах — сравнительно новая область математического знания. Первая монография по данной проблематике вышла в 2004 г. [2]. В ней содержится обстоятельный исторический обзор всех достижений в этой области. За последующие годы количество публикаций, посвященных дифференциальному уравнениям на графах лавинообразно выросло, и авторы, стесненные рамками статьи, воздерживаются от какого-либо их обзора. Еще более стремительно растет число публикаций, посвященных уравнениям соболевского типа, к которым относятся уравнения (0.1). Здесь мы сошлемся на две монографии [3], [4], исторические обзоры в которых взаимно дополняют друг друга. Заметим еще, что первым уравнения соболевского типа на графах начал изучать Г.А. Свиридов [5].

Вернемся к задаче (0.1) – (0.3). Пользуясь понятиями, методами и результатами монографии [6], мы редуцируем ее к линейному уравнению соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu, \quad (0.4)$$

где  $L$  и  $M$  — линейные непрерывные операторы, действующие в специально построенных банаховых пространствах. Отметим универсальность нашего подхода — сейчас все большее число исследователей его придерживается (см. например, [7 – 9]). Исследование устойчивости уравнений (0.4) (в терминах дихотомии решений) было начато в [10]. Затем данный подход был обобщен на полулинейные уравнения соболевского типа [11 – 13] (в терминах инвариантных многообразий). Однако эти методы применить к исследованию устойчивости в нашем случае не представляется возможным. Дело здесь в том, что  $L$ -спектр  $\sigma^L(M)$  оператора  $M$  является замыканием множества

$$\{\mu \in \mathbb{C} : \mu = -\alpha(\lambda_0 - \lambda + \lambda_k)^{-1}, k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda_k = \lambda - \lambda_0\}\},$$

и значит,

$$\sigma^L(M) \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset. \quad (0.5)$$

(Здесь  $\{\lambda_k\}$  — последовательность собственных значений задачи Штурма – Лиувилля на графике, занумерованных по неубыванию с учетом кратности,  $\{\lambda_k\} \in \{0\} \cup \mathbb{R}_+$ . Пояснения об этом можно посмотреть в статье А.А. Баязитовой в данном Вестнике.) Именно нарушение условия (0.5) является главным требованием в работах [10] – [13].

Поэтому для исследования устойчивости в случае (0.4) мы избрали второй метод Ляпунова, обобщение которого на полные метрические пространства дано в [14], гл. 4. Внимательный анализ приведенной там теоремы 4.1.4 показал, что ее можно распространить на необходимые нам нормированные пространства (т. е. без требования их полноты), правда, с потерей равномерности в устойчивости и асимптотической устойчивости (см. определение 4.1.2 [14]). Отметим еще, что в силу (0.5) первый метод Ляпунова здесь тоже не годится.

Статья кроме введения содержит две части и список литературы, который, как было отмечено выше, не претендует на полноту, а лишь отражает вкусы и пристрастия авторов. В первой части делается описание фазовых пространств задачи (0.1) – (0.3) в случаях  $\lambda \in [0, \lambda_0]$  и  $\lambda = \lambda_0$ . Во второй части модифицированный нами второй метод Ляпунова применяется к исследованию устойчивости задачи (0.1) – (0.3).

## 1. Фазовое пространство

Введем в рассмотрение множество  $\mathbf{L}_2(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots) : g_j \in L_2(0, l_j)\}$ , которое станет гильбертовым пространством, если ввести скалярное произведение  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  и норму  $\|\cdot\|_0$  следующим образом:

$$\langle g, h \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} g_j h_j dx \text{ и } \|g\|^2 = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} g_j^2 dx.$$

Введем еще банахово пространство

$$\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots) : u_j \in W_2^1(0, l_j), \text{ причем выполнено (0.2)}\}$$

с нормой

$$\|u\|_{\mathfrak{U}}^2 = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}^2 + u_j^2) dx.$$

(Его естественная гильбертова структура нам не нужна). В силу теоремы вложения Соболева пространства  $W_2^1(0, l_j)$  состоят из абсолютно непрерывных функций, поэтому пространство  $\mathfrak{U}$  корректно определено, а в силу теоремы Кондрашева – Реллиха оно компактно вложено в  $L_2(\mathbf{G})$ . По теореме Ф. Рисса отождествим пространство  $L_2(\mathbf{G})$  со своим сопряженным и через  $\mathfrak{F}$  обозначим сопряженное пространство к  $\mathfrak{U}$  относительно двойственности  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Пространство  $\mathfrak{F}$  – банахово, причем имеют место непрерывные вложения  $\mathfrak{U} \hookrightarrow L_2(\mathbf{G}) \hookrightarrow \mathfrak{F}$ . Пусть  $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ ,  $\lambda \in [0, \lambda_0]$  и  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ . Построим операторы

$$\langle Lu, v \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx} v_{jx} + (\lambda_0 - \lambda) u_j v_j) dx, \quad \langle Mu, v \rangle = -\alpha \langle u, v \rangle,$$

где  $u, v \in \mathfrak{U}$ . Заметим, что операторы  $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ , то есть линейны и непрерывны.

### Лемма 1.

- (i) если  $\lambda \in [0, \lambda_0]$  и  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ , то существуют операторы  $L^{-1}, M^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}, \mathfrak{U})$ ;
- (ii) если  $\lambda = \lambda_0$ , то  $\ker L = \text{span } \{\varphi\}$ , где

$$\varphi = \left( \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j l_j \right)^{-1/2} (1, 1, \dots, 1, \dots).$$

*Доказательство.* Заметим, что (i) вытекает из [14], а (ii) справедливо в силу неравенства

$$\langle Lu, u \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} u_{jx}^2 dx \geq 0.$$

□

**Лемма 2.** При любых  $\lambda_0, \alpha \in \mathbb{R}_+$  и  $\lambda \in [0, \lambda_0]$  оператор  $M$  ( $L, 0$ )-ограничен.

Доказательство есть, например, в [1].

Итак, редукция задачи (0.1) – (0.3) к уравнению (0.4) закончена. Вектор-функцию  $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$  назовем *решением* уравнения (0.4), если она удовлетворяет этому уравнению. Решение  $u = u(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , уравнения (0.4) назовем *решением задачи Коши*, если при некотором  $u_0 \in \mathfrak{U}$

$$u(0) = u_0. \tag{1.1}$$

**Определение 1.** Множество  $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$  называется *фазовым пространством уравнения (0.4)*, если

- (i) любое решение  $u = u(t)$  лежит в  $\mathfrak{P}$  поточечно, т.е.  $u(t) \in \mathfrak{P}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ;
- (ii) при любом  $u_0 \in \mathfrak{P}$  существует единственное решение задачи (0.4), (1.1).

**Теорема 1.** (i) При всех  $\lambda_0, \alpha \in \mathbb{R}_+$  и  $\lambda \in [0, \lambda_0]$  фазовым пространством  $\mathfrak{P}$  задачи (0.1) – (0.3) служит пространство  $\mathfrak{U}$ .

(ii) При всех  $\lambda_0, \alpha \in \mathbb{R}_+$  и  $\lambda = \lambda_0$  фазовым пространством  $\mathfrak{P}$  задачи (0.1) – (0.3) служит подпространство  $\mathfrak{U}^1 = \{u \in \mathfrak{U} : \langle u, \varphi \rangle = 0\}$ .

*Доказательство.* Следуя [6], гл. 4, построим проектор

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu L - M)^{-1} L d\mu,$$

где замкнутый контур  $\gamma \in \mathbb{C}$  ограничивает область, содержащую  $L$ -спектр  $\sigma^L(M)$  оператора  $M$ . Очевидно,

$$P = \begin{cases} \mathbb{I}, & \text{если } \lambda \in [0, \lambda_0); \\ \mathbb{I} - \langle \cdot, \varphi \rangle, & \text{если } \lambda = \lambda_0. \end{cases}$$

□

## 2. Устойчивость

Введем в рассмотрение нормированное пространство  $\mathfrak{V}$  с нормой  $\|\cdot\|$ .

Говорят, что на  $\mathfrak{V}$  задан *поток*, если существует отображение  $S : \mathbb{R} \times \mathfrak{V} \rightarrow \mathfrak{V}$  такое, что для любого  $v \in \mathfrak{V}$  и всех  $t \in \mathbb{R}_+$  выполняются соотношения

- (i)  $S = S(t, v) \in \mathfrak{V}$ , при всех  $t \in \mathbb{R}$ ;  $S(0, v) = v$ ;
- (ii)  $S(t+s, v) = S(t, S(s, v))$  при всех  $s, t \in \mathbb{R}$ .

Точка  $v \in \mathfrak{V}$  такая, что

- (iii)  $S(t, v) = v, t \in \mathbb{R}$ ,

называется *стационарной точкой* потока  $S$ .

**Определение 2.** Стационарная точка  $v \in \mathfrak{V}$  потока  $S$  называется

- (i) *устойчивой (по Ляпунову)*, если для любой окрестности  $\mathfrak{O}_v \subset \mathfrak{V}$  точки  $v$  существует (возможно, другая) окрестность  $\mathfrak{O}'_v$  той же точки, что  $S(t, w) \in \mathfrak{O}'_v$  при всех  $w \in \mathfrak{O}_v$  и  $t \in \mathbb{R}_+$ ;
- (ii) *асимптотически устойчивой (по Ляпунову)*, если она устойчива и для любой точки  $w$  из некоторой окрестности  $\mathfrak{O}_v$  выполняется  $S(t, w) \rightarrow v$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

**Определение 3.** Функционал  $V \in C(\mathfrak{U}; \mathbb{R})$  называется *функцией Ляпунова* потока  $S$ , если

$$\dot{V}(v) = \overline{\lim_{t \rightarrow 0+}} \frac{1}{t} (V(S(t, v)) - V(v)) \leq 0$$

для всех  $v \in \mathfrak{V}$ .

В дальнейшем стационарной точкой потока  $S$  на  $\mathfrak{V}$  будем считать точку нуль. Введем в рассмотрение строго возрастающие функции и непрерывные функции  $\varphi_k : \{0\} \cup \mathbb{R}_+ \rightarrow \{0\} \cup \mathbb{R}_+$  такие, что  $\varphi_k(0) = 0$ ,  $k = 1, 2$ .

**Теорема 2.** Если для потока  $S$  существует функция Ляпунова  $V$  такая, что  $V(0) = 0$  и  $V(v) \geq \varphi_1(\|v\|)$  при всех  $v \in \mathfrak{V}$ , то точка нуль устойчива. Если в добавок  $\dot{V}(v) \leq -\varphi_2(\|v\|)$  при всех  $v \in \mathfrak{V}$ , то точка нуль асимптотически устойчива.

*Доказательство.* Итак, для всякого  $r \in \mathbb{R}_+$  положим  $\mathfrak{O}_r = \{v \in \mathfrak{V} : V(v) < r\}$ . Каждое из множеств  $\mathfrak{O}_r$  является окрестностью точки  $v$ , причем  $V \in \mathfrak{O}_r \Rightarrow V(S(t, v)) \leq V(v) < r$  при всех  $t \in \mathbb{R}_+$ . Если  $V(v) \geq \varphi_1(\|v\|)$ , то для любого  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  существует такое  $r = \varphi(\varepsilon) > 0$ , что  $V(v) < r \Rightarrow \|v\| < \varepsilon$ . В силу непрерывности  $V$  существует  $\delta \in \mathbb{R}_+$  такое, что при  $\|v\| < \delta$  будет  $v \in \mathfrak{O}_r$ , а значит, и  $S(t, v) \in \mathfrak{O}_r$ , так что  $\|S(t, v)\| \leq \varepsilon$  для всех  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Пусть точка  $v \in \mathfrak{O}_v$ , тогда  $V(S(t, v))$  – невозрастающая неотрицательная функция  $t \in \mathbb{R}_+$ . Пусть  $l = \lim_{t \rightarrow +\infty} V(S(t, v))$ , и  $l > 0$ , тогда  $\inf_{t \in \mathbb{R}_+} \|S(t, v)\| > 0$ , значит,  $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \dot{V}(S(t, v)) \leq -m$

для некоторого  $m \in \mathbb{R}_+$ , что противоречит неотрицательности  $V(S(t, v))$ . Таким образом,  $V(S(t, v))$  и  $\|S(t, v)\|$  стремятся к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ .  $\square$

Теперь применим теорему 2 к исследованию устойчивости задачи (0.1) – (0.3). Фазовым пространством  $\mathfrak{P}$  задачи (0.1) – (0.3) в обоих случаях ( $\lambda \in [0, \lambda_0]$  и  $\lambda = \lambda_0$ ) является банахово пространство с нормой  $\|\cdot\|_{\mathfrak{U}}$ , индуцированной из  $\mathfrak{U}$ . Введя в  $\mathfrak{P}$  норму  $\|\cdot\|$  из  $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$ , превратим его в нормированное пространство (которое, очевидно, совпадет с  $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$  в случае  $\lambda \in [0, \lambda_0]$  при его естественном понимании). В силу результатов [6], гл. 4 на  $\mathfrak{P}$  существует поток  $S$ , определяемый формулой

$$S(t, u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu L - M)^{-1} L u e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R},$$

где замкнутый контур  $\gamma$  ограничивает  $L$ -спектр  $\sigma^L(M)$  оператора  $M$ . Очевидно, точка нуль является стационарной точкой этого потока.

Теперь рассмотрим оба случая по отдельности. Пусть сначала  $\lambda \in [0; \lambda_0)$ ,  $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ . В этом случае функцию Ляпунова определим следующим образом:

$$V(u) = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}^2 + (\lambda - \lambda_0) u_j^2) dx.$$

Очевидно,  $V(u) \geq (\lambda - \lambda_0) \|u\|^2$  и  $V(0) = 0$ , поэтому в силу теоремы 2 точка нуль устойчива по Ляпунову. Далее, умножив (0.1) скалярно в  $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$  на  $u$ , получим

$$\dot{V}(u) = -2\alpha \|u\|^2, \quad (2.1)$$

что в силу теоремы 2 означает асимптотическую устойчивость точки нуль.

Рассмотрим теперь случай  $\lambda = \lambda_0$ . В этом случае фазовым пространством задачи (0.1) – (0.3) служит подпространство  $\mathfrak{U}^1$ , в котором, согласно принципу Куранта, можно ввести норму

$$\|u\|_1^2 = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} u_j^2 dx,$$

эквивалентную индуцированной из  $\mathfrak{U}$  норме  $\|\cdot\|_{\mathfrak{U}}$ . Причем в силу теорем вложения Соболева  $\|u\|_1 \geq c \|u\|$ , где  $c \in \mathbb{R}_+$  – константа вложения. Задав функцию Ляпунова  $V(u) = \|u\|_1^2$ , в силу теоремы 2 получаем устойчивость точки нуль. Далее, уравнения (0.1) в силу линейности на  $\mathfrak{U}^1$  выглядят точно таким же образом. Поэтому поступая аналогично предыдущему, получаем справедливость (2.1). Итак, и в этом случае точка нуль является асимптотически устойчивой. Таким образом, доказана

**Теорема 3.** *При всех  $\alpha, \lambda_0 \in \mathbb{R}_+$  и  $\lambda \in [0, \lambda_0]$  стационарная точка нуль задачи (0.1) – (0.3) является асимптотически устойчивой.*

**Замечание 1.** В реальной ситуации число  $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$  можно трактовать как критическую нагрузку на конструкцию из двутавровых балок. Теорема 3 показывает, что при всех нагрузках  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ , не превышающих критическую, стационарная точка нуль не теряет асимптотической устойчивости. В дальнейшем авторы в численном эксперименте собираются показать потерю устойчивости при  $\lambda > \lambda_0$ .

*Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить профессора Г.А. Свиридову за ценные советы в процессе подготовки статьи.*

## **Литература**

1. Свиридюк, Г.А. Уравнения Хоффа на графах / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, №1. – С. 126 – 131.
2. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев и др. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
3. Demidenko, G.V. Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest – order derivative / G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii. – N. Y.; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003.
4. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
5. Свиридюк, Г.А. Уравнения соболевского типа на графах / Г.А. Свиридюк // Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. работ. Новосибирск, 2002. – С. 221 – 225.
6. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov – Utrecht; Boston: VSP, 2003.
7. Замышляева, А.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка / А.А. Замышляева // Вычислите. технологии. – 2003. – Т. 8, №4. – С. 45 – 54.
8. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Н.А. Манакова // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 9. – С. 1185 – 1192.
9. Келлер, А.В. Численное решение задачи стартового управления для системы уравнений леонтьевского типа / А.В. Келлер // Обозрение приклад. и пром. математики. – М., 2009. – Т. 16, вып. 2. – С. 345 – 346.
10. Свиридюк, Г. А. Инвариантные пространства и дихотомии решений одного класса линейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, А.В. Келлер // Изв. ВУЗ. Математика. 1997. №5. С. 60-68.
11. Китаева, О.Г. Устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия уравнения Осколкова / О.Г. Китаева, Г.А. Свиридюк // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск, 2005. С. 160 – 166.
12. Загребина, С.А. О существовании и устойчивости решений уравнений Навье – Стокса / С.А. Загребина // Вестн. МаГУ. Сер. Математика. – Магнитогорск, 2005. – Вып. 8. – С. 74 – 86.
13. Загребина, С.А. Существование и устойчивость решений одного класса полулинейных уравнений соболевского типа / С.А. Загребина, М.М. Якупов // Вестн. ЮУрГУ. Сер. «Математическое моделирование и программирование». – Челябинск, 2008. – № 27(127), вып. 2. – С. 10 – 18.
14. Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. – М.: Мир, 1985.

Кафедра «Уравнения математической физики»,  
Южно-Уральский государственный университет  
zsophya@mail.ru

*Поступила в редакцию 25 февраля 2010 г.*

# О ЛИНЕЙНОСТИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭПР-ОТКЛИКА НА ВОЗДЕЙСТВИЕ ИОНИЗИРУЮЩЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ДОЗИМЕТРИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ ЭМАЛИ ЗУБОВ

*Заляпин В.И., Шишкина Е.А.*

## ON THE LINEARITY OF A STATISTICAL MODEL FOR THE EPR-RESPONSE TO THE IONIZING RADIATION IN DOSIMETRIC STUDIES OF TOOTH ENAMEL

*Zalyapin V.I., Shishkina E.A.*

На основании экспериментальных данных, независимо полученных в лабораториях Института физики металлов (Екатеринбург, Россия), Исследовательского центра Гельмгольца (Мюнхен, Германия) и Высшего института здравоохранения (Рим, Италия), исследована гипотеза о линейности калибровочной кривой, пересчитывающей амплитуды ЭПР-сигнала в поглощенные дозы.

*Ключевые слова:* ионизирующее излучение, ЭПР-измерения, регрессия, линейное приближение дозовой зависимости

The hypothesis of the linearity of the calibration curve to convert from EPR measurements to absorbed dose was investigated on the basis of the independent experimental data from IMP (Russia, Ekaterinburg), GMBH (Germany, Munich), ISS (Italy, Rome).

*Keywords:* ionizing radiation, EPR-spectroscopy, regression, linear approximation of dose dependence

## Введение

С точки зрения дозиметрии зубы представляют собой уникальный источник информации. Короткое время формирования зубной коронки, отсутствие процессов резорбции и высокая степень минерализации делают этот биологический объект весьма удобным для исследований методами экспериментальной физики [1].

В последнее десятилетие для ретроспективной оценки доз внешнего облучения широкое распространение получил метод Электронного Парамагнитного Резонанса (ЭПР) на зубных тканях [2, 3]. Метод основан на детектировании концентрации стабильных радикалов  $\text{CO}_2^-$  в гидроксиапатите (минеральной составляющей кальцифицированных тканей). Под действием ионизирующего излучения из радикалов  $\text{CO}_3^{2-}$  образуется стабильный ионный комплекс  $\text{CO}_2^-$ . Таким образом, облучение гидроксиапатита приводит к накоплению в нем радикалов  $\text{CO}_2^-$ . Количество образовавшихся радиационно-индукционных радикалов  $\text{CO}_2^-$  под действием радиации должно быть пропорционально поглощенной энергии в достаточно широком диапазоне доз. С увеличением поглощенной энергии может наблюдаться насыщение индуцированных радикалов  $\text{CO}_2^-$ , когда упомянутая пропорциональность пропадает. Однако

эксперименты показывают, что в области наблюдаемых доз (по крайней мере, до 500 Гр), насыщения не наблюдается. Поэтому в большинстве лабораторий ЭПР-дозиметрические оценки базируются на линейном приближении для зависимости ЭПР-отклика от поглощенной дозы.

Сегодня в мире имеется около 20 исследовательских групп, каждая из которых имеет собственный метод приготовления образцов, измерения проводятся на различной аппаратуре, и спектры обрабатываются с помощью авторского программного обеспечения.

Каждая группа использует собственные алгоритмы пересчета измеренных амплитуд в поглощенные дозы. Экспериментатор, зафиксировавший величину  $A$  амплитуды ЭПР-сигнала из упомянутой области, считает, что эта амплитуда линейно связана с поглощенной образцом дозой  $d$ :

$$A = A(d) = \alpha \cdot d + \beta. \quad (1)$$

Однако реальный метод ЭПР-дозиметрии является многоступенчатым, включающим этап химической обработки образцов эмали, собственно ЭПР-измерений и анализа спектров. Уровень шумов ЭПР-спектра, включающих как аппаратный «белый» шум, так и примесные шумы (зависящие от метода предварительной химической обработки образца), может приводить к нарушению линейности ЭПР-отклика на поглощенную дозу, особенно в области малых амплитуд ЭПР-измерений [4].

## 1. Допущения и модели

Пусть теоретическая зависимость амплитуды  $A$  ЭПР-сигнала от поглощенной дозы  $d$  описывается некоторой функцией  $A = \varphi(d)$ . Естественно считать, что  $\varphi(d)$  обладает следующими свойствами:

$$\varphi(0) = 0, \quad d_1 > d_2 \Rightarrow \varphi(d_1) > \varphi(d_2). \quad (2)$$

В силу монотонности, функция  $\varphi(d)$  обратима, и если,  $A = \varphi(d)$ , то отсюда следует, что  $d_A = \varphi^{-1}(A)$  – поглощенная доза, отвечающая амплитуде  $A$  ЭПР-сигнала.

### 1.1. Модель измерений

Пусть  $\tilde{A}$  – экспериментально измеренная амплитуда  $A$  ЭПР-сигнала. Измерения  $\tilde{A}$  связаны с истинными (точными) значениями амплитуды  $A = \varphi(d)$  аддитивной относительно ошибки моделью измерений

$$\tilde{A} = A + \varepsilon, \quad (3)$$

где  $\varepsilon$  – случайные ошибки измерений.

Будем далее предполагать, что измерения независимы, центрированы и, возможно, неравноточные.

В силу (3), измеренное значение  $\tilde{A}$  отвечает истинному  $A$  такому, что  $\Delta A = \tilde{A} - A = \varepsilon$ . Для любого конкретного значения амплитуды  $A$  отвечающая ей поглощенная доза  $d_A$  дается соотношением  $d_A = \varphi^{-1}(A)$ . Отсюда:

$$\varepsilon = \tilde{A} - A = \varphi(d_{\tilde{A}}) - \varphi(d_A) = \varphi'(\tau)(d_{\tilde{A}} - d_A), \quad \tau \in [d_A, d_{\tilde{A}}].$$

Для относительной погрешности  $\delta_d$  элементарные выкладки дают

$$\delta_d = \frac{|d_{\tilde{A}} - d_A|}{d_A} = c \cdot \delta_A, \quad c = \frac{\varphi(d_A)}{d_A} \cdot \frac{1}{\varphi'(\tau)}. \quad (4)$$

Анализ соотношения (4) показывает, что относительная погрешность восстановления поглощенной дозы имеет тот же порядок, что и относительная погрешность измерений. Если измеряемая амплитуда  $A$  мала в сравнении с ошибками измерения  $\varepsilon$ , то  $\delta_d$  – значительна, и, следовательно, поглощенная доза будет найдена со значительной погрешностью. С увеличением отношения  $\frac{A}{\varepsilon}$  величина  $\delta_A$ , а с нею и  $\delta_d$  убывает, что позволяет надеяться на относительно точное восстановление поглощенной дозы.

## 1.2. Модель калибровки

Эмаль зубов, удаляемых по медицинским показаниям, у взрослых людей имеет свою индивидуальную дозиметрическую предысторию. Естественные радионуклиды в окружающей среде и в организме, космическое облучение, медицинские рентгеновские процедуры – все эти факторы в комплексе с индивидуальной радиационной чувствительностью эмали к облучению (изменяется в популяции в пределах  $\pm 8\%$ ) приводят к тому, что любой образец обладает неизвестной фоновой дозой. Иными словами, не существует «чистого» (необлученного) естественного гидроксиапатита. Это приводит к тому, что при добавочном облучении (например, в условиях дозиметрической калибровки) суммарная поглощенная доза  $d$  в эмали будет складываться из известной дозы  $d_{cal}$  добавочного (калибровочного) облучения и неизвестной начальной дозы  $d_0$ .

С учетом этого обстоятельства в первом приближении имеет место равенство

$$d = d_{cal} + d_0, \quad A = \varphi(d) = \varphi(d_{cal} + d_0) \simeq \varphi(d_{cal}) + \varphi'(d_{cal})d_0. \quad (5)$$

Для калибровки расчетного соотношения измерялись значения амплитуд ЭПР-сигнала, отвечающие известным дозам дооблучения исследуемых образцов. Пусть  $\tilde{A}_i^j$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, r_i$  –  $j$ -е измерение амплитуды ЭПР-сигнала на  $i$ -м дозовом калибровочном уровне  $d_{cal}^i$ . Измерения  $\tilde{A}_i^j$  связаны с дозовыми уровнями гипотетической моделью измерений

$$\tilde{A}_i^j = A(d_{cal}^i) + \varepsilon_i^j = \varphi(d_{cal}^i) + \varphi'(d_{cal}^i)d_0 + \varepsilon_i^j. \quad (6)$$

Заметим, что если функция  $\varphi(d)$  линейна, то (6) имеет вид

$$A = \varphi(d) \simeq \alpha d_{cal} + \alpha d_0 = \alpha d_{cal} + \beta, \quad (7)$$

где  $\beta = \alpha d_0$  – случайная величина, определяемая начальной поглощенной дозой. Усредняя (7), получаем регрессионную модель

$$M[A] = A_{mean} \simeq \alpha d_{cal} + M[\beta] = \alpha d_{cal} + \alpha m_0 = \alpha d_{cal} + \beta_{mean}. \quad (8)$$

Отметим, что соотношения (5 – 8) являются моделью, в которой измерения  $A$  приписываются не истинным значениям  $d_A = d_{cal}^i + d_0$  аргумента, а фиктивным, роль которых играют известные калибровочные уровни дооблучения  $d_{cal}^i$ .

## 1.3. Материалы и методы

Для оценивания коэффициентов модели (6,7,8) были использованы экспериментальные данные, полученные в рамках межлабораторного сравнения, в котором участвовали три института: ИФМ – Институт Физики Металлов (Екатеринбург, Россия); GMBH – Исследовательский центр Гельмгольца (Мюнхен, Германия) и ISS – Высший Институт Здравоохранения (Рим, Италия). Три метода приготовления образцов тестировались последовательно каждой из лабораторий, использующей собственный метод измерений, отличающийся как

аппаратно, так и методом анализа спектров. Таким образом, каждая лаборатория измерила три пула образцов с разными начальными условиями.

Образцы зубов, использованные в эксперименте, были получены из стоматологических клиник, где они удалялись исключительно по медицинским показаниям. Доноры не проживали на радиационно-загрязненных территориях. Эмаль отделялась от дентина, и каждая исследовательская группа – участник межлабораторного сравнения химически обрабатывала эмаль согласно собственному протоколу подготовки образцов к ЭПР-измерениям. Образцы предварительно индивидуально тестировались методом ЭПР-дозиметрии, чтобы исключить возможные случайные высокие дозы за счет ошибок идентификации либо неучтенных медицинских облучений. Затем каждая лаборатория приготовила смесь из эмали зубов, чтобы получить физическое приближение однородного образца. Следует отметить, что смешанные образцы ISS и ИФМ были приготовлены из зубов сельских жителей Уральского региона возрастом  $50 \pm 5$  (ИФМ) и  $65 \pm 12$  (ISS) лет. GMBH использовал зубы египетских доноров. Следует отметить, что накопление дозы от естественного радиационного фона согласно [5] для европейской территории составляет порядка 1 мГр в год. Иными словами, «начальные» фоновые дозы в пулах уральских зубов, приготовленных в ISS и ИФМ, отличались не очень существенно. В то же время не облучавшиеся дополнительно египетские зубы по предварительным экспертным оценкам демонстрировали существенно более слабый ЭПР-сигнал. Методика химического приготовления и ЭПР-измерений подробно описана в [6, 7].

Смешанные образцы разбивались на порции приблизительно по 100 мг и каждая лаборатория дооблучала свои образцы по схеме, представленной в таблице 1.

**Таблица 1**

Схема дооблучения <sup>1</sup> образцов <sup>2</sup>						
Доза облучения Гр	0	0,1	0,2	0,5	1	1,5
Количество образцов	5	5	5	5	5	5

Каждая лаборатория выполнила ЭПР-измерения, как на собственных, так и на образцах, приготовленных в двух других лабораториях. Каждая порция смешанных образцов измерялась трижды. Результат тройного измерения усреднялся. Стандартное отклонение для трех повторных измерений рассматривалось как характеристика воспроизводимости результата. Подробно дизайн межлабораторного сравнения описан в [8].

#### **1.4. Линейность ЭПР-отклика**

Как было отмечено выше, общие соображения о характере накопления поглощенной дозы позволяют высказать гипотезу о линейной зависимости  $A = \varphi(d) = \alpha \cdot d$  ЭПР-отклика от поглощенной дозы, что в силу соотношений (7) – (8) приводит к линейной зависимости экспериментальных ЭПР-сигналов от *калибровочных уровней* поглощенных доз.

Коэффициенты зависимости (8) оценивались по имеющимся экспериментальным данным взвешенным методом наименьших квадратов (ВМНК), в качестве весов использовалась характеристика рассеяния повторных (трехкратных) измерений каждого образца.

Гипотеза о линейности проверялась на основании следующих соображений.

Пусть  $R^2$  – коэффициент детерминации (квадрат множественного коэффициента корреляции),  $\Theta^2$  – корреляционное отношение  $A$  относительно  $d_{cal}$ ,  $R^2 \leq \Theta^2$ . Известно (например,

<sup>1</sup>ИФМ измерил дополнительно 27 необлученных порций смешанного образца.

<sup>2</sup>Дозы облучения, приведенные в таблице, являются округленными. Реальные величины доз варьировали в пределах  $\pm 0,05$  Гр относительно указанных. В расчетах принимались во внимание точные величины.

[9]), что в случае линейности истинной зависимости должно выполняться  $R^2 = \Theta^2$ . Критерий проверки линейности, основанный на последнем соотношении, строится на основании сравнения выборочных аналогов  $\Theta^{*2}$ ,  $R^{*2}$  упомянутых характеристик с помощью статистики

$$\Xi^2 = \frac{N-n}{n-2} \cdot \frac{\Theta^{*2} - R^{*2}}{1 - \Theta^{*2}}, \quad (9)$$

имеющей  $F$ -распределение с  $(n-2, N-n)$  степенями свободы. В соотношении (9)  $n$  - количество калибровочных дозовых уровней (в рассматриваемой ситуации = 6),  $N = \sum_{i=1}^n r_i$  – общее количество различных образцов,  $r_i$  – количество различных образцов, измеренных на  $i$ -ом калибровочном уровне.  $\Theta^{*2}$  – выборочный аналог корреляционного отношения – дается равенством:

$$\Theta^{*2} = \frac{\sum_{i=1}^N (\bar{A}_i - \bar{A})^2 \sum_{j=1}^{r_i} w_{ij}}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{r_i} w_{ij} (A_i^j - \bar{A})^2}, \quad \bar{A}_i = \frac{\sum_{j=1}^{r_i} w_{ij} A_i^j}{\sum_{j=1}^{r_i} w_{ij}}, \quad \bar{A} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{r_i} w_{ij} A_i^j}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{r_i} w_{ij}}.$$

## 2. Результаты

В соответствии со сделанными допущениями коэффициенты зависимости (8) оценивались [10] для различных лабораторий, с учетом различных методик приготовления образцов БМНК. Результаты оценивания приведены в табл. 2.

Таблица 2

Регрессионные модели

Лаборат.-измеритель	Лаборат.-изготовитель	Угловой коэффиц. регрессии $\alpha$	95% довер. границы для коэффициента $\alpha$	$R^{*2}$	$\Theta^{*2}$	$\Xi^2$
IMP	IMP	0,949	0,895 1,003	0,9620	0,9660	1,3529
IMP	GMBH	1,076	1,008 1,143	0,9750	0,9770	0,5217
IMP	ISS	0,992	0,898 1,085	0,9448	0,9630	2,9514
GMBH	IMP	1,096	0,985 1,207	0,9570	0,9627	1,7574
GMBH	GMBH	0,990	0,964 1,016	0,9949	0,9950	0,1200
GMBH	ISS	0,942	0,902 0,982	0,9930	0,9960	4,5000
ISS	IMP	1,046	0,991 1,102	0,9830	0,9881	4,9286
ISS	GMBH	0,982	0,942 1,022	0,9900	0,9901	0,0606
ISS	ISS	1,001	0,957 1,044	0,9880	0,9890	0,5455
IMP,GMBH,ISS	IMP	1,030	0,990 1,070	0,9600	0,9606	0,4004
IMP,GMBH,ISS	GMBH	1,004	0,976 1,032	0,9850	0,9858	1,2246
IMP,GMBH,ISS	ISS	0,980	0,945 1,014	0,9740	0,9754	1,2355
IMP	IMP,GMBH,ISS	1,000	0,961 1,039	0,9600	0,9627	1,9356
GMBH	IMP,GMBH,ISS	0,995	0,959 1,032	0,9760	0,9767	0,6499
ISS	IMP,GMBH,ISS	1	0,966 1,035	0,9750	0,9762	1,0396
IMP,GMBH,ISS	IMP,GMBH,ISS	0,999	0,978 1,020	0,9694	0,9700	1,4300

## 3. Заключение

Сравнение значений критерия  $\Xi^2$  с критическими значениями  $F$ -критерия на 99% уровне надежности (меняется в рассматриваемой ситуации от 3,385 до 4,218), дает основание счи-

тать гипотезу о линейности отклика относительно калибровочных уровней хорошо согласующейся с экспериментальными данными.

Следует, однако, отметить, что хорошее линейное приближение на широком диапазоне амплитуд не гарантирует отсутствия значительных неопределенностей ЭПР-измерений в области относительно малых измеряемых доз. Поэтому, важным следующим этапом данного исследования должно стать определение того диапазона амплитуд, при котором линейная регрессия для отклика ЭПР и дозы облучения может быть надежно использована в качестве калибровочной кривой.

*Работа выполнена в рамках интегрированного проекта SOUL (Southern Urals Radiation Risk Research), контракт FP6-516478*

## Литература

1. Ikeya, M. ESR dosimetry for atomic bomb survivors using shell buttons and tooth enamel / Ikeya M., Miyajima J., Okajima S // Japanese Journal of Applied Physics. – 1984. – V.23. – P.697 – 699.
2. Wieser, A. The Second Intercomparison on EPR Tooth Dosimetry / Wieser A., Mehta. K., Amira. S. // Radiation Measurements, 32:549-557; 2000.
3. Degteva, M.O Electron paramagnetic resonance and fluorescence in situ hybridization-based investigations of individual doses for persons living at Metlino in the upper reaches of the Techa River / Degteva M.O, Anspaugh L.R, Akleyev A.V // Health Phys 88:139-153; 2005.
4. Результаты дозиметрических исследований зубов жителей прибрежных территорий реки Теча / Шишкина Е.А., Дегтева М.О., Толстых Е.И., Швед В.А., Токарева Е.Э, Иванов Д.В., Баянкин С.Н., Визер А., Гексу Й., Анспо Л.Р. // Вопр. Радиационной Безопасности. Спец. Вып. 1. – 2006. – С. 26 – 44.
5. Ivannikov, A.I. Wide Scale EPR Retrospective Dosimetry. Results and problems / Ivannikov A.I., Skvortzov V.G., Stepanenko V.F. // Radiation Protection Dosimetry. – 1997. – V. 71. – P. 175 – 180.
6. ISS protocol for EPR tooth dosimetry / Onori S., Aragno D., Fattibene P., Petetti E. and Pressello M. C. // Radiation Measurements. – 2000. – V. 32, Issue 5 – 6. – P. 787 – 792.
7. Issues in the validation of external dose: background and internal dose components of cumulative dose estimated using the electron paramagnetic resonance (EPR) method. Final Report for Milestone 7, Part 1. / E.A. Shishkina, V.A. Shved, M.O. Degteva, E.I. Tolstykh, D.V. et al. // Chelyabinsk and Salt Lake City: Urals Research Center for Radiation Medicine and University of Utah; September 2003.
8. Wieser, A. Assessment of performance parameters for EPR dosimetry with tooth enamel / Wieser A., Fattibene P., Shishkina E.A., Ivanov D.V., De Coste V., Gettler A., Onori S. // Radiation Measurements. – 2008. – V. 43, Issues 2 – 6. – P. 731 – 736..
9. Айвазян, С.А. Прикладная статистика. Исследование зависимостей / С.А. Айвазян, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин. – Москва: ФиС, 1985.
10. Статистический анализ результатов ЭПР-дозиметрии / Заляпин В.И., Шишкина Е.А., Fattibene P., Wieser A., Иванов Д.В., Дегтева М.О. // Вестн. ЮУрГУ. Сер. «Мат. моделирование и программирование». – 2008. – №27 (127), вып. 2 – С. 36 – 44.

Кафедра математического анализа,  
Южно-Уральский государственный университет  
vzal@susu.ac.ru

*Поступила в редакцию 19 марта 2010 г.*

## НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА – ЛЯВА

*A.A. Замышляева, А.В. Юзеева*

### THE INITIAL-FINISH VALUE PROBLEM FOR THE BOUSSINESQ – LÖVE EQUATION

*A.A. Zamyshlyeva, A.V. Yuzeeva*

Рассматривается начально-конечная задача для уравнения Буссинеска – Лява, моделирующего продольные колебания балки. Проводится редукция к абстрактной начально-конечной задаче для уравнения соболевского типа второго порядка. Получены теоремы об однозначной разрешимости исходной и абстрактной задач.

*Ключевые слова:* *уравнения соболевского типа, фазовое пространство, M,N-функции, дифференциальные уравнения на графах, начально-конечная задача*

We investigate the initial-finish value problem for the Boussinesq – Löve equation by reducing it to the initial-finish value problem for the Sobolev type equation of the second order. We obtain theorems about the unique solvability of such problems.

*Keywords:* *the Sobolev type equations, the phase space, the M,N-functions, the differential equations defined on graphs, the initial-finish value problem*

### Введение

Пусть  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{F}$  – банаховы пространства, операторы  $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$  (т.е. оба линейны и непрерывны). Рассмотрим линейное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu, \quad (1)$$

Вектор-функцию  $u \in C^1(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$  назовем *решением* уравнения (1), если при подстановке в уравнение она обращает его в тождество. Решение  $u = u(t)$  уравнения (1) назовем *решением задачи Коши*, если оно вдобавок удовлетворяет условию

$$u(0) = u_0, \quad (2)$$

где  $u_0 \in \mathfrak{U}$  – некоторый, вообще говоря, произвольный вектор.

Если существует оператор  $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}, \mathfrak{U})$ , то уравнение (1) тривиально редуцируется к уравнению

$$\dot{u} = Su, \quad (3)$$

где оператор  $S = L^{-1}M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$  по построению. Как нетрудно показать, единственное решение задачи (3), (2) существует при любом векторе  $u_0 \in \mathfrak{U}$  и имеет следующий вид

$$u(t) = U^t u_0, \quad (4)$$

где оператор-функция  $U^\bullet \in C^1(\mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathfrak{U}))$  задается рядом Тейлора

$$U^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^k t^k}{k!}. \quad (5)$$

Поскольку оператор  $S \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ , то его спектр  $\sigma(S)$  ограничен. Значит, существует контур  $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r\}$ , ограничивающий круг, содержащий спектр. Нетрудно видеть, что оператор-функция (5) может быть представлена следующим образом:

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}(S) e^{\mu t} d\mu, \quad (6)$$

где  $R_{\mu}(S) = (\mu I - S)^{-1}$  – резольвента оператора  $S$ . Данный подход к решению задачи (1), (2) может быть распространен и на случай необратимого оператора  $L$ . Мы будем использовать теорию и методы, разработанные в [1], хорошо проявившие себя в работах [2 – 5]. Следуя [1], введем в рассмотрение *L-резольвентное множество*

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}, \mathfrak{U})\}$$

и *L-спектр*  $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$  оператора  $M$ . Оператор  $M$  называется *(L, σ)-ограниченным*, если

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \forall \mu \in \mathbb{C} (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Понятие *(L, σ)-ограниченного* оператора оказалось слишком широким для однозначной разрешимости задачи (1), (2); обычно вместо него используется понятие *(L, p)-ограниченного оператора*, где число  $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  равно порядку полюса *L-резольвенты*  $(\mu L - M)^{-1}$  оператора  $M$  в точке  $\infty$  (при  $p = 0$  в точке  $\infty$  – устранимая особая точка).

Итак, пусть оператор  $M$  *(L, p)-ограничен*. Тогда существует контур  $\gamma \subset \mathbb{C}$ , ограничивающий область, содержащую *L-спектр* оператора  $M$ . Аналогично (6) построим оператор-функцию

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_M^L(S) e^{\mu t} d\mu, \quad (7)$$

где  $R_{\mu}^L(M) = (\mu L - M)^{-1} L$  – *правая L-резольвента* оператора  $M$ . В случае необратимости оператора  $L$ , но при условии *(L, p)-ограниченности* оператора  $M$ , существует единственное решение задачи (1), (2), но не для всех  $u_0 \in \mathfrak{U}$ , а только для тех, которые лежат в подпространстве  $\mathfrak{U}^1 = \text{im } U^0$ .

В [1] исследование задачи (1), (2) удалось распространить на неполное уравнение соболевского типа второго порядка

$$A\ddot{v} = Bv, \quad (8)$$

где операторы  $A, B \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}, \mathfrak{G})$ ,  $\mathfrak{V}$  и  $\mathfrak{G}$  – банаховы пространства, причем оператор  $B$  *(A, p)-ограничен*. Единственное решение  $v \in C^{\infty}(\mathbb{R}; \mathfrak{V})$  задачи Коши

$$\dot{v}(0) = v_1, v(0) = v_0 \quad (9)$$

для уравнения (8) представимо в виде

$$v(t) = V_1^t v_1 + V_0^t v_0, \quad (10)$$

где *пропагаторы*  $V_k^t, k = 0, 1$ , имеют следующий вид:

$$V_k^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \mu^{1-k} (\mu^2 A - B)^{-1} A e^{\mu t} d\mu, k = 0, 1. \quad (11)$$

Здесь контур  $\gamma \in \mathbb{C}$  ограничивает область, содержащую  $A$ -спектр оператора  $B$ ; а начальные значения  $v_k \in \text{im } V_1^0 = \text{im } V_0^0, k = 0, 1$ , где  $\text{im } \dot{V}_1^0 = \text{im } V_0^0$  – подпространство в  $\mathfrak{V}$ . Абстрактный результат иллюстрирован начально-краевой задачей для неполного уравнения Буссинеска – Лява

$$(\lambda - \Delta)v_{tt} = \alpha^2 \Delta v,$$

моделирующего продольные волны в упругой балке без учета поперечной инерции.

Нашей целью является изучение начально-конечной задачи для полного уравнения Буссинеска – Лява

$$(\lambda - \Delta)v_{tt} = \alpha^2 \Delta v_t + \beta^2 \Delta v, \quad (12)$$

моделирующего продольные волны в упругой балке с учетом поперечной инерции. Термин «начально-конечная задача» появился совсем недавно, и отражает он тот факт, что при постановке такой задачи для уравнения (1) часть данных задается в начале временного промежутка  $[0, T]$ , а другая часть – в конце. Первоначально такая задача называлась «задачей сопряжения» или «задачей Веригина» и рассматривалась как обобщение задачи с данными на свободной поверхности. Именно в таком контексте была построена теория таких задач для линейных уравнений соболевского типа первого порядка и разработаны приложения этой теории [4].

В статье кроме Введения и Списка литературы содержится три параграфа. В п.1 приведены основные результаты теории операторных вырожденных  $M, N$ -функций [5]. В п.2, следуя [4], изучается абстрактная начально-конечная задача. П.3 посвящен постановке и исследованию начально-конечной задачи для уравнения (12).

## 1. Вырожденные $M, N$ -функции

Пусть  $\mathfrak{V}$  и  $\mathfrak{G}$  – банаховы пространства, операторы  $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{G})$ . Обозначим через  $\vec{B}$  пучок операторов  $(B_1, B_0)$ .

**Определение 1.** Множество  $\rho^A(\vec{B}) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}; \mathfrak{U})\}$  и  $\sigma^A(\vec{B}) = \mathbb{C} \setminus \rho^A(\vec{B})$  будем называть  $A$ -резольвентным множеством и  $A$ -спектром пучка  $\vec{B}$ .

Заметим, что множество  $\rho^A(\vec{B})$  всегда открыто, поэтому  $A$ -спектр  $\sigma^A(\vec{B})$  пучка  $(\vec{B})$  всегда замкнут.

**Определение 2.** Оператор-функцию  $R_\mu^A(\vec{B}) = (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1}$  с областью определения  $\rho^A(\vec{B})$  будем называть  $A$ -резольвентой пучка  $\vec{B}$ .

$A$ -резольвента пучка  $\vec{B}$  всегда аналитична в своей области определения.

**Определение 3.** Пучок операторов  $\vec{B}$  называется полиномиально ограниченным относительно оператора  $A$  (или просто полиномиально  $A$ -ограниченным), если

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \forall \mu \in \mathbb{C} (|\mu| > a) \Rightarrow (R_\mu^A(\vec{B}) \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}; \mathfrak{V})).$$

Если существует оператор  $A_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}; \mathfrak{V})$ , то пучок  $\vec{B}$  полиномиально  $A$ -ограничен.

Если  $\ker A \bigcap \left( \bigcap_{k=0}^1 \ker B_k \right) \neq \{0\}$ , то пучок  $\vec{B}$  не будет полиномиально  $A$ -ограниченным.

Зафиксируем  $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$  – контур, ограничивающий круг, содержащий  $\sigma^A(\vec{B})$ . Введем и обсудим одно важное в дальнейшем условие. Если пучок  $\vec{B}$  полиномиально

$A$ -ограничен, то можно потребовать, что

$$\int_{\gamma} R_{\mu}^A(\vec{B}) d\mu = \mathbb{O}. \quad (A)$$

Это условие, впервые введенное в [5], оказалось ключевым при рассмотрении уравнений соболевского типа высокого порядка. Заметим, что если существует оператор  $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}; \mathfrak{V})$ , то условие (A) выполняется; а если оператор  $A = \mathbb{O}$  и существует оператор  $B_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}; \mathfrak{V})$ , то нет.

Пусть пучок  $\vec{B}$  полиномиально  $A$ -ограничен, и выполнено (A). Тогда имеют смысл следующие операторы как интегралы от аналитических оператор-функций:

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \mu R_{\mu}^A(\vec{B}) A d\mu, Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \mu A R_{\mu}^A(\vec{B}) d\mu.$$

**Лемма 1.** Пусть пучок  $\vec{B}$  полиномиально  $A$ -ограничен, и выполнено условие (A). Тогда операторы  $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{G})$  и  $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{G})$  — проекторы.

Положим  $\mathfrak{V}^0 = \ker P$ ,  $\mathfrak{G}^0 = \ker Q$ ,  $\mathfrak{V}^1 = \text{im } P$ ,  $\mathfrak{G}^1 = \text{im } Q$ . Из леммы следует, что  $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}^0 \oplus \mathfrak{V}^1$ ,  $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^0 \oplus \mathfrak{G}^1$ . Через  $A^k$  ( $B_l^k$ ) обозначим сужение оператора  $A$  ( $B_l$ ) на  $\mathfrak{V}^k$ ,  $k, l = 0, 1$ .

**Теорема 1.** Пусть пучок  $\vec{B}$  полиномиально  $A$ -ограничен и выполнено условие (A). Тогда действия операторов расщепляются:

- (i)  $A^k \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^k; \mathfrak{G}^k)$ ,  $k = 0, 1$ ;
- (ii)  $B_l^k \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^k; \mathfrak{G}^k)$ ,  $k, l = 0, 1$ ;
- (iii) существует оператор  $(A^1)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}^1; \mathfrak{V}^1)$ ;
- (iv) существует оператор  $(B_0^0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}^0; \mathfrak{V}^0)$ ;

Теперь рассмотрим полное уравнение соболевского типа второго порядка

$$A\ddot{v} = B_1\dot{v} + B_0v. \quad (13)$$

Вектор-функцию  $v \in C^2(\mathbb{R}; \mathfrak{V})$  назовем *решением* уравнения (13), если оно обращает (13) в тождество. Решение  $v = v(t)$  уравнения (13) называется *решением задачи Коши*

$$\dot{v}(0) = v_1, v(0) = v_0, \quad (14)$$

если оно удовлетворяет (14).

**Определение 4.** Оператор-функцию  $V^{\bullet} \in C^{\infty}(\mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathfrak{G}))$  будем называть пропагатором уравнения (13), если для любого  $v \in \mathfrak{V}$  вектор-функция  $v(t) = V^t v$  будет решением этого уравнения.

Рассмотрим семейства операторов

$$V_1^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^A(\vec{B}) A e^{\mu t} d\mu, t \in \mathbb{R},$$

$$V_0^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^A(\vec{B})(\mu A - B_1) e^{\mu t} d\mu, t \in \mathbb{R}.$$

Как показано в [5], оба эти семейства являются пропагаторами уравнения (13). Причем если контур  $\gamma \subset \rho^A(\vec{B})$  и ограничивает область  $\Gamma$ , такую, что  $\sigma^A(B) \cap \bar{\Gamma} = \emptyset$ , то в силу теоремы Коши  $V_1^t = V_0^t = \mathbb{O}$  при всех  $t \in \mathbb{R}$ , и утверждение очевидно.

**Определение 5.** Семейства  $M^\bullet, N^\bullet : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{U})$  называются семейством вырожденных  $M, N$ -функций уравнения (13), если

- (i)  $M^\bullet$  и  $N^\bullet$  – пропагаторы уравнения (13);
- (ii)  $M^0 = N^0 = \mathbb{O}; M^t = N^t = P$ .

**Лемма 2.** Пусть пучок  $\vec{B}$  полиномиально  $A$ -ограничен, выполнено условие (A). Тогда существует единственное семейство вырожденных  $M, N$ -функций уравнения (13), причем  $M^t = V_1^t, N^t = V_0^t$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия предыдущей леммы. Тогда при любых  $v_k \in \mathfrak{V}^1, k = 0, 1$ , существует единственное решение задачи (13), (14), представимое в виде:  $v(t) = M^t v_1 + N^t v_0$ .

## 2. Абстрактная начально-конечная задача

Пусть  $\mathfrak{V}$  и  $\mathfrak{G}$  – банаховы пространства, операторы  $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{G})$ . Рассмотрим полное уравнение соболевского типа второго порядка

$$A\ddot{v} = B_1\dot{v} + B_0v. \quad (15)$$

Если пучок  $\vec{B} = (B_1, B_0)$  полиномиально  $A$ -ограничен, и выполнено условие (A), то, как следует из леммы 2, существует единственное семейство вырожденных  $M, N$ -функций уравнения (15), гарантирующих однозначную разрешимость задачи (15), (16). Пусть выполнено следующее условие:

$$\begin{aligned} A\text{-спектр пучка } \vec{B} \text{ } \sigma^A(\vec{B}) &= \sigma_0^A(\vec{B}) \cup \sigma_1^A(\vec{B}), \text{ причем} \\ \sigma_k^A(\vec{B}) &\neq \emptyset, k = 0, 1; \text{ и существует контур } \gamma_0 \subset \mathbb{C}, \\ &\text{ограничивающий область } \Gamma_0 \subset \mathbb{C} \text{ такую, что} \\ \Gamma_0 \cap \sigma_0^A(\vec{B}) &= \sigma_0^A(\vec{B}), \bar{\Gamma}_0 \cap \sigma_1^A(\vec{B}) = \emptyset. \end{aligned} \quad (B)$$

Тогда существует следующий оператор:

$$P_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \mu R_\mu^A(\vec{B}) Ad\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}).$$

Потребуем выполнение еще одного условия

$$\int_{\gamma_0} R_\mu^A(\vec{B}) d\mu = \mathbb{O}. \quad (A_0)$$

Аналогично лемме 1 можно получить следующее утверждение.

**Лемма 3.** Пусть пучок  $\vec{B}$  полиномиально  $A$ -ограничен, и выполнены условия (A), (B), (A<sub>0</sub>). Тогда  $P_0$  – проектор, причем  $P_0 P = P P_0 = P_0$ .

Построим оператор  $P_1 = P - P_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{V})$ . В силу леммы 2.1 оператор  $P_1$  – проектор, причем  $P_0 P_1 = P_1 P_0 = \mathbb{O}$ . Возьмем произвольные векторы  $v_0^0, v_1^0, v_0^T, v_1^T \in \mathfrak{V}$ . Решение

$v = v(t)$  уравнения (15) назовем *решением начально-конечной задачи* для уравнения (15), если оно удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} P_0(\dot{v}(0) - v_1^0) &= 0, \quad P_0(v(0) - v_0^0) = 0; \\ P_1(\dot{v}(T) - v_1^T) &= 0, \quad P_1(v(T) - v_0^T) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Заметим, что если  $\sigma_1^A(\vec{B}) = \emptyset$ , то  $P_1 = \mathbb{O}$  и  $P_0 = P$ . Тогда задача (16) для уравнения (15) превращается в задачу (13), (14).

Введем в рассмотрение следующие семейства операторов:

$$M_0^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} R_\mu^A(\vec{B}) A e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$N_0^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} R_\mu^A(\vec{B})(\mu A - B_1) e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Оба семейства хоть и не являются семейством вырожденных  $M, N$ -функций в смысле определения 5 (так как не удовлетворяют условию (ii)), но тем не менее обладают рядом полезных свойств.

**Лемма 4.** *Пусть пучок  $\vec{B}$  полиномиально  $A$ -ограничен, и выполнены условия (B), ( $A_0$ ). Тогда*

- (i)  $M_0^\bullet$  и  $N_0^\bullet$  – пропагаторы уравнения (15);
- (ii)  $M_0^0 = N_0^0 = \mathbb{O}$ ,  $M_0^0 = N_0^0 = P_0$ .

Далее, возьмем произвольное число  $T \in \mathbb{R}$  и построим следующие семейства операторов  $M_1^t = M^{t-T} - M_0^{t-T}$ ,  $N_1^t = N^{t-T} - N_0^{t-T}$ .

**Лемма 5.** *Пусть пучок  $\vec{B}$  полиномиально  $A$ -ограничен, и выполнены условия (A), (B), ( $A_0$ ). Тогда*

- (i)  $M_1^\bullet$  и  $N_1^\bullet$  – пропагаторы уравнения (15);
- (ii)  $M_1^T = N_1^T = \mathbb{O}$ ,  $M_1^T = N_1^T = P_1$ .

**Теорема 3.** *Пусть выполнены условия предыдущей леммы. Тогда для любых  $T \in \mathbb{R}$ ,  $v_k^0, v_k^T \in \mathfrak{V}$ ,  $k = 0, 1$ , существует единственное решение  $v = v(t)$  задачи (15), (16), которое к тому же имеет следующий вид:*

$$v(t) = M_0^t v_1^0 + M_1^t v_1^T + N_0^t v_0^0 + N_1^t v_0^T. \quad (17)$$

Заметим, что если  $T = 0$ , то задача (16) превращается в задачу (14).

### 3. Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска – Лява

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  – ограниченная область с границей  $\partial\Omega$  класса  $C^\infty$ . Введем в рассмотрение пространства  $\mathfrak{V} = \{v \in W_2^2(\Omega) : v(x) = 0, x \in \partial\Omega\}$  и  $\mathfrak{G} = L_2(\Omega)$ . Пространство  $\mathfrak{V}$  – банаево с нормой

$$\|v\|_{\mathfrak{V}}^2 = \int_{\Omega} \left( \sum_{k,l=1}^n v_{x_k x_l}^2 + \sum_{k=1}^n v_{x_k}^2 + v^2 \right) dx,$$

а пространство  $\mathfrak{G}$  — гильбертово со скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Формулой

$$\langle Lv, w \rangle = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} v_{x_k x_k} w dx, v, w \in \mathfrak{V},$$

зададим оператор  $L : \mathfrak{V} \rightarrow \mathfrak{G}$ . Справедлива

**Теорема 4.** [6] Оператор  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{G})$ , его спектр  $\sigma(L)$  вещественен, отрицателен, дискретен, конечнократен и сгущается только к точке  $-\infty$ .

Обозначим через  $\{\lambda_k\}$  множество собственных значений оператора  $L$ , занумерованных по невозрастанию с учетом кратности, а через  $\varphi_k$  — множество соответствующих собственных функций, ортонормированных в смысле  $\mathfrak{G}$ . Положим  $A = \lambda - L$ ,  $B_1 = \alpha(L - \lambda')$ ,  $B_2 = \beta(L - \lambda'')$ . Имеет место

**Теорема 5.** [5] Пусть выполнено одно из следующих условий:

- (i)  $\lambda \notin \{\lambda_k\}$ ;
- (ii)  $(\lambda \in \{\lambda_k\}) \wedge (\lambda \neq \lambda')$ ;
- (iii)  $(\lambda \in \{\lambda_k\}) \wedge (\lambda = \lambda') \wedge (\lambda \neq \lambda'')$ .

Тогда при любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  пучок  $\vec{B} = (B_1, B_2)$  полиномиально  $A$ -ограничен.

Доказательство заключается в изучении  $A$ -спектра пучка  $\vec{B}$ . Во всех случаях  $A$ -спектр пучка  $\vec{B}$  составляют решения уравнений

$$(\lambda - \lambda_k)\mu^2 + \alpha(\lambda' - \lambda_k)\mu + \beta(\lambda'' - \lambda_k) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим  $A$ -спектр пучка  $\vec{B}$  в зависимости от ситуации.

- (i)  $\sigma^A(\vec{B}) = \left\{ \mu_k^{1,2} = \frac{\alpha(\lambda_k - \lambda') \pm \sqrt{\alpha^2(\lambda' - \lambda_k)^2 - 4\beta(\lambda - \lambda_k)(\lambda'' - \lambda_k)}}{2(\lambda - \lambda_k)} : k \in \mathbb{N} \right\}.$
- (ii)  $\sigma^A(\vec{B}) = \left\{ \mu_k^{1,2} : k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda = \lambda_l\} \right\} \cup \left\{ \mu_l = \frac{\beta(\lambda_l - \lambda'')}{\alpha(\lambda' - \lambda_l)} : \lambda = \lambda_l \right\}.$
- (iii)  $\sigma^A(\vec{B}) = \left\{ \mu_k^{1,2} : k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda = \lambda_l\} \right\}.$

**Замечание 1.** Как нетрудно показать, в случае  $(\lambda \in \{\lambda_k\}) \wedge (\lambda = \lambda' = \lambda'')$  пучок  $\vec{B}$  не будет полиномиально  $A$ -ограниченным.

**Следствие 1.** [5] Пусть выполнено условие либо (i), либо (iii) теоремы 5. Тогда при любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  имеет место условие (A).

**Замечание 2.** В случае (ii) теоремы 5

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} ((\lambda - \lambda_k)\mu^2 + \alpha(\lambda' - \lambda_k)\mu + \beta(\lambda'' - \lambda_k))^{-1} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k d\mu = \\ \sum_{\lambda_k=\lambda} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\alpha(\lambda' - \lambda_k)} \neq \emptyset, \end{aligned}$$

и поэтому условие (A) не выполняется.

Итак, в силу теоремы 5 и следствия 1 в случаях (i), (iii) пучок  $\vec{B}$  полиномиально  $A$ -ограничен, и выполнено условие (A). Поэтому построим семейства вырожденных  $M, N$ -

функций уравнения (12). В случае (i) получим соответственно

$$M^t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\mu_k^1 t} - e^{\mu_k^2 t}}{\mu_k^1 - \mu_k^2} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

$$N^t = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\mu_k^1(\lambda - \lambda_k) + \alpha(\lambda' - \lambda_k)}{(\lambda - \lambda_k)(\mu_k^1 - \mu_k^2)} e^{\mu_k^1 t} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu_k^2(\lambda - \lambda_k) + \alpha(\lambda' - \lambda_k)}{(\lambda - \lambda_k)(\mu_k^2 - \mu_k^1)} e^{\mu_k^2 t} \right) \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

где штрих у знака суммы означает отсутствие членов с номерами  $k$  такими, что  $\lambda = \lambda_k$ . Кроме  $M, N$ -функций для постановки начально-конечной задачи необходимы проекторы  $P$  и  $P_0$ . Построим проектор  $P$ :

$$P = \begin{cases} \mathbb{I}, & \text{если выполнено (i);} \\ \mathbb{I} - \sum_{\lambda=\lambda_k} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k, & \text{если выполнено (iii).} \end{cases}$$

Для построения проектора  $P_0$  выберем область  $\Gamma_0 \subset \mathbb{C}$ , содержащую конечное множество точек  $A$ -спектра  $\sigma_0^A(\vec{B})$  и такую, что  $\partial\Gamma_0 \cap \sigma_0^A(\vec{B}) = \emptyset$ . Как нетрудно видеть, область  $\Gamma_0$  можно выбрать такой, что  $\partial\Gamma_0 = \gamma_0$  – контур. По рецептам п.3 построим проектор

$$P_0 = \sum_{\lambda_k^i} \langle \cdot, \varphi_k^i \rangle \varphi_k^i$$

Здесь  $\{\lambda_k^i\} = \{\lambda_k \in \sigma(L) : \mu_k^{1,2} \in \sigma_0^A(\vec{B}), \lambda_k \neq \lambda\}$ .

Теперь у нас все готово для постановки и изучения начально-конечной задачи для уравнения (12). Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  – ограниченная область с границей  $\partial\Omega$  класса  $C^\infty$ ,  $T \in \mathbb{R}_+$ . В цилиндре  $\Omega \times (0, T)$  рассмотрим уравнение

$$(\lambda - \Delta)v_{tt} = \alpha(\Delta - \lambda')v_t + \beta(\Delta - \lambda'')v. \quad (18)$$

Вектор-функцию  $v \in C^2((0, T); \mathfrak{V})$  будем называть *решением уравнения* (18), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} u(\lambda - \Delta)v_{tt} dx = \int_{\Omega} u(\alpha(\Delta - \lambda')v_t + \beta(\Delta - \lambda'')v) dx$$

при любом векторе  $u \in \mathfrak{U}$ . Теперь выберем произвольно векторы  $v_k^0, v_k^T \in \mathfrak{V}, k = 0, 1$ . Решение  $v = v(t)$  уравнения (18) назовем *решением начально-конечной задачи*, если

$$\begin{aligned} P_0(\dot{v}(0) - v_1^0) &= 0, \quad P_0(v(0) - v_0^0) = 0; \\ P_1(\dot{v}(T) - v_1^T) &= 0, \quad P_1(v(T) - v_0^T) = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь  $P_1 = P - P_0$ .

По рецептам п.2 построим вырожденные  $M_0, N_0$ -функции. Для этого введем в рассмотрение множество индексов  $\mathfrak{K}$  элементов множества  $\{\lambda_k^i\}$ . Тогда

$$M_0^t = \sum_{k \in \mathfrak{K}} \frac{e^{\mu_k^1 t} - e^{\mu_k^2 t}}{\mu_k^1 - \mu_k^2} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

$$N_0^t = \sum_{k \in \mathfrak{K}} \left( \frac{\mu_k^1(\lambda - \lambda_k) + \alpha(\lambda' - \lambda_k)}{(\lambda - \lambda_k)(\mu_k^1 - \mu_k^2)} e^{\mu_k^1 t} + \right. \\ \left. + \frac{\mu_k^2(\lambda - \lambda_k) + \alpha(\lambda' - \lambda_k)}{(\lambda - \lambda_k)(\mu_k^1 - \mu_k^2)} e^{\mu_k^2 t} \right) \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k.$$

Теперь в силу теорем 3, 5 и следствия 1 имеет место

**Теорема 6.** При любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  и  $\lambda \in \mathbb{R}$  таком, что выполнено условие либо (i), либо (iii) теоремы 4.2, и любых  $T \in \mathbb{R}_+$ ,  $v_k^0, v_k^T \in \mathfrak{V}, k = 0, 1$ , существует единственное решение задачи (18), (19), которое к тому же имеет вид (17).

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить свою искреннюю благодарность профессору Г.А. Свиридюку за постановку задачи и поддержку в работе.

## Литература

1. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.
2. Келлер, А.В. Численное решение задачи стартового управления для системы уравнений леонтьевского типа / А.В. Келлер // Обозрение приклад. и пром. математики. – М., 2009. – Т.16, вып. 2. – С.345 – 346.
3. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Н.А. Манакова // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 9. – С. 1185 – 1192.
4. Загребина, С.А. О задаче Шоултера – Сидорова / С.А. Загребина // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 3. – С. 22 – 28.
5. Замышляева, А.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка / А.А. Замышляева // Вычисл. технологии. – 2003. – Т. 8, № 4. – С.45 – 54.

Кафедра уравнений математической физики,  
Южно-Уральский государственный университет  
alzama@mail.ru

Поступила в редакцию 5 марта 2010 г.

## СВОЙСТВО РЕГУЛЯРИЗУЕМОСТИ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ИЗМЕРЕНИЯ

*A.B. Keller, E.I. Nazarova*

## THE REGULARIZATION PROPERTY AND THE COMPUTATIONAL SOLUTION OF THE DYNAMIC MEASURE PROBLEM

*A.B. Keller, E.I. Nazarova*

Рассмотрена задача восстановления динамически искаженных сигналов, разработан алгоритм численного ее решения при начальных условиях Шоуолтера – Сидорова, приведено численное решение для конкретной модели, обладающей свойством регуляризируемости

*Ключевые слова:* задача Шоуолтера – Сидорова, модель измерительного устройства, свойство регуляризируемости, критерий Раусса-Гурвица, численное решение

Of concern is the problem of the dynamically deformed signal recovery. We work up the computational algorithm for the solution of the Showalter – Sidorov problem, give the computational solution for the concrete model with the regularization property.

*Keywords:* the Showalter – Sidorov problem, the model of measuring device, the regularization property, the Rausse – Gourvitz criterion, the computational solution

### Введение

При измерении кратковременных процессов, дляющихся от микро- до наносекунд, часто нет возможности точно измерить пикообразные изменения входного сигнала. Причиной тому является инерционность измерительного устройства. На основе теории автоматического управления А.Л. Шестаковым был предложен и развивается его учениками подход, дающий более точные решения [12]. В измерительное устройство предлагается встраивать модель датчика, генерирующую сигналы, подаваемые на вход измерительного устройства. В том случае, если измерительный сигнал обладает свойством регуляризируемости, а модель датчика близка по своим параметрам к датчику, то при близких значениях на входе от датчика и модели датчика значения на выходе тоже будут мало различаться. Г.А. Свиридов предложил редуцировать такого рода системы к уравнениям соболевского типа и использовать метод фазового пространства для их решения [13]. Кроме того, при изучении свойства регуляризируемости оказываются полезными результаты исследования устойчивости решений уравнений соболевского типа [6].

В данной работе мы рассмотрим модель измерительного устройства, сводящуюся к задаче Шоуолтера – Сидорова. Будем использовать методы и результаты теории вырожденных полугрупп [13]. Заметим, что данная теория уже сейчас оказалась полезной во многих случаях [3, 4, 9]. Целью данной статьи является разработка алгоритма численного решения,

позволяющего находить динамически искаженные системы, в которых измерительный канал обладает свойством регуляризации. Статья состоит из введения и четырех параграфов.

## 1. Задача Шоултера – Сидорова

В прикладных моделях, сводящихся к дифференциальным уравнениям вида

$$L\dot{u} = Mu + f \quad (1.1)$$

часто используются начальные условия Шоултера – Сидорова [3], [4]

$$P(u(0) - u_0) = 0. \quad (1.2)$$

В общем случае операторы  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ ,  $M \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ ,  $\ker L \neq 0$ ,  $\mathfrak{U}$ ,  $\mathfrak{F}$  – банаховы пространства,  $P$  – проектор. В [13] показано, что задача (1.1), (1.2) имеет единственное решение

$$u(t) = - \sum_{q=0}^p H^q M_0^{-1} (I - Q) f^{(q)}(t) + U^t u_0 + \int_0^t R^{t-s} Q f(s) ds, \quad (1.3)$$

где

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu, \quad R^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} L_{\mu}^L(M) d\mu,$$

контур  $\gamma = \{\mu \in C : |\mu| = r > a\}$ ,  $H$  – нильпотентная матрица со степенью нильпотентности  $p$ .

Если  $L$  и  $M$  – квадратные матрицы порядка  $n$ , при этом  $\det L = 0$ , то в качестве примеров задачи (1.1), (1.2) можно назвать экономические модели [5], задачи оптимального управления системами леонтьевского типа [7], задачи динамического измерения как задачи оптимального управления [11].

**Теорема 1.** Пусть пучок  $\mu L - M$  регулярен,  $p \in \{0\} \cup N$  – порядок полюса  $L$ -резольвенты матрицы  $M$ . Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \left( L - \frac{t}{k(p+1)} M \right)^{-1} L \right]^{k(p+1)} = U^t, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} [k L_k^L(M)]^{p+1} = Q,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \left( L - \frac{t}{k(p+1)} M \right)^{-1} L \right]^{k(p+1)-1} \left( L - \frac{t}{k(p+1)} M \right)^{-1} = R^t.$$

**Теорема 2.** Пусть пучок  $\mu L - M$  регулярен,  $p \in \{0\} \cup N$  – порядок полюса  $L$ -резольвенты матрицы  $M$  в точке  $\infty$ . Тогда существует константа  $C = C(L, M, T) \in \mathfrak{R}_+$  такая, что  $\|u(t) - u_k(t)\| \leq \frac{C}{k}$  при всех  $t \in [0; T]$ ,  $u_0 \in \mathfrak{R}^n$  и  $f \in C^{p+1}((0; T); \mathfrak{R}^n) \cap C^p([0; T]; \mathfrak{R}^n)$ .

*Доказательство.* Доказательство теоремы основывается на оценках

$$\|[k L_k^L(M)]^{p+1} - Q\| \leq \sum_{k=2}^{p+1} \frac{K C_{p+1}^k}{(p+1)\mu^{k-1}\beta^{p+1-k}} \|R_{\beta}^L(M)\|,$$

$$\|U_k^t U^t\| \leq \frac{(p+1)K^3 t^2}{2\beta^{p-1} k} \left\| \left( (\beta L - M)^{-1} M \right)^2 \right\|$$

взятых из [13], гл. 2, где  $\beta \in \mathfrak{R}_+$ . □

Подчеркнем, что использование начального условия Шоултера – Сидорова особо знамено при численном решении указанных выше задач, т.к. позволяет проводить расчеты при больших  $n$ . Алгоритм численного решения задачи (1.1), (1.2) разработан в [5].

## 2. Задача динамического измерения как задача Шоултера – Сидорова

Пусть модернизированное измерительное устройство представлено системой уравнений вида

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad (2.1)$$

где  $x = x(t)$  – вектор-функция состояний измерительного устройства,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $u = u(t)$ ,  $y = y(t)$  – вектор функции входа и выхода сигнала соответственно,  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_l)$ , а матрицы измерительного устройства  $A$ , модели датчика  $B$  и выхода  $C$  соответственно размерности  $[n \times n]$ ,  $[n \times m]$ ,  $[n \times l]$ .

Редуцируем систему уравнений (2.1) к системе уравнений

$$L\dot{z} = Mz + Du, \quad (2.2)$$

$$P(z(0) - z_0) = 0, \quad (2.3)$$

где  $z = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_l)$ , проектор  $P = [(\alpha L - M)^{-1}L]^p$  следующим образом

$$L = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O}_l \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} A & \mathbb{O} \\ C & -\mathbb{I}_l \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} B & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O}_l \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Поскольку  $L$ -спектр матрицы  $M$  совпадает со спектром матрицы  $A$ , то система (2.1) обладает свойством регуляризуемости, при условии, что спектр матрицы  $M$  лежит в левой полуплоскости [10]. При рассмотрении вопроса о расположении точек спектра матрицы  $M$  для решения задачи (2.2), (2.3) будем использовать критерий Рауса – Гурвица [2, 8]. Он устанавливает необходимые и достаточные условия расположения корней многочлена в левой полуплоскости на основе вычисления определителей Гурвица, составленных из коэффициентов этого многочлена

$$\det(\mu L - M) = a_q \mu^q + a_{q-1} \mu^{q-1} + \dots + a_1 \mu + a_0, \quad (2.5)$$

где  $q = n - p$ ,  $p$  – порядок полюса  $L$ -резольвенты матрицы  $M$  в точке  $\infty$ ,  $a_l = (-1)^{n-l} \sum_{r=1}^{C_n^{n-l}} \Delta_{n-l}^r$  ( $l = \overline{0, n}$ ),  $\Delta_{n-l}^r$  – определители, получаемые из определителя матрицы  $L$  путем замены  $n-l$  столбцов соответствующими столбцами матрицы  $M$ ,  $r$  – порядковый номер определителя,  $q \leq \text{rank } L$ .

**Теорема 3. (Обобщенный критерий Рауса – Гурвица)** Для того, чтобы у вещественного многочлена (2.5) все корни имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы имели место неравенства

$$a_q \Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad a_q \Delta_3 > 0, \quad \Delta_4 > 0, \quad \dots, \quad \left. \begin{array}{ll} a_q \Delta_q > 0, & \text{если } q \text{ нечетно,} \\ \Delta_q > 0, & \text{если } q \text{ четно,} \end{array} \right\}$$

где определители имеют вид

$$\Delta_1 = a_{q-1}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{q-1} & a_{q-3} \\ a_q & a_{q-2} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{q-1} & a_{q-3} & a_{q-5} \\ a_q & a_{q-2} & a_{q-4} \\ 0 & a_{q-1} & a_{q-3} \end{vmatrix}, \quad \dots$$

$$\Delta_q = \begin{vmatrix} a_{q-1} & a_{q-3} & a_{q-5} & \dots & 0 \\ a_q & a_{q-2} & a_{q-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{q-1} & a_{q-3} & \dots & 0 \\ 0 & a_q & a_{q-2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_0 \end{vmatrix},$$

и  $a_{q-j} = 0$  при  $q - j < 0$  для всех  $j$ .

*Доказательство.* Доказательство основано на Теореме Рауса [2], при условии, что количество корней вещественного многочлена, лежащих в правой полуплоскости, должно быть равно нулю, а значит, и число перемен знака в первом столбце схемы Рауса также будет равно нулю.  $\square$

При выполнении условий критерия Рауса – Гурвица система (2.2) имеет единственное решение задачи (2.3)

$$z(t, z_0) = Z^t z_0 + \int_0^t R^{t-s} Q D u(s) ds, \quad (2.6)$$

где  $Z^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu L - M)^{-1} L e^{\mu t} d\mu$ ,  $R^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu$ ,  $Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} L (\mu L - M)^{-1} d\mu$ ,  $\gamma = \{|\mu| = r\}$ ,  $r > \max\{|\mu|_1, |\mu|_2, \dots, |\mu|_q\}$ .

Поскольку  $(\mathbb{I} - Q)D = \mathbb{O}$ , то в формуле (2.6) отсутствует первое слагаемое из формулы (1.3).

### 3. Алгоритм численного решения задачи Шоуолтера – Сидорова

Рассмотрим задачу (1.1), (1.2) где  $L$  и  $M$  – квадратные матрицы порядка  $n$ , причем  $\det L = 0$ , матрица  $M$  –  $L$ -регулярна ( $\exists \mu \in \mathbb{C} : \det(\mu L - M) = 0$ ),  $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$   $f$  – некоторая вектор-функция, проектор  $P = [(\alpha L - M)^{-1} L]^p$ .

В [5] показано, что численное решение задачи (1.1), (1.2) имеет вид

$$u_k(t) = - \sum_{q=0}^p H^q M_0^{-1} (I - Q) f^{(q)}(t) + U^t u_0 + \int_0^t R^{t-s} Q f(s) ds, \quad (3.1)$$

где

$$U_k^t = \left[ \left( L - \frac{t}{k(p+1)} M \right)^{-1} L \right]^{k(p+1)}, \quad Q_k = [k L_k^L(M)]^{p+1}, \quad (3.2)$$

$$R_k^t = \left[ \left( L - \frac{t}{k(p+1)} M \right)^{-1} L \right]^{k(p+1)-1} \cdot \left( L - \frac{t}{k(p+1)} M \right)^{-1}. \quad (3.3)$$

На первом этапе алгоритма находим числа  $\alpha \in R$  и  $p \in \{0\} \cup N$

$$|\alpha| > \max \left\{ 1, |a_q|^{-1} \left( \sum_{l=0}^q |a_l| \right) \right\}, \quad p = n - q,$$

где  $a_l = (-1)^{n-l} \sum_{r=1}^{C_n^{n-l}} \Delta_{n-l}^r$  ( $l = \overline{0, n}$ ),  $\Delta_{n-l}^r$  – определители, получаемые из определителя матрицы  $L$  путем замены  $n - l$  столбцов соответствующими столбцами матрицы  $M$ ,  $r$  – порядковый номер определителя,  $q \leq \text{rank } L$ .

Приближенные значения по формулам (3.1) – (3.2) можно считать уже при

$$k_1 > \frac{1}{|a|} \sum_{l=q+1}^n |a_l| + 1,$$

но при рассмотрении многочлена

$$\det(\mu(p+1)L - tM) = a_q t^q \mu^q (p+1)^q + a_{q-1} t^{q+1} \mu^{q-1} (p+1)^{q-1} + \dots + a_1 t^{n-1} \mu + t^n a_0,$$

где  $a_q \neq 0$ ,  $q \leq \text{rank } L$ , возникает еще условие на  $k$

$$k_2 > \begin{cases} \frac{1}{|a_q|(n-q)^{n-q}} \sum_{l=0}^q |a_l| (n-q+1)^{n-l} + 1, & |t| < 1, \\ \frac{1}{|a_q||t|^q(n-q)^{n-q}} \sum_{l=0}^q |a_l| (n-q+1)^{n-l} |t|^l + 1, & |t| > 1. \end{cases}$$

Для приближенных вычислений, когда мы не сможем оказаться вблизи точки  $L$ -спектра оператора  $M$ , выберем

$$k = \max \{k_1; k_2\}.$$

На втором шаге определяем значения  $U_k^t$ ,  $Q_k$  и  $R_k^t$  и находим  $u_k(t)$  по формулам (3.1) – (3.3), причем, т.к. существует  $M^{-1}$ , то справедливо тождество

$$H^k M_0^{-1} (I - Q) = (M^{-1} (I - Q) L)^k M_0^{-1} (I - Q).$$

#### 4. Пример решения задачи динамического измерения

В качестве примера рассмотрим модель модернизированного устройства, приведенную в [1]. В системе (2.1)

$$A = \begin{pmatrix} -44 & 0 \\ -117 & -16 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -0,594 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно (2.4) получим матрицы  $L$ ,  $M$  и  $D$ :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -44 & 0 & 0 \\ -117 & -16 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -0,594 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тогда система (2.2) примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{z} = \begin{pmatrix} -44 & 0 & 0 \\ -117 & -16 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} -0,594 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} u, \quad (4.1)$$

где  $z = (x_1(t), x_2(t), y(t))$ ,  $z_0 = (0, 0, 0)$ . Проверим, обладает ли система (4.1) свойством регуляризуемости. Точки  $L$ -спектра матрицы  $M$  являются корнями многочлена (2.5)

$$\det(\mu L - M) = \mu^2 + 60\mu + 704 = 0,$$

коэффициенты которого определили следующим образом

$$a_2 = (-1) \left( \begin{vmatrix} -44 & 0 & 0 \\ -117 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \right) = 1,$$

$$a_1 = (-1)^2 \left( \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -44 & 0 & 0 \\ -117 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -44 & 0 & 0 \\ -117 & -16 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = 60,$$

$$a_0 = (-1)^3 \det M = 704.$$

По обобщенному критерию Рауса-Гурвица (при  $q = 2$ ) получим

$$a_2 \Delta_1 = 60, \quad \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 60 & 0 \\ 1 & 704 \end{vmatrix} = 42240.$$

Условия **Теоремы 1** выполняются, значит, полюса передаточной функции системы  $\dot{x} = Ax$  лежат в левой полуплоскости, т.е. система устойчива по отношению к помехам.

В ходе точного вычисления  $z(t)$  по формулам, приведенным в первом разделе данной статьи, было получено точное решение задачи (2.3):

$$x_1(t) = -A \left( \frac{44}{44^2 + 4\omega^2} \sin^2 \omega t - \frac{1}{44^2 + 4\omega^2} \sin 2\omega t + \frac{1 - e^{-44t}}{88} - \frac{22(1 - e^{-44t})}{44^2 + 4\omega^2} \right),$$

$$x_2(t) = \frac{117A}{28} \left( \frac{16}{16^2 + 4\omega^2} \sin^2 \omega t - \frac{1}{16^2 + 4\omega^2} \sin 2\omega t + \frac{1 - e^{-16t}}{32} - \frac{8(1 - e^{-16t})}{16^2 + 4\omega^2} - \frac{44}{44^2 + 4\omega^2} \sin^2 \omega t + \frac{1}{44^2 + 4\omega^2} \sin 2\omega t - \frac{1 - e^{-44t}}{88} + \frac{22(1 - e^{-44t})}{44^2 + 4\omega^2} \right),$$

$$y(t) = \frac{117A}{28} \left( \frac{16}{16^2 + 4\omega^2} \sin^2 \omega t - \frac{1}{16^2 + 4\omega^2} \sin 2\omega t + \frac{1 - e^{-16t}}{32} - \frac{8(1 - e^{-16t})}{16^2 + 4\omega^2} - \frac{44}{44^2 + 4\omega^2} \sin^2 \omega t + \frac{1}{44^2 + 4\omega^2} \sin 2\omega t - \frac{1 - e^{-44t}}{88} + \frac{22(1 - e^{-44t})}{44^2 + 4\omega^2} \right).$$

Поскольку наблюдения показывают, что вектор-функция выхода при начальных значениях  $t$  имеет скачок, то было положено  $-0,594u(t) = A \sin^2 \omega t$ . По алгоритму, разработанному во втором разделе статьи, получено приближенное решение задачи (2.3). При расчете взяты значения параметров  $A = 15$ ,  $\omega = \pi$ .

Таблица 1

Точное и приближенное решение задачи динамического измерения

t	Точное решение			Приближенное решение		
	$x_1$	$x_2$	$y$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
0	0	0	0	0	0	0
1/12	-0,013772	0,029317	0,029317	-0,013771	0,029312	0,029312
1/6	-0,066270	0,237976	0,237976	-0,066267	0,237938	0,237938
1/4	-0,14660	0,67492	0,67492	-0,146596	0,674819	0,674819
1/3	-0,233320	1,253870	1,253870	-0,233314	1,253692	1,253692
5/12	-0,303195	1,827893	1,827893	-0,303189	1,827654	1,827654
1/2	-0,337503	2,245344	2,245344	-0,337497	2,245077	2,245508
7/12	-0,327050	2,394938	2,394938	-0,327046	2,394683	2,394683
2/3	-0,274637	2,236741	2,236741	-0,274635	2,236538	2,236538
3/4	-0,194309	1,813182	1,813182	-0,194309	1,813055	1,813055
5/6	-0,107589	1,237764	1,237764	-0,107590	1,237718	1,237718
11/12	-0,037714	0,664672	0,664672	-0,037715	0,664689	0,664689
1	-0,003406	0,247466	0,247466	-0,003407	0,247513	0,247513

Таким образом, разработанный алгоритм позволяет численно находить динамически искаженные сигналы с достаточной степенью точности: расхождения в точном и приближенном решении порядка не более  $10^{-3}$ .

## Литература

1. Бизяев, М.Н. Динамические модели и алгоритмы восстановления динамически искаженных сигналов измерительных систем в скользящем режиме: дис. ... канд. тех. наук / М.Н. Бизяев. – Челябинск: ЮУрГУ, 2004.
2. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – 4-е издание. – М.: Наука, 1988.
3. Загребина, С.А. О задаче Шоултера – Сидорова / С.А. Загребина // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 3. – С. 22 – 28.
4. Замышляева, А.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева // Вычислительные технологии. – 2003. – Т. 8, № 3. – С. 45 – 54.
5. Келлер, А.В. Алгоритм численного решения задачи Шоултера – Сидорова для систем леонтьевского типа / А.В. Келлер // Методы оптимизации и их приложения: труды XIV Байкальской школы-семинара, Иркутск – Северобайкальск. – 2008. – С. 343 – 350.
6. Свиридов, Г.А. Инвариантные пространства и дихотомии решений одного класса линейных уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридов, А.В. Келлер // Изв. вузов. Математика – 1997. – № 5(420) – С. 60 – 68.
7. Келлер, А.В. Об оптимальном управлении системами леонтьевского типа / А.В. Келлер // Оптимизация, управление, интеллект. – 2006. – № 1(12) – С. 82 – 89.
8. Келлер, А.В. Об устойчивости решений систем леонтьевского типа / А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2010: тез. докл. – Воронеж, 2010. – С. 78 – 79.
9. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Н.А. Манакова // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 9. – С. 1185 – 1192.
10. Шестаков, А.Л. Свойство регуляризуемости измерительного устройства и нахождение динамически искаженных сигналов / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – (В настоящем номере).
11. Шестаков, А.Л. Динамические измерение как задача оптимального управления / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридов, Е.В. Захарова // Обозрение прикл. и пром. математики. – 2009. – Т. 16, № 4. – С. 732 – 733.
12. Шестаков, А.Л. Динамическая точность измерительного преобразователя с корректирующим устройством в виде модели датчика / А.Л. Шестаков // Метрология. – 1987. – № 2. – С. 26 – 34.
13. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semi-groups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2003.

Кафедра «Общеобразовательные дисциплины»  
Южно-Уральский государственный университет  
alevtinak@inbox.ru

Поступила в редакцию 10 февраля 2010 г.

# КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ТРАЕКТОРИИ ЗАДАЧИ ТЕЙЛORA ДЛЯ МОДЕЛИ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ НЕНУЛЕВОГО ПОРЯДКА

O.P. Matveeva

## QUASISTATIONARY TRAJECTORIES OF THE TAYLOR PROBLEM FOR THE MODEL OF THE INCOMPRESSIBLE VISCOELASTIC LIQUID OF THE NONZERO ORDER

O.P. Matveeva

Рассматривается задача Тейлора для модели динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина – Фойгта ненулевого порядка. Данная задача исследуется в рамках теории полулинейных уравнений соболевского типа. Доказана теорема существования единственного решения указанной задачи и получено описание ее фазового пространства.

*Ключевые слова:* уравнение соболевского типа, фазовое пространство, несжимаемая вязкоупругая жидкость

Taylor's problem for the model of the dynamics of the Kelvin – Voight incompressible viscoelastic liquid of the nonzero order is considered. This problem is investigated in the frames of the theory of the semilinear Sobolev type equations. The theorem of the existence of the unique solution of this problem is proved and the description of its phase space is received.

*Keywords:* equation of Sobolev type, phase space, an incompressible viscoelastic liquid

## Введение

Система уравнений

$$\begin{cases} (1 - \alpha \nabla^2) v_t = \nu \nabla^2 v - (v \cdot \nabla) v + \sum_{l=1}^K \beta_l \nabla^2 w_l - \nabla p + f, \\ 0 = \nabla \cdot v, \quad \frac{\partial w_l}{\partial t} = v + \alpha_l w_l, \quad \alpha_l \in \mathbb{R}_-, \quad l = \overline{1, K} \end{cases} \quad (1)$$

моделирует динамику несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина – Фойгта порядка  $K > 0$  [1].

Функция  $v = (v_1, \dots, v_n)$ ,  $v_i = v_i(x, t)$ ,  $x \in \Omega$  имеет физический смысл скорости течения, функция  $p = p(x, t)$  отвечает давлению. Здесь  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3, 4$  – ограниченная область с границей  $\partial\Omega$  класса  $C^\infty$ . Параметры  $\nu \in \mathbb{R}_+$  и  $\alpha \in \mathbb{R}$  характеризуют вязкие и упругие свойства жидкости соответственно. Параметры  $\beta_l \in \mathbb{R}_+$  определяют время ретардации (запаздывания) давления,  $f = f(f_1, \dots, f_n)$ ,  $f_i = f_i(x, t)$  характеризует внешнее воздействие на жидкость.

Задача Тейлора для системы (1) моделирует ситуацию, когда вязкоупругая несжимаемая жидкость Кельвина – Фойгта занимает пространство между двумя вращающимися

коаксиальными цилиндрами бесконечной длины [2]. Область  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3, 4$  (с кусочно-гладкой границей) выбирается так, чтобы на ее границе  $\partial_1\Omega$  (лежащей, например, при  $n = 3$  на двух плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$ , перпендикулярных осям цилиндров) выполнялось условие периодичности (т.е.  $v(x, t)|_{\partial\Omega \cap \alpha} = v(x, t)|_{\partial\Omega \cap \beta}$ ,  $w_l(x, t)|_{\partial\Omega \cap \alpha} = w_l(x, t)|_{\partial\Omega \cap \beta}$ ,  $l = \overline{1, K}$ ,  $\partial\Omega \cap (\alpha \cup \beta) = \partial_1\Omega$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ).

Выбирается некоторое стационарное решение  $\tilde{v} = \tilde{v}(x)$ ,  $\tilde{w}_l = \tilde{w}_l(x)$  системы (1), удовлетворяющее на  $\partial_1\Omega$  условию периодичности, а на  $\partial_2\Omega = \partial\Omega \setminus \partial_1\Omega$  неоднородным условиям Дирихле (например, течение Куэтта), и исследуется динамика отклонения  $v = v(x, t)$ ,  $w_l = w_l(x, t)$  от этого стационарного решения, вызванного начальным условием. Поэтому система (1) приобретает вид

$$\begin{cases} (1 - \alpha \nabla^2)v_t = \nu \nabla^2 v - (v \cdot \nabla)\tilde{v} - (\tilde{v} \cdot \nabla)v - (v \cdot \nabla)v + \sum_{l=1}^K \beta_l \nabla^2 w_l - \nabla p, \\ 0 = \nabla \cdot v, \quad \frac{\partial w_l}{\partial t} = v + \alpha_l w_l, \quad \alpha_l \in \mathbb{R}_-, \quad l = \overline{1, K}. \end{cases} \quad (2)$$

Для системы (1) рассматривается задача Тейлора

$$\begin{cases} v(x, 0) = v_0(x), \quad w_l(x, 0) = w_l(x) \quad \forall x \in \Omega, \\ v(x, t) = 0, \quad w_l(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in \partial_2\Omega \times \mathbb{R}, \\ v(x, t), \quad w_l(x, t) \text{ удовлетворяют условию периодичности на } \partial_1\Omega \times \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3)$$

Раннее задача Тейлора для модели нулевого порядка изучалась в [3], а задача Коши – Дирихле для системы (1) рассматривалась в [4]. Разрешимость задачи (2), (3) исследуется в рамках теории полулинейных уравнений соболевского типа [5]. В первой части статьи рассматривается формальная схема задачи Коши для указанного класса уравнений, а во второй части задача (2), (3) приводится как конкретная интерпретация формальной схемы.

## 1. Формальная схема

Пусть  $\mathcal{U}$  и  $\mathcal{F}$  – банаховы пространства, операторы  $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$  и  $M \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ . Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \quad (4)$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$Lu = M(u). \quad (5)$$

Напомним, что линейный оператор  $L : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{F}$  называется *биращепляющим*, если его ядро  $\ker L$  и образ  $\text{im } L$  дополняемы в пространствах  $\mathcal{U}$  и  $\mathcal{F}$  соответственно. Пусть оператор  $L$  биращепляющий, обозначим через  $M'_{u_0} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$  производную Фреше оператора  $M$  в точке  $u_0 \in \mathcal{U}$  и введем в рассмотрение цепочки  $M'_{u_0}$ -присоединенных векторов оператора  $L$ , которые будем выбирать из некоторого дополнения  $\text{coim } L = \mathcal{U} \ominus \ker L$  к ядру  $L$ . Введем в рассмотрение условие

(A1). Независимо от выбора  $\text{coim } L$  любая цепочка  $M'_{u_0}$ -присоединенных векторов любого вектора  $\varphi \in \ker L \setminus \{0\}$  содержит точно  $p$  элементов.

Обозначим через  $\tilde{L}$  сужение оператора  $L$  на  $\text{coim } L$ . В силу теоремы Банаха о замкнутом графике оператора  $\tilde{L} : \text{coim } L \rightarrow \text{im } L$  – топлинейный изоморфизм. Положим  $\mathcal{U}_0^0 = \ker L$  и построим множества  $\mathcal{U}_q^0 = \tilde{A}^q[\mathcal{U}_0^0]$ ,  $q = \overline{1, p}$ , где  $\tilde{A} = \tilde{L}^{-1}M'_{u_0}$ . Очевидно, множества  $\mathcal{U}_q^0 \subset \text{coim } L$  являются линейными пространствами, следовательно, образ  $\mathcal{F}_p^0 = M'_{u_0}[\mathcal{U}_p^0]$  есть

тоже линейное пространство, причем  $\mathcal{F}_p^0 \cap \text{im } L = \{0\}$  (если выполнено (A1)). Введем в рассмотрение еще одно условие

$$(A2). \quad \mathcal{F}_p^0 \oplus \text{im } L = \mathcal{F}.$$

Обозначим через  $Q_p : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_p^0$  проектор вдоль  $\text{im } L$  и построим оператор  $A = \tilde{L}^{-1}(I - Q_p)M'_{u_0}$ . Заметим, что  $A[\mathcal{U}_q^0] = \mathcal{U}_{q+1}^0$ ,  $q = \overline{0, p-1}$ ,  $A[\mathcal{U}_p^0] = \{0\}$ . Отсюда следует, что

$$A^q[\mathcal{U}_r^0] = \begin{cases} \{0\}, & q + r > p, \\ \mathcal{U}_{q+r}^0, & q + r \leq p. \end{cases} \quad (6)$$

Построим оператор  $D$ , равный сужению оператора  $Q_p M'_{u_0} A^p : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{F}_p^0$  на  $\mathcal{U}_0^0$ . По построению  $D[\mathcal{U}_0^0] = \mathcal{F}_p^0$  и  $D \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_0^0; \mathcal{F}_p^0)$ . Кроме того,  $\ker D = \{0\}$ , ибо в противном случае вектор

$$\varphi \in \ker D \setminus \{0\} \subset \ker L \setminus \{0\}$$

имел бы бесконечную цепочку  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p, 0, \dots\}$   $M'_{u_0}$ -присоединенных векторов. В силу уже цитированной теоремы Банаха оператор  $D : \mathcal{U}_0^0 \rightarrow \mathcal{F}_p^0$  топлинейный изоморфизм.

Обозначим через  $P_0 : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}_0^0$  проектор вдоль  $\text{coim } L$  и построим операторы  $P_q = A^q D^{-1} Q_p M'_{u_0} A^{p-q}$ ,  $q = \overline{1, p}$ . Операторы  $P_q : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}_q^0$  — проекторы. Действительно,  $\text{im } P_q = \mathcal{U}_q^0$ ,  $P_q \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$  и

$$P_q^2 = A^q(D^{-1}(Q_p M'_{u_0} A^p))D^{-1}Q_p M'_{u_0} A^{p-q} = P_q$$

по определению оператора  $D$ . Кроме того, в силу (6) и определения проектора  $P_0$

$$P_q P_r = P_r P_q = O, \quad q, r = \overline{0, p}, \quad q \neq r.$$

Положим

$$\mathcal{U}^0 = \bigoplus_{q=0}^p \mathcal{U}_q^0, \quad P = \sum_{q=0}^p P_q.$$

Оператор  $P \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$  — проектор,  $\text{im } P = \mathcal{U}^0$ . Положим  $\mathcal{U}^1 = \ker P$ , тогда  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ .

Введем в рассмотрение линеалы  $\mathcal{F}_q^0 = M'_{u_0}[\mathcal{U}_q^0]$ ,  $q = \overline{0, p-1}$ , и построим оператор  $B = M'_{u_0} \tilde{L}^{-1}(I - Q_p)$ .

Поскольку  $B[\mathcal{F}_q^0] = \mathcal{F}_{q+1}^0$ ,  $q = \overline{0, p-1}$ ,  $B[\mathcal{F}_p^0] = \{0\}$ , то

$$B^q[\mathcal{F}_r^0] = \begin{cases} \{0\}, & q + r > p, \\ \mathcal{F}_{q+r}^0, & q + r \leq p. \end{cases} \quad (7)$$

Из (7) аналогично предыдущему следует, что операторы  $Q_q = B^q M'_{u_0} D^{-1} Q_p B^{p-q}$ ,  $q = \overline{0, p-1}$ , являются проекторами на  $\mathcal{F}_q^0$ , причем

$$Q_q Q_r = Q_r Q_q = O, \quad r, q = \overline{0, p}, \quad q \neq r.$$

Положим

$$\mathcal{F}^0 = \bigoplus_{q=0}^p \mathcal{F}_q^0, \quad Q = \sum_{q=0}^p Q_q.$$

Оператор  $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$  — проектор, поэтому  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$ , где  $\mathcal{F}^0 = \text{im } Q$ ,  $\mathcal{F}^1 = \ker Q$ .

Заметим, что по построению

$$LA^q D^{-1} Q_p = B^{q-1} M'_{u_0} D^{-1} Q_p, \quad q = \overline{1, p}. \quad (8)$$

Кроме того,

$$BL = M'_{u_0}(I - P_0). \quad (9)$$

Из (8), (9) при  $q = \overline{1, p}$  получаем

$$\begin{aligned} LP_q &= LP_q(I - P_0) = LA^q D^{-1} Q_p M'_{u_0} A^{p-q}(I - P_0) = \\ &= B^{q-1} M'_{u_0} D^{-1} Q_p B^{p-q} M'_{u_0}(I - P_0) = Q_{q-1} L. \end{aligned} \quad (10)$$

Обратимся к уравнению (5), которое перепишем в виде

$$Lu = M'_{u_0} u + F(u), \quad (11)$$

где оператор  $F = M - M'_{u_0} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}; \mathcal{F})$  по построению. Подействовав на уравнение (11) последовательно проекторами  $Q_q$ ,  $q = \overline{0, p}$ , и  $I - Q$ , получим в силу (10) эквивалентную систему

$$\left\{ \begin{array}{l} Lu_1^0 = M'_{u_0} u_0^0 + F_0(u), \\ \dots \\ Lu_p^0 = M'_{u_0} u_{p-1}^0 + F_{p-1}(u), \\ 0 = M'_{u_0} u_p^0 + F_p(u), \\ Lu^1 = (I - Q)M(u), \end{array} \right. \quad (12)$$

где  $u_q^0 \in \mathcal{U}_q^0$ ,  $F_q(u) = Q_q F(u) + Q_q M'_{u_0} u^1$ ,  $q = \overline{0, p}$ ,  $u^1 \in \mathcal{U}^1$ . Итак, доказана

**Лемма 1.** Пусть операторы  $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ ,  $M \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ , причем  $L$  — бирасцепляющий оператор, и выполнены условия (A1) и (A2). Тогда уравнение (5) эквивалентно системе (12).

**Замечание 1.** В условиях леммы 1 оператор  $M'_{u_0}$   $(L, p)$ -ограничен в точке  $u_0$  [6].

Займемся теперь поисками решения задачи (4), (5).

**Определение 1.** Решением задачи (4), (5) называется вектор-функция

$$u \in \mathcal{C}^\infty((-t_0; t_0); \mathcal{U}), \quad t_0 = t_0(u_0) > 0,$$

удовлетворяющая уравнению (5) и условию (4).

Введем два определения.

**Определение 2.** Банахово  $\mathcal{C}^k$ -многообразие  $\mathcal{B}$  называется фазовым пространством уравнения (5), если  $\forall u_0 \in \mathcal{B}$  существует единственное решение  $u = u(t)$  задачи (4), (5) на некотором интервале  $(-t_0, t_0)$  [3].

**Определение 3.** Решение  $u = u(t)$  задачи (4), (5), для которого выполняется  $Lu^0 \equiv 0 \quad \forall t \in (-t_0, t_0)$ , где  $u^0 = Pu$ , называется квазистационарной траекторией уравнения (5).

Для выделения квазистационарных траекторий из множества возможных решений задачи (4), (5) наложим еще одно условие.

Рассмотрим множество  $\tilde{\mathcal{U}} = \{u \in \mathcal{U} : u_q^0 = \text{const}, \quad q = \overline{1, p}\}$ . Как нетрудно видеть,  $\tilde{\mathcal{U}}$  — полное аффинное многообразие, моделируемое подпространством  $\mathcal{U}_0^0 \oplus \mathcal{U}^1$ . Пусть точка  $u_0 \in \tilde{\mathcal{U}}$ , через  $\mathcal{O}_{u_0}$  обозначим некоторую окрестность  $\mathcal{O}_{u_0} \subset \tilde{\mathcal{U}}$  точки  $u_0$ .

$$(A3). \quad F_q(u) \equiv 0 \quad \forall u \in \mathcal{O}_{u_0}, \quad q = \overline{1, p}.$$

**Теорема 1.** Пусть

- (i) выполнены условия леммы 1;
- (ii) точка  $u_0 \in \mathcal{B}$ , где  $\mathcal{B} = \{u \in \tilde{\mathcal{U}} : Q_0 M(u) = 0\}$ ;
- (iii) выполнено условие (A3).

Тогда существует единственное решение задачи (4), (5), являющееся квазистационарной траекторией, причем  $u(t) \in \mathcal{B} \quad \forall t \in (-t_0; t_0)$ .

*Доказательство.* Предположим, что решение задачи (4), (5) найдено. Тогда из (12) в силу условия (A3), следует, что  $L\dot{u}^0 \equiv 0$ , т.е. решение является квазистационарной траекторией. Установим существование и единственность решения.

В силу леммы 1 и условия (A3) система (12) в окрестности  $\mathcal{O}_{u_0}$  редуцируется к виду

$$\begin{cases} 0 = M'_{u_0} u_0^0 + F_0(u), \\ L\dot{u}^1 = (I - Q)M(u). \end{cases} \quad (13)$$

Заметим, что по построению оператор  $M'_{u_0} : \mathcal{U}_0^0 \rightarrow \mathcal{F}_0^0$  невырожден, и

$$F'_{0u}|_{u=u_0} \equiv O,$$

где через  $F'_{0u}$  обозначена производная Фреше оператора  $F_0$  в точке  $u$ . Отсюда в силу теоремы о неявной функции существует окрестность  $\mathcal{O}_{u_0}^1 \subset (I - P)[\mathcal{O}_{u_0}]$  и вектор-функция  $\delta \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_{u_0}^1; \mathcal{O}_{u_0}^0)$ , где  $\mathcal{O}_{u_0}^0 = P[\mathcal{O}_{u_0}]$ , такие, что

$$u(t) = u_0^0(t) + \sum_{q=1}^p u_q^0 + u^1, \quad \text{причем } u(t) \in \mathcal{B} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Здесь  $u_0^0(t) = \delta(u^1) \quad \forall u^1 \in \mathcal{O}_{u_0}^1$ , а  $u_q^0 = P_q u_0 = \text{const}$  при  $q = \overline{1, p}$ .

Далее, из (10) следует, что  $QL = LP$ . Это значит, что оператор  $L : \mathcal{U}^1 \rightarrow \mathcal{F}^1$ . Обозначим через  $L_1$  сужение оператора  $L$  на  $\mathcal{U}^1$ . Оператор  $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1; \mathcal{F}^1)$  инъективен по построению. Установим его сюръективность. Пусть  $f^1 \in \mathcal{F}^1$ . Тогда существует  $\tilde{u} = \tilde{L}^{-1} f^1 \in \text{coim } L$ . Предположим, что  $P\tilde{u} \neq 0$ , т.е.

$$P\tilde{u} = \sum_{q=1}^p P_q \tilde{u}_q = \sum_{q=1}^p \tilde{u}_q^0 \neq 0.$$

Тогда

$$L\tilde{u} = LP\tilde{u} + L(I - P)\tilde{u} = \sum_{q=1}^p L\tilde{u}_q^0 + L_1(I - P)\tilde{u} = f^1 \notin \mathcal{F}^1.$$

Противоречие. Итак, оператор  $L_1 : \mathcal{U}^1 \rightarrow \mathcal{F}^1$  непрерывно биективен. Через  $L^{-1}$  обозначим сужение оператора  $\tilde{L}^{-1}$  на  $\mathcal{F}^1$ .

Из всего сказанного следует, что система (13) на  $\mathcal{O}_{u_0}^1$  может быть редуцирована к виду

$$\dot{u}^1 = L^{-1}(I - Q)M(\delta(u^1); t) + (P - P_0)u^0 + u^1 \equiv \Phi(u^1), \quad (14)$$

где  $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_{u_0}^1; \mathcal{U}^1)$ . Однозначная локальная разрешимость задачи Коши  $u^1(0) = (I - P)u_0$  для уравнения (14) — классический результат. Искомая квазистационарная траектория имеет вид  $u(t) = \delta(u^1(t)) + u^1(t)$ , где  $u^1 \in \mathcal{C}^\infty((-t_0, t_0); \mathcal{O}_{u_0}^1)$  — решение задачи Коши для уравнения (14).  $\square$

## 2. Интерпретация формальной схемы

Перейдем от системы (3) к ее модификации

$$\begin{cases} (1 - \alpha \nabla^2) v_t = \nu \nabla^2 v - (v \cdot \nabla) \tilde{v} - (\tilde{v} \cdot \nabla) v - (v \cdot \nabla) v + \sum_{l=1}^K \beta_l \nabla^2 w_l - \bar{p}, \\ 0 = \nabla(\nabla \cdot v), \quad \frac{\partial w_l}{\partial t} = v + \alpha_l w_l, \quad \alpha_l \in \mathbb{R}_-, \quad l = \overline{1, K}. \end{cases} \quad (15)$$

Замена  $\bar{p} = \nabla p$  объясняется тем, что в большинстве гидродинамических задач рассмотрение градиента предпочтительнее рассмотрения давления.

Редуцируем задачу (15), (2) к задаче (4), (5). Для этого положим

$$\mathcal{U} = \bigoplus_{l=0}^K \mathcal{U}_l, \quad \mathcal{F} = \bigoplus_{l=0}^K \mathcal{F}_l, \quad (16)$$

где  $\mathcal{U}_0 = \mathbf{H}_\sigma^2 \times \mathbf{H}_\pi^2 \times \mathbf{H}_p$ ,  $\mathcal{F}_0 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \mathbf{H}_p$ ;  $\mathcal{U}_i = \mathbf{H}^2 \cap \overset{\circ}{\mathbf{H}^1} = \mathbf{H}_\sigma^2 \times \mathbf{H}_\pi^2$ ,  $\mathcal{F}_i = \mathbf{L}^2 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi$ ,  $i = \overline{1, K}$ . Здесь  $\mathbf{H}_\sigma^2$  – подпространство соленоидальных векторов пространства  $\mathbf{H}^2 \cap \overset{\circ}{\mathbf{H}^1}$ ,  $\mathbf{H}^2 = (W_2^2(\Omega))^n$ ,  $\overset{\circ}{\mathbf{H}^1} = (W_2^1(\Omega))^n$ ;  $\mathbf{H}_\pi^2$  – ортогональное (в смысле  $\mathbf{L}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^n$ ) дополнение к  $\mathbf{H}_\sigma^2$ ;  $\mathbf{H}_\sigma$  и  $\mathbf{H}_\pi$  – замыкания подпространств  $\mathbf{H}_\sigma^2$  и  $\mathbf{H}_\pi^2$  в норме  $\mathbf{L}^2$  соответственно;  $\mathbf{H}_p = \mathbf{H}_\pi$ .

Обозначим через  $\Sigma : \mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}_\sigma$  ортопроектор вдоль  $\mathbf{H}_\pi$ . Тогда  $\Sigma \in \mathcal{L}(\mathbf{H}^2 \cap \overset{\circ}{\mathbf{H}^1})$ , причем  $\text{im } \Sigma = \mathbf{H}_\sigma^2$ ,  $\ker \Sigma = \mathbf{H}_\pi^2$ . Элемент пространства  $\mathcal{U}$  – вектор  $\vec{u}(x, t)$  – будет иметь вид  $\vec{u}(x, t) = (u_\sigma, u_\pi, u_p, w_1, \dots, w_K)$ , где  $u_\sigma = \Sigma v$ ,  $u_\pi = (I - \Sigma)v$ ,  $u_p = \bar{p}$ , и  $\vec{u}(0) = (u_{\sigma_0}, u_{\pi_0}, u_{p_0}, w_{10}, \dots, w_{K0})$ , где  $u_{\sigma_0} = \Sigma v_0$ ,  $u_{\pi_0} = (I - \Sigma)v_0$ ,  $u_{p_0} = \bar{p}_0$ ,  $w_{i0} = w_i(x, 0)$ ,  $i = \overline{1, K}$ ,  $\vec{u}(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$ .

Операторы  $L, M : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{F}$  определим формулами

$$L = \begin{pmatrix} \hat{L} & 0 \\ 0 & E_K \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где  $\hat{L} = \begin{pmatrix} \Sigma A_\alpha \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & \Pi A_\alpha \Pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\Pi = I - \Sigma$ ,  $A_\alpha = 1 - \alpha \nabla^2$ ;

$$M(\vec{u}) = M_1 \vec{u} + M_2(\vec{u}), \quad (18)$$

где  $M_1 = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$ ,  $M_{11} = \begin{pmatrix} \nu \Sigma \Delta & \nu \Sigma \Delta & 0 \\ \nu \Pi \Delta & \nu \Pi \Delta & -I \\ \Sigma C & \Pi C & 0 \end{pmatrix}$ ,  $M_{12} = \begin{pmatrix} \beta_1 \Sigma \Delta & \dots & \beta_K \Sigma \Delta \\ \beta_1 \Pi \Delta & \dots & \beta_K \Pi \Delta \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ ,  $M_{21}$  содержит  $K$  строк вида ( $I, I, 0$ ),  $M_{22} = \text{diag} [\alpha_1, \dots, \alpha_K]$ ;

$M_2 = (\Sigma B(u_\sigma + u_\pi), \Pi B(u_\sigma + u_\pi), 0, \dots, 0)^T$ . Здесь  $B(u_\sigma + u_\pi) := -((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla) \tilde{v} - (\tilde{v} \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) - ((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi)$ ,  $C(u_\sigma + u_\pi) := \nabla(\nabla \cdot (u_\sigma + u_\pi))$ .

**Лемма 2.** Пусть пространства  $\mathcal{U}, \mathcal{F}$  определены формулами (16), причем  $n = 2, 3, 4$ , а операторы  $L, M : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{F}$  формулами (17), (18). Тогда: (i) оператор  $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ , причем, если  $\alpha^{-1} \notin \sigma(-\nabla^2)$ , то  $\ker L = \{0\} \times \{0\} \times \mathbf{H}_p \times \underbrace{\{0\} \dots \{0\}}_K$ ,  $\text{im } L = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \{0\} \times \mathcal{F}_1 \times \dots \times \mathcal{F}_K$ ; (ii) оператор  $M \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ .

*Доказательство.* Утверждение (i) леммы 1 очевидно, а утверждение (ii) проверяется непосредственно. Укажем лишь, что

$$M'_u = M_1 + M_3, \quad (19)$$

где  $M_3 = \begin{pmatrix} \hat{M}_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\hat{M}_3 = \begin{pmatrix} \Sigma B_\sigma & \Sigma B_\pi \\ \Pi B_\sigma & \Pi B_\pi \end{pmatrix}$ ,  $B_\sigma(B_\pi)$  – частная производная Фреше оператора  $B$  в точке  $u_\sigma + u_\pi$  по  $u_\sigma(u_\pi)$ . Очевидно,  $\forall n \geq 3 \quad \forall u \in \mathcal{U} \quad M_u^{(n)} \equiv 0$ .  $\square$

И тем самым закончили редукцию задачи (15), (3) к задаче (4), (5).

Далее надо проверить выполнимость условий (A1) – (A3). Обозначим через  $A_{\alpha\sigma}$  сужение оператора  $\Sigma A_\alpha \Sigma$  на  $\mathbf{H}_\sigma^2$ .

**Лемма 3.** Пусть выполнены условия леммы 2, причем  $\ker A_{\alpha\sigma} = \{0\}$ . Тогда каждый вектор  $\varphi \in \ker L \setminus \{0\}$  имеет точно один  $M'_u$ -присоединенный вектор независимо от точки  $u \in \mathcal{U}$ .

*Доказательство.* Пусть вектор  $\varphi = (0, 0, \varphi_p, 0, \dots, 0) \in \ker L$ ,  $\varphi_p \neq 0$ . Найдем вектор  $\psi \in \mathcal{U}$  такой, что  $L\psi = M'_u\varphi$ . Из (17) и (19) следует система

$$A_{\alpha\sigma}\psi_\sigma = 0, \quad \Pi A_\alpha \psi_\pi = -\varphi_p. \quad (20)$$

Поэтому из (20) получаем  $\psi_\sigma = 0$ . Следовательно, если  $\psi_\pi = 0$ , то  $\varphi_p = 0$ . Итак,  $\psi_\pi \neq 0$ .

Пусть

$$\tilde{L}^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{L}^{-1} & 0 \\ 0 & E_K \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где  $\hat{L}^{-1} = \begin{pmatrix} \Sigma A_\alpha^{-1} \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & \Pi A_\alpha^{-1} \Pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Поскольку  $\tilde{L}^{-1}L = \begin{pmatrix} \Sigma_\Pi & 0 \\ 0 & E_K \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ , где  $\Sigma_\Pi = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & \Pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , а  $L\tilde{L}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$

и формально имеет такой же вид, то  $\psi_\sigma = 0$ ,  $\psi_\pi = -\Pi A_\alpha^{-1} \varphi_p$ , компонента  $\psi_p$  вектора  $\psi$  произвольна, а остальные  $K$  компоненты вектора  $\psi$  равны нулю. Далее  $M'_u\psi = (\Sigma(\tilde{B}_\sigma\psi_\sigma + \tilde{B}_\pi\psi_\pi), \Pi(\tilde{B}_\sigma\psi_\sigma + \tilde{B}_\pi\psi_\pi) - \varphi_p, C\psi_\pi, \dots)^T$ , где  $\tilde{B}(u_\sigma + u_\pi) := \nu \nabla^2(u_\sigma + u_\pi) - ((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)\tilde{v} - (\tilde{v} \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) - ((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi)$ ,  $\tilde{B}_\sigma(\tilde{B}_\pi)$  – частная производная Фреше оператора  $\tilde{B}$  в точке  $u_\sigma + u_\pi$  по  $u_\sigma(u_\pi)$ . Так как  $\psi_\pi \neq 0$ , то  $C\psi_\pi \neq 0$ . Следовательно,  $M'_u\psi \notin \text{im } L$  независимо от  $u \in \mathcal{U}$ . Итак, условие (A1) выполняется, причем  $p = 1$ .  $\square$

Теперь проверим условие (A2). Обозначим через  $A_{\alpha\pi}$  сужение оператора  $\Pi A_\alpha^{-1} \Pi$  на  $\mathbf{H}_\pi$ . Справедлива

**Лемма 4.** [5]. В условиях леммы 3 оператор  $A_{\alpha\pi} : \mathbf{H}_\pi \rightarrow \mathbf{H}_\pi^2$  – топлинейный изоморфизм.

В силу леммы 2 оператор  $L$  из (17) бирашцепляющий. Положим  $\mathcal{U}_0^0 = \ker L$ ,  $\text{coim } L = \mathbf{H}_\sigma^2 \times \mathbf{H}_\pi^2 \times \{0\} \times \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_K$ . Построим линеалы  $\mathcal{F}_0^0 = M'_{u_0}[\mathcal{U}_0^0] = \{0\} \times \mathbf{H}_p \times \{0\} \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_K = \{0\} \times \mathbf{H}_\pi \times \{0\} \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_K \subset \text{im } L$ ,  $\mathcal{U}_1^0 = \tilde{L}^{-1}[\mathcal{F}_0^0] = \Sigma A_\alpha^{-1}[\mathbf{H}_p] \times \underbrace{A_{\alpha\pi}[\mathbf{H}_p] \times \{0\} \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_K}_{K} = \Sigma A_\alpha^{-1} A_{\alpha\pi}^{-1}[\mathbf{H}_\pi^2] \times \mathbf{H}_\pi^2 \times \{0\} \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_K \subset \text{coim } L$  в силу леммы 4;  $\mathcal{F}_1^0 = M'_{u_0}[\mathcal{U}_1^0] = \Sigma \tilde{B}_0 A_\alpha^{-1}[\mathbf{H}_p] \times \Pi \tilde{B}_0 A_\alpha^{-1}[\mathbf{H}_p] \times C A_\alpha^{-1}[\mathbf{H}_p] \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_K$ .

Пусть  $\tilde{C}$  — сужение оператора  $C$  на  $\mathbf{H}_\pi^2$ . Поскольку существует оператор  $\tilde{C}^{-1}$ , то в силу леммы 4  $\mathcal{F}_1^0 = \Sigma \tilde{B}_0 A_\alpha^{-1} A_{\alpha\pi}^{-1} \tilde{C}^{-1} [\mathbf{H}_p] \times \Pi \tilde{B}_0 A_\alpha^{-1} A_{\alpha\pi}^{-1} \tilde{C}^{-1} [\mathbf{H}_p] \times \underbrace{\mathbf{H}_p \times \{0\} \times \dots \times \{0\}}_K \not\subset \text{im } L$ .

Здесь и выше  $\tilde{B}_0$  — производная Фреше оператора  $\tilde{B}$  в точке  $u_{\sigma 0} + u_{\pi 0}$ , а оператор  $\tilde{L}^{-1}$  определен в (21). Построим операторы

$$P_0 = \begin{pmatrix} \hat{P}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} \hat{P}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$\text{где } \hat{P}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Pi \end{pmatrix}, \quad \hat{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & P_1^{12} & 0 \\ 0 & \Pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_1^{12} = \Sigma A_\alpha^{-1} A_{\alpha\pi}^{-1} \Pi;$$

$$Q_0 = \begin{pmatrix} \hat{Q}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} \hat{Q}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$\text{где } \hat{Q}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ Q_0^{21} & \Pi & Q_0^{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Q}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & Q_1^{13} \\ 0 & 0 & Q_1^{23} \\ 0 & 0 & \Pi \end{pmatrix}, \quad Q_1^{13} = \Sigma \tilde{B}_0 A_\alpha^{-1} A_{\alpha\pi}^{-1} \tilde{C}^{-1} \Pi, \quad Q_1^{23} =$$

$\Pi \tilde{B}_0 A_\alpha^{-1} A_{\alpha\pi}^{-1} \tilde{C}^{-1} \Pi, \quad Q_0^{21} = -\Pi A_\alpha A_{\alpha\sigma}^{-1} \Sigma, \quad Q_0^{23} = -Q_0^{21} Q_1^{13} - Q_1^{23}$ . Легко видеть, что операторы  $P_k \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$  и  $Q_k \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ ,  $k = 0, 1$ , определенные в (22), (23), — проекторы, причем  $\text{im } P_k = \mathcal{U}_k^0$ ,  $\text{im } Q_k = \mathcal{F}_k^0$ ,  $k = 0, 1$  и  $P_0 P_1 = P_1 P_0 = 0$ ,  $Q_0 Q_1 = Q_1 Q_0 = 0$ . Кроме того,  $\ker Q_1 = \text{im } L$  и, значит,  $\mathcal{F}_1^0 \oplus \text{im } L = \mathcal{F}$ , т.е. условие (A2) выполняется.

Для проверки условия (A3) построим множество  $\tilde{\mathcal{U}} = \{u \in \mathcal{U} : P_1 u = \text{const}\} = \{u \in \mathcal{U} : u_\pi = \text{const}\}$ . В нашем случае условие (A3) состоит из единственного равенства  $Q_1 M(u) = (Q_1^{13} C(u_\sigma + u_\pi), Q_1^{23} C(u_\sigma + u_\pi), C(u_\sigma + u_\pi), 0, \dots, 0)^T = 0$ , которое выполняется тождественно, если  $u_\pi = 0$ . Итак, если положить  $\tilde{\mathcal{U}} = \{u \in \mathcal{U} : u_\pi = 0\}$ , то условие (A3) имеет место.

Построим множество  $\mathcal{B}$ . Согласно теореме 1,  $\mathcal{B} = \{u \in \tilde{\mathcal{U}} : Q_0 M(u) = 0\}$ . Поскольку при  $u_\pi = 0$   $Q_0 M(\vec{u}) = 0 \iff (Q_0^{21} \Sigma + \Pi) \tilde{B}(u_\sigma) - u_p = 0$ , и

$$Q_0^{21} \Sigma + \Pi = A_{\alpha\pi}^{-1} \Pi A_\alpha^{-1} \Sigma + A_{\alpha\pi}^{-1} \Pi A_\alpha^{-1} \Pi = A_{\alpha\pi}^{-1} \Pi A_\alpha^{-1}, \quad (24)$$

то

$$\mathcal{B} = \{u \in \tilde{\mathcal{U}} : A_{\alpha\pi}^{-1} \Pi A_\alpha^{-1} \tilde{B}(u_\sigma) = u_p,$$

$$u_\pi = 0, \quad u_\sigma \in \mathbf{H}_\sigma^2, \quad u_i \in \mathbf{H}_\sigma^2 \times \mathbf{H}_\pi^2, \quad i = \overline{1, K}. \quad (25)$$

Для доказательства (24) заметим, что  $\Pi A_\alpha^{-1} A_{\alpha\sigma} \Sigma + \Pi A_\alpha^{-1} \Pi A_\alpha \Sigma = \Pi A_\alpha^{-1} (\Sigma A_\alpha + \Pi A_\alpha) \Sigma = 0$ . Отсюда следует, что  $\Pi A_\alpha^{-1} A_{\alpha\sigma} \Sigma = -A_{\alpha\pi} \Pi A_\alpha \Sigma$ ,  $A_{\alpha\pi}^{-1} \Pi A_\alpha^{-1} A_{\alpha\sigma} \Sigma = -\Pi A_\alpha \Sigma$ ,  $A_{\alpha\pi}^{-1} \Pi A_\alpha^{-1} \Sigma = -\Pi A_\alpha A_{\alpha\sigma}^{-1} \Sigma = Q_0^{21} \Sigma$ . Итак, доказана

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия леммы 3. Пусть  $u_0 \in \mathcal{B}$  (25). Тогда для некоторого  $t_0 = t_0(u_0)$  существует единственное решение задачи (15), (3), являющееся квазистационарной траекторией,  $u = (u_\sigma, 0, \bar{p}, w_1, \dots, w_k)$  класса  $C^\infty((-t_0, t_0); \mathcal{B})$  и такое, что  $u \in \mathcal{B}$  для всех  $t \in (-t_0, t_0)$ .

Автор выражает признательность профессорам Т.Г. Сукачевой и Г.А. Свиридову за внимание к данным исследованиям и обсуждение результатов.

## Литература

1. Осколков, А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта и жидкостей Олдройта / А.П. Осколков // Тр. мат. ин-та АН СССР. – 1988. – № 179. – С. 126 – 164.
2. Марсден, Дж. Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Дж. Марсден, М. МакКракен. – М.: Мир, 1980.
3. Свиридов, Г.А. Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридов, Т.Г. Сукачева // Сиб. мат. журн. – 1990. – Т. 31, № 5. – С. 109 – 119.
4. Сукачева, Т.Г. Об одной модели движения несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта ненулевого порядка / Т.Г. Сукачева // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 4. – С. 552 – 557.
5. Сукачева, Т.Г. Исследование математических моделей несжимаемых вязкоупругих жидкостей: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Т.Г. Сукачева, Новгород. гос. ун-т. – Великий Новгород, 2004. – 249 с.
6. Свиридов, Г.А. Некоторые математические задачи динамики вязкоупругих несжимаемых сред / Г.А. Свиридов, Т.Г. Сукачева // Вестн. МаГУ. – 2005. – № 8. – С. 5 – 33.

Кафедра математического анализа,  
Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого  
oltan.72@mail.ru

*Поступила в редакцию 25 февраля 2010 г.*

# ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ АНАЛИЗА РЫНОЧНОЙ КОРЗИНЫ НА ПРОЦЕССОРАХ CELL

*К.С. Пан, М.Л. Цымблер*

## A PARALLEL ALGORITHM FOR MARKET BASKET ANALYSIS ON THE CELL PROCESSOR

*C.S. Pan, M.L. Zymbler*

В работе рассматривается задача глубинного анализа данных — задача нахождения часто встречающихся наборов товаров. Предложен параллельный алгоритм, адаптированный для вычислительных систем на базе процессоров с архитектурой Cell Broadband Engine. Представлены результаты вычислительных экспериментов, показывающие эффективность предложенного алгоритма.

*Ключевые слова:* глубинный анализ данных (*data mining*), анализ рыночной корзины, *Cell*

The paper is devoted to solving market-basket analysis problem of data mining. We describe a parallel algorithm adapted for the Cell Broadband Engine architecture. The experimental results demonstrate the effectiveness of the proposed algorithm.

*Keywords:* *data mining*, *market-basket problem*, *Cell*

## Введение

Задача анализа рыночной корзины (*market-basket problem*) заключается в нахождении всех наборов (множеств) товаров, которые часто приобретаются совместно [?]. Для формального описания задачи и алгоритма ее решения в работе используются следующие термины и обозначения.

*Корзина (basket)* — набор товаров, приобретенных совместно (в рамках одной покупки). Обозначим за  $B$  (*baskets*) множество анализируемых корзин, а за  $I$  (*items*) — множество всех товаров, т.е.  $I = \bigcup_{b \in B} b$ .

*Опорное число (support)* заданного набора товаров  $X$  — количество корзин во множестве  $B$ , каждая из которых содержит данный набор товаров  $X$ , т.е.  $\text{support}(X, B) = \text{card}\{b \in B : X \subset b\}$ .

Обозначим за  $s_{min}$  минимальное значение опорного числа, при котором набор товаров считается часто встречающимся. Обозначим за  $L$  (*large itemsets*) множество часто встречающихся наборов товаров, т.е.  $L = \{l \subset I : \text{support}(l, B) \geq s_{min}\}$ . Множество  $L$  содержит все наборы товаров, опорное число которых не меньше  $s_{min}$ .

В соответствии со введенными обозначениями задача анализа рыночной корзины формулируется следующим образом: для заданных множества  $B$  и числа  $s_{min}$  найти множество  $L$ .

Далее мы рассмотрим последовательный алгоритм решения задачи анализа рыночной корзины, а затем на его основе построим параллельный алгоритм, адаптированный для вычислительных систем на базе процессоров с архитектурой IBM Cell Broadband Engine.

## 1. Последовательный алгоритм Apriori

Алгоритм анализа рыночной корзины на процессорах Cell построен на основе алгоритма Apriori, предложенного в [1]. Идея алгоритма Apriori состоит в использовании свойства антимонотонности опорного числа, которое заключается в следующем: опорное число множества товаров не превосходит опорного числа любого его подмножества, т.е.

$$\forall \gamma \subset c \text{ support}(\gamma, B) \geq \text{support}(c, B).$$

В описании алгоритма Apriori используются следующие дополнительные термины и обозначения.

*Кандидат*  $c$  — набор товаров, для которого в ходе выполнения алгоритма выдвигается и проверяется гипотеза  $c \in L$ . На  $k$ -м шаге выполнения алгоритма вычисляются два множества:  $C_k$  и  $L_k$ .

$C_k$  (*candidate k-itemsets*) — множество кандидатов длины  $k$ , где *длина кандидата* — это количество элементов в нем.

Каждый кандидат из  $C_k$ , опорное число которого не меньше  $s_{min}$ , попадает во множество  $L_k$  — множество часто встречающихся наборов товаров длины  $k$ , т.е.

$$L_k = \{c \in C_k : \text{support}(c, B) \geq s_{min}\}.$$

В ходе выполнения алгоритма вычисляются все множества  $L_k$ , объединение которых по окончании вычислений дает множество  $L$ , т.е.  $L = \bigcup_k L_k$ .

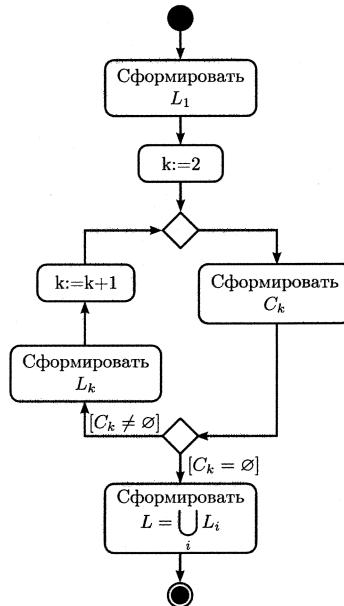


Рис. 1. Последовательный алгоритм Apriori

Последовательный алгоритм Apriori, представленный на рис. 1, кратко может быть описан следующим образом.

На первом шаге алгоритма формируется множество одноэлементных кандидатов  $C_1$  ( $k = 1$ ). Для этого производится перебор всех корзин  $B$ , в ходе которого каждый встреченный товар рассматривается в качестве одноэлементного кандидата и увеличивается его опорное число. Из всего множества полученных кандидатов выбираются те, опорное число которых не меньше  $s_{min}$ , и обозначаются как  $L_1$ .

На втором шаге алгоритма из часто встречающихся наборов товаров длины  $k$  ( $L_k$ ) формируется множество кандидатов с большей на единицу длиной ( $C_{k+1}$ ). Если на данном шаге множество  $C_{k+1}$  получилось пустым, то выполнение алгоритма завершается. Вычисление  $C_{k+1}$  на основе  $L_k$  осуществляется с помощью суперпозиции операций *selfjoin* и *prune*.

Если представить множество  $L_k$  в виде реляционного отношения, имеющего атрибуты  $item_1, item_2, \dots, item_k$ , то операция *selfjoin* представляет собой реляционную операцию  $\Theta$ -соединения отношения  $L_k$  с самим собой:  $selfjoin(L_k) = L_k \bowtie_{\Theta} L_k$ , где  $\Theta$  — это условие  $(p.item_1 = q.item_1) \wedge (p.item_2 = q.item_2) \wedge \dots \wedge (p.item_{k-1} = q.item_{k-1}) \wedge (p.item_k < q.item_k)$ .

Операция *prune* (*отсечение*) заключается в сокращении множества кандидатов путем отбрасывания тех из них, у которых хотя бы одно подмножество не входит в  $L_k$ , т.е.  $prune(C) = \{c \in C : \forall \hat{c} \subset c \quad \hat{c} \in L_k\}$ .

Таким образом,  $C_{k+1} = prune(selfjoin(L_k))$ .

Третий шаг алгоритма заключается в том, что для новых кандидатов  $C_{k+1}$  вычисляются опорные числа. Для этого производится перебор всех корзин  $B$ , в ходе которого каждый кандидат из  $C_{k+1}$  проверяется на вхождение в каждую корзину. Выбираются все кандидаты с опорным числом не меньше  $s_{min}$  и обозначаются как множество  $L_{k+1}$ . После этого  $k$  увеличивается на единицу и выполнение алгоритма продолжается со второго шага.

Вычисление опорных чисел кандидатов является наиболее затратной вычислительной операцией алгоритма и требует  $|C_k| \cdot |B|$  операций проверки вхождения кандидата в корзину,

т.е. всего  $\sum_{i=1}^{|C_k|} \sum_{j=1}^{|B|} |c_i| \cdot |b_j|$  операций сравнения, где  $c \in C_k$  и  $b \in B$ .

## 2. Работы по тематике исследования

В соответствии с архитектурой Cell Broadband Engine (Cell BE) [2], процессор Cell представляет собой асимметричный многоядерный процессор, состоящий из одного управляющего ядра (Power Processing Element, PPE) и восьми вычислительных ядер (Synergistic Processing Element, SPE), которые поддерживают набор векторных инструкций (SIMD-функций) для обработки 128-битных векторов.

В работе [3] рассматривается построение параллельных алгоритмов Data Mining для решения задач кластеризации и классификации на процессорах Cell.

В настоящее время распараллеливание алгоритма Apriori осуществляется с помощью следующих основных подходов [4]: Count Distribution и Data Distribution. Распределение данных по вычислительным узлам, используемое в этих подходах, показано на рис. 2.

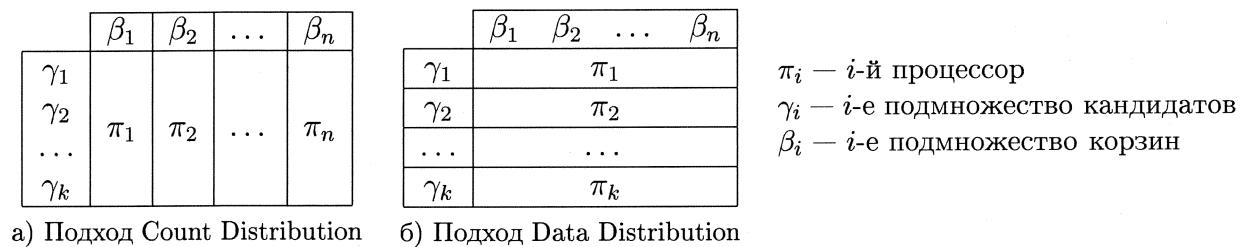


Рис. 2. Подходы к распараллеливанию алгоритма Apriori

Подход *Count Distribution* [5] заключается в том, что множество корзин  $B$  разбивается на подмножества  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ . Каждое множество  $\beta_i$  обрабатывается на своем процессоре  $\pi_i$ .

Диаграмма деятельности, которая иллюстрирует подход Count Distribution, приведена на рис. 3а. Данный подход реализован для Cell в работе [6].

Подход *Data Distribution* [5] предполагает, что множество кандидатов  $C_k$  разбивается на подмножества  $\gamma_k^1, \gamma_k^2, \dots, \gamma_k^n$ . Каждое множество  $\gamma_k^i$  обрабатывается своим процессором  $\pi_i$ . Диаграмма деятельности, которая иллюстрирует данный подход, представлена на рис. 3б. На данной диаграмме введена дополнительная функция  $\lambda(\gamma)$ , которая обозначает множество часто встречающихся наборов из подмножества кандидатов  $\gamma$ , т.е.  $\lambda(\gamma) = \{c \in \gamma : support(c, B) \geq s_{min}\}$

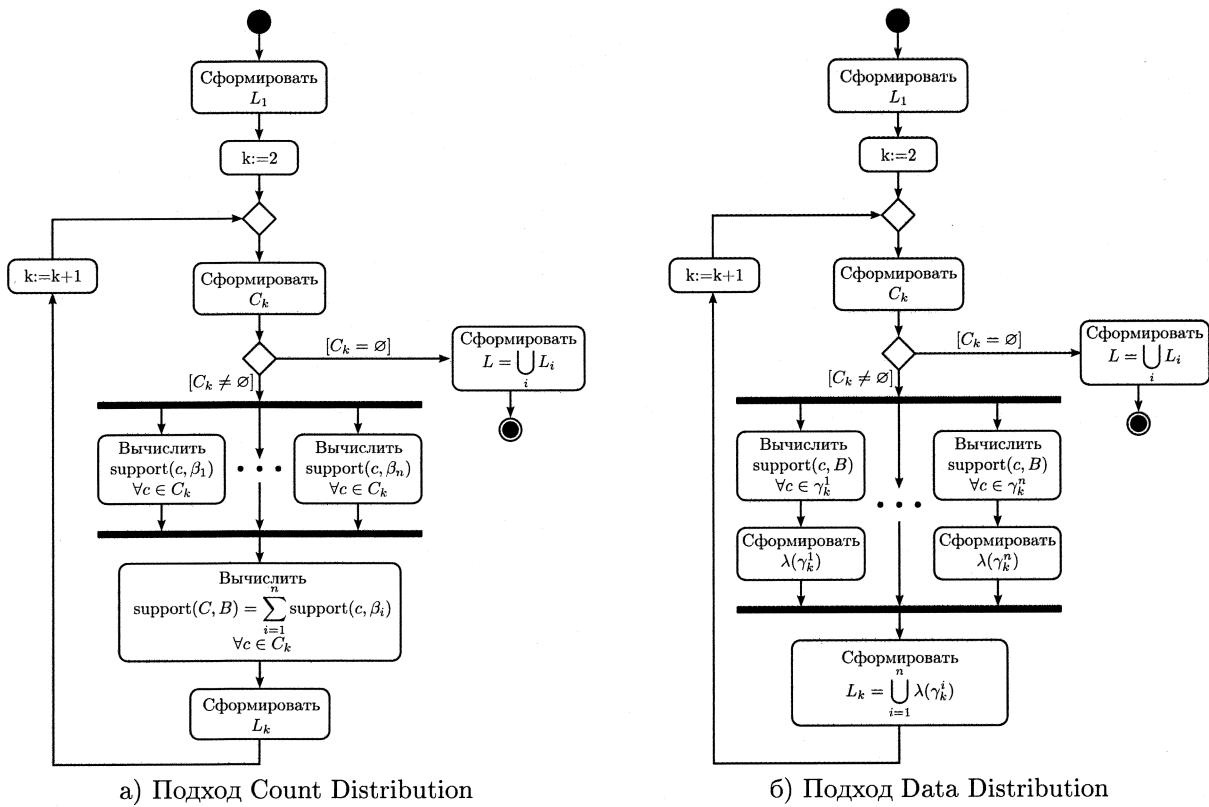


Рис. 3. Подходы к распараллеливанию алгоритма Apriori

В настоящее время подход Data Distribution, насколько нам известно, не реализован для архитектуры Cell BE.

### 3. Параллельный алгоритм для Cell

На основе подхода *Data Distribution* нами был разработан алгоритм *DDCapriori*, который реализует параллельный анализ рыночной корзины на процессорах Cell. В изложении алгоритма мы исходим из допущения, что анализируемое множество корзин может быть целиком размещено в оперативной памяти.

#### 3.1. Проектирование

В алгоритме DDCapriori используется модель «мастер-рабочие». Нить-мастер запускается на управляющем ядре PPE и распределяет задания для рабочих. Нити-рабочие запускаются на вычислительных ядрах SPE и выполняют обработку данных, получаемых от мастера.

На рис. 4 представлены диаграммы деятельности мастера и рабочего, описывающие алгоритм DDCapriori. Для упрощения записи нами введены операции Send, Recv и MakeTask.

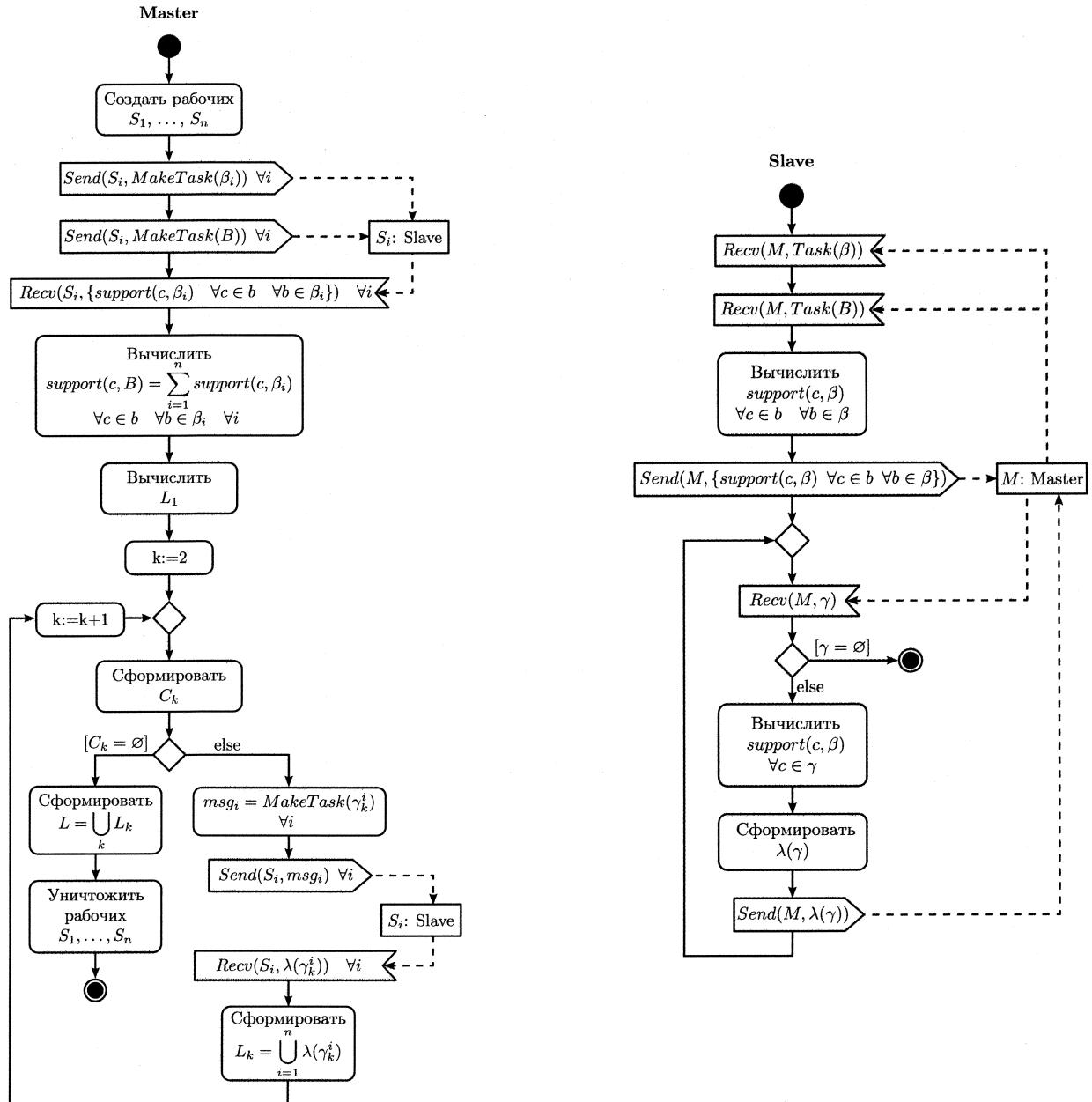


Рис. 4. Диаграммы деятельности мастера и рабочего

Процедура  $Send(dst, msg)$  выполняет асинхронную отправку сообщения  $msg$  получателю  $dst$ .

Процедура  $Recv(src, msg)$  выполняет синхронное получение сообщения  $msg$  от отправителя  $src$ .

Функция  $MakeTask(d)$  создает и возвращает задание на обработку данных  $d$ . Задание представляет собой совокупность адреса, по которому располагаются данные в оперативной памяти, и размера этих данных. В качестве данных может выступать множество корзин либо множество кандидатов.

Идея предлагаемого параллельного алгоритма заключается в том, чтобы возложить на мастера задачу формирования множеств  $C_k$  и  $L_k$ , а на рабочих — вычисление опорных чисел для кандидатов из  $C_k$ .

В отличие от подхода *Data Distribution*, при вычислении множества  $L_1$  множество корзин  $B$  разбивается на подмножества, которые затем назначаются для обработки разным рабочим. Рабочий рассматривает каждый товар в своем подмножестве корзин как одиночный кандидат и увеличивает его опорное число всякий раз, когда этот кандидат встречается в корзинах. При вычислении множества  $L_k$  ( $k > 1$ ) на рабочих распределяются кандидаты, а не корзины.

*Деятельность мастера* кратко может быть описана следующим образом. После создания рабочих мастер отправляет каждому из них первое задание и все множество корзин, после чего переходит в состояние ожидания. По получении результатов мастер выполняет их агрегацию, формируя таким образом множество кандидатов единичной длины, и отсечение редко встречающихся кандидатов, формируя множество часто встречающихся наборов товаров единичной длины. Далее мастер полагает счетчик  $k$  равным 1 и циклически выполняет следующую последовательность действий. Из множества часто встречающихся наборов товаров, имеющих длину  $k$ , формируется множество кандидатов длины  $k + 1$ . Затем мастер формирует задания на обработку полученного множества кандидатов, отправляет их рабочим и ожидает от них результаты вычислений (опорные числа). Если мастеру не удается сформировать кандидаты длины  $k + 1$ , то мастер прерывает цикл, уничтожает рабочих и вычисляет результирующее множество.

*Деятельность рабочего* состоит в следующем. Получив задание от мастера, рабочий формирует множество кандидатов единичной длины из своего подмножества корзин, после чего отправляет результаты мастеру. Далее рабочий циклически выполняет следующую последовательность действий: ожидание от мастера подмножества кандидатов, вычисление опорных чисел и отправка результата вычислений мастеру. Цикл прерывается, если получено задание на обработку пустого множества кандидатов.

### 3.2. Реализация

Диаграмма классов, реализующих предложенный алгоритм, представлена на рис. 5.

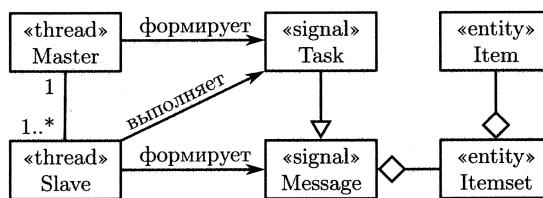


Рис. 5. Диаграмма классов, реализующих алгоритм DDCapriori

Класс *Master* реализует нить-мастер и выполняет следующие основные функции: управление рабочими и формирование множеств  $C_k$  и  $L_k$ . Экземпляр класса *Master* исполняется на управляющем ядре PPE.

Класс *Slave* реализует нить-рабочего и выполняет расчет опорных чисел для кандидатов из множества  $C_k$ . Экземпляры класса *Slave* создаются экземпляром класса *Master* на вычислительных ядрах SPE (по одному на каждом вычислительном ядре).

Класс *Task* служит для управления рабочими, выполняет роль сигнала и хранит входные данные для рабочего. Класс *Message* выполняет роль сигнала, отправляемого мастеру рабочим, и хранит результаты вычислений рабочего.

Помимо увеличения производительности параллельного анализа рыночной корзины по сравнению с последовательным, мы получаем дополнительный прирост производительности

за счет использования векторных функций Cell [8] при вычислении опорных чисел кандидатов.

Процессор Cell оперирует векторами длиной 128 битов. В зависимости от длины идентификатора товара, в одном векторе могут быть размещены от 16 до 2 целочисленных идентификаторов. В нашей реализации используются 32-битные идентификаторы, то есть в одном векторе размещаются 4 идентификатора.

При проверке вхождения кандидата в корзину  $c \subset b$  кандидат  $c$  и корзина  $b$  разбиваются на вектора  $\vec{c}_i$  и  $\vec{b}_j$ . Каждый из векторов кандидата сравнивается с каждым вектором корзины с помощью последовательности векторных операций, которая показана на рис. 6.

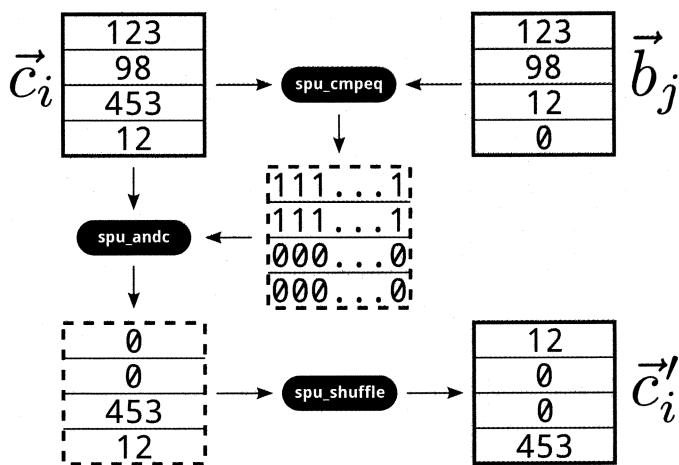


Рис. 6. Операция проверки вхождения кандидата в корзину

С помощью функции сравнения векторов *spu\_cmpeq* формируется вектор-маска, в котором биты элемента установлены, если соответствующие элементы векторов  $\vec{c}_i$  и  $\vec{b}_j$  равны, и сброшены в противном случае. Далее к исходному вектору кандидата  $\vec{c}_i$  и полученной маске применяется векторная функция *spu\_andc*, которая выполняет побитовую операцию  $A \wedge \neg B$ , обращая в нуль все элементы исходного вектора кандидата  $\vec{c}_i$ , совпадающие с соответствующим элементом вектора корзины  $\vec{b}_j$ . Затем с помощью векторной функции *spu\_shuffle* выполняется циклический сдвиг полученного вектора на 1 элемент.

Данная процедура, примененная  $N$  раз, где  $N$  — длина вектора, позволяет обнулить все элементы вектора  $\vec{c}_i$ , которые содержатся в векторе  $\vec{b}_j$ .

Таким образом, после применения этой процедуры ко всем парам векторов из кандидата и корзины в кандидате останутся только те элементы, которые не входят в корзину. Если таких элементов не осталось, то кандидат входит в корзину.

Поскольку каждый вектор кандидата проверяется на вхождение в каждый вектор корзины, то для вычисления опорных чисел кандидатов из множества  $C_k$  потребуется  $O\left(\sum_{i=1}^{|C_k|} \sum_{j=1}^{|B|} |c_i| \cdot |b_j|\right)$  векторных операций. Заметим, что в случае, когда векторные функции не используются, для выполнения проверки требуется такое же количество скалярных операций, скорость выполнения которых на вычислительных ядрах SPE существенно ниже [2].

#### 4. Вычислительные эксперименты

Для оценки эффективности разработанного алгоритма нами были проведены три серии вычислительных экспериментов. В качестве исходных данных экспериментов был взят

стандартный тестовый набор данных о посещении страниц web-сайта [msnbc.com](http://msnbc.com), который также использовался для оценки эффективности алгоритмов Data Mining, предложенных в [10]. Множество  $B$  в тестовой задаче представляет собой записи о посещениях страниц сайта. Каждая запись содержит отметку о том, к какой семантической категории принадлежат посещенные за один сеанс страницы. В экспериментах осуществляется поиск наборов категорий страниц, часто посещаемых совместно (в течение одной сессии пользователя).

В первой серии экспериментов мы определили время работы и ускорение алгоритма в зависимости от количества задействованных вычислительных ядер. Результаты экспериментов представлены на рис. 7. При вычислении ускорения за единицу принята производительность последовательного алгоритма, предложенного в [9], который в настоящее время считается одним из лучших последовательных алгоритмов решения задачи анализа рыночной корзины [4–7]. Эксперименты показывают, что алгоритм DDCapriori демонстрирует ускорение, близкое к линейному.

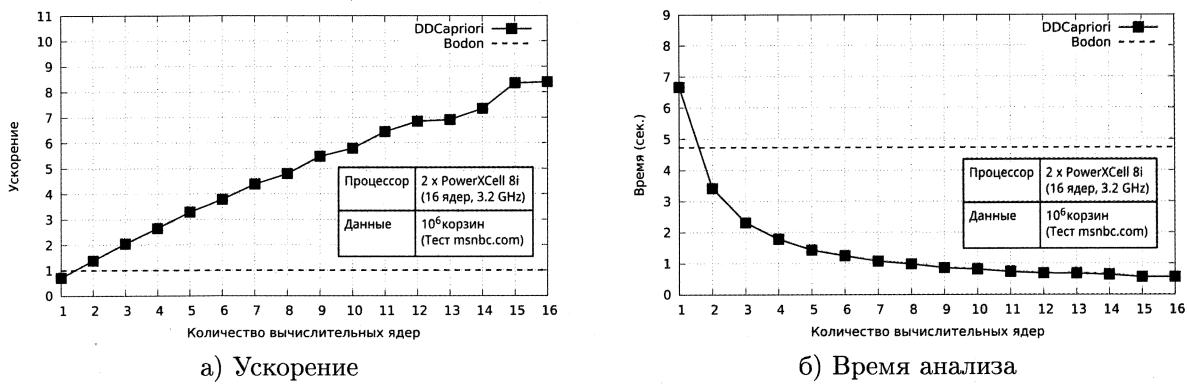


Рис. 7. Производительность алгоритма DDCapriori

Кроме того, мы сравнили масштабируемость разработанного алгоритма и алгоритма Count Distribution для Cell, используя результаты экспериментов, опубликованные авторами этого алгоритма в [6]. Сравнение показывает (см. рис 8) несколько лучшую масштабируемость разработанного алгоритма.

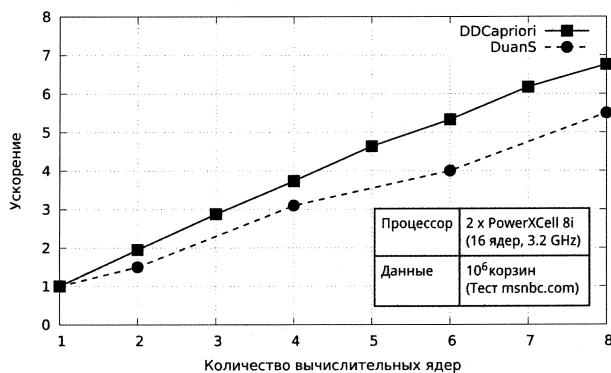
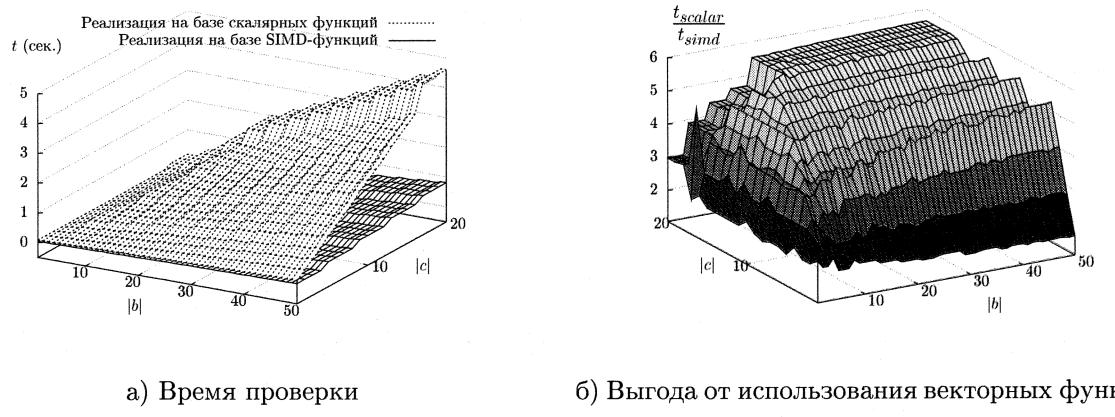


Рис. 8. Сравнение масштабируемости DataDistribution и CountDistribution

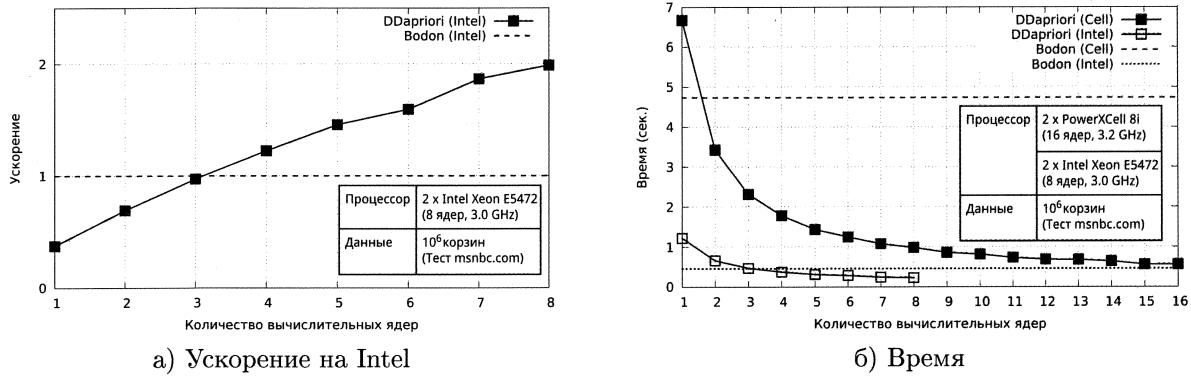
Во второй серии экспериментов мы исследовали выигрыши от применения векторных операций вместо скалярных при проверке вхождения кандидата в корзину в зависимости от длины кандидата и корзины. Результаты данной серии экспериментов представлены на

рис. 9. Результаты экспериментов показывают, что выигрыш от использования векторных операций прямо пропорционален длинам кандидата и корзины.



**Рис. 9.** Использование векторных функций при проверке вхождения кандидата в корзину

Третья серия экспериментов была направлена на сравнение производительности разработанного алгоритма на платформах Cell и Intel. Для проведения этих экспериментов нами была разработана реализация алгоритма DD<sup>A</sup>priori, ориентированная на процессоры Intel. В данной реализации вместо SPE-нитей используются POSIX-нити и не используются векторные функции. Результаты экспериментов представлены на рис. 10.



**Рис. 10.** Сравнение быстродействия на процессорах Cell и Intel

Эксперименты показывают, что на процессорах Cell алгоритм демонстрирует несколько лучшее ускорение, чем на процессорах Intel. Однако процессоры Intel обеспечивают существенно более высокое быстродействие, чем процессоры Cell.

## 5. Заключение

В работе представлен параллельный алгоритм решения задачи анализа рыночной корзины, адаптированный для вычислительных систем на базе процессоров Cell. Параллелизм достигается путем разделения множества кандидатов на подмножества и распределения этих подмножеств по вычислительным ядрам. При этом множество корзин передается целиком на каждое вычислительное ядро.

В реализации использована модель «мастер-рабочие». Нить-мастер запускается на управляющем ядре PPE и выполняет управление рабочими и формирование кандидатов и множеств часто встречающихся наборов на каждом шаге алгоритма. Нити-рабочие запускаются на вычислительных ядрах SPE и выполняют вычисление опорных чисел кандидатов.

Реализация выполнена на языке программирования С с использованием векторных функций библиотеки IBM Cell Broadband Engine SDK, которые позволяют эффективно реализовать наиболее затратную операцию вычисления опорных чисел.

Представлены результаты вычислительных экспериментов, показывающие эффективность предложенного алгоритма.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-0700241-a).*

## Литература

1. Agrawal, R. Mining Association Rules between Sets of Items in Large Databases / R. Agrawal, T. Imielinski, A.N. Swami // Proceedings of the 1993 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data. P. 207–216.
2. IBM Corporation. Cell Broadband Engine technology.  
URL: <http://www.alphaworks.ibm.com/topics/cell> (дата обращения: 01.06.2009).
3. Buehrer, G. Data Mining on Cell Broadband Engine / G. Buehrer, S. Parthasarathy, M. Goymber // Proceedings of the 22nd International Conference on Supercomputing. 2008. P. 26–35.
4. Zaki, M.J. Parallel and Distributed Association Mining: A Survey // IEEE Concurrency. October 1999. Vol. 7. No. 4. P. 14–25.
5. Zaki, M.J. Parallel data mining for association rules on shared-memory multi-processors / M.J. Zaki, M. Ogihara, S. Parthasarathy, W. Li // Proceedings of the 1996 ACM/IEEE conference on Supercomputing. 1996. Article No. 43.
6. Duan, R. Data Mining Algorithms on the Cell Broadband Engine / R. Duan, A. Strey // Proceedings of the 14th International Euro-Par Conference. 2008. P. 665–675.
7. Han, S. Scalable Parallel Data Mining for Association Rules / S. Han, G. Karypis, V. Kumar // IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering. Vol. 12. Issue 3. P. 337–352.
8. IBM Cell Broadband Engine SDK, Version 3.0 documentation.  
URL: [http://www-01.ibm.com/chips/techlib/techlib.nsf/products/IBM\\_SDK\\_for\\_Multi-core\\_Acceleration](http://www-01.ibm.com/chips/techlib/techlib.nsf/products/IBM_SDK_for_Multi-core_Acceleration) (дата обращения: 01.06.2009).
9. Bodon, F. A fast APRIORI implementation // Proceedings of the IEEE ICDM Workshop on Frequent Itemset Mining Implementations (FIMI'03). Vol. 90. Melbourne. 2003.
10. Visualization of Navigation Patterns on a Web Site Using Model Based Clustering. Technical Report MSR-TR-00-18. Microsoft Research. 2000. / I. Cadez, D. Heckerman, C. Meek, et al. URL: <http://research.microsoft.com/pubs/69752/tr-2000-18.pdf> (дата обращения: 13.12.2009).

Кафедра системного программирования,  
Южно-Уральский государственный университет  
kvapen@gmail.com

*Поступила в редакцию 22 марта 2010 г.*

## МАРШРУТЫ С ЛОКАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

*T.A. Панюкова*

## THE PATHS WITH LOCAL RESTRICTIONS

*T.A. Pan'yukova*

В данной работе рассмотрена задача покрытия графа минимальным числом цепей, удовлетворяющих заданным локальным ограничениям. Показана возможность распознавания системы переходов, допускающей линейную сложность задачи построения допустимого пути. Построены алгоритмы отыскания в графе допустимого эйлерова цикла за линейное время, либо, если такого цикла нет, – покрытия графа допустимыми цепями.

*Ключевые слова:* *граф, маршрут, цепь, запрещенный переход, покрытие*

The research is devoted to the problem of graph covering by minimal number of trails corresponding some local restrictions. The opportunity to recognize the transitions system is observed. The problem of allowed path construction has linear complexity. Algorithm of allowed Eulerian cycle construction is also considered. If graph does not have such a cycle then algorithm constructs covering of graph by allowed trails. This algorithm also runs by linear time.

*Keywords:* *graph, path, trail, forbidden transition, covering*

### Введение

Многие задачи нахождения маршрутов, удовлетворяющих определенным ограничениям, появились из конкретных практических ситуаций. В задачах раскроя листового материала плоский граф является моделью раскройного плана, а маршрут, покрывающий все ребра, определяет траекторию режущего инструмента. Ограничением является отсутствие пересечения внутренних граней любой начальной части маршрута с ребрами его оставшейся части [1]. При построении систем управления манипуляторами с помощью неориентированного графа отображают всевозможные элементы траектории манипулятора. При этом возникают проблемы построения маршрутов, удовлетворяющих различным ограничениям, например: прямолинейных маршрутов [2]; маршрутов, в которых следующее ребро определяется заданным циклическим порядком на множестве ребер, инцидентных текущей вершине [3 – 5]; маршрутов, в которых часть ребер следует пройти в заданном порядке [5].

Ограничения на порядок обхода вершин и ребер графа можно классифицировать на локальные, когда следующее ребро в маршруте определяется условиями, заданными в текущей вершине или на текущем ребре [2, 3 – 5, 7, 8] и на глобальные (эйлеровы, гамильтоновы циклы, бинарные двойные обходы и т.д.). Большинство работ посвящено алгоритмам с локальными ограничениями на порядок обхода ребер. В данной работе рассмотрена задача покрытия графа минимальным числом цепей, удовлетворяющих заданным локальным ограничениям.

## 1. Алгоритм построения допустимой цепи

Обобщение большинства частных случаев задачи построения простой цепи с локальными ограничениями и анализ вычислительной сложности данной проблемы даны С.Зейдером [7]. Приведем основные определения и результаты данной работы.

Ограничимся рассмотрением *конечных простых* графов. Множество вершин и множество ребер графа  $G$  будем обозначать соответственно через  $V(G)$  и  $E(G)$ . Для вершины  $v \in V(G)$  определим  $E_G(v)$ , множество всех ребер графа  $G$ , инцидентных вершине  $v$ . Степень вершины  $v$  будем обозначать как  $d(v)$ ; для  $d > 0$  положим  $V_d(G) := \{v \in V(G) | d(v) = d\}$ . Будем писать  $H \leq G$ , если  $H$  – вершинно-индукционный подграф графа  $G$ , т.е. подграф, полученный из графа  $G$  отбрасыванием некоторого множества вершин и всех ребер, инцидентных вершинам этого множества, и только их.

Ограничения на маршруты в графе  $G$  можно сформулировать в терминах графа разрешенных переходов.

**Определение 1.** Пусть  $G$  – граф. Графом переходов  $T_G(v)$  вершины  $v \in V(G)$  будем называть граф, вершинами которого являются ребра, инцидентные вершине  $v$ , т.е.  $V(T_G(v)) = E_G(v)$ , а множество ребер – допустимые переходы.

**Определение 2.** Системой разрешенных переходов (или короче, системой переходов)  $T_G$  будем называть множество  $\{T_G(v) | v \in V(G)\}$ , где  $T_G(v)$  – граф переходов в вершине  $v$ .

**Определение 3.** Путь  $P = v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k$  в графе  $G$  является  $T_G$ -совместимым, если  $e_i, e_{i+1} \in E(T_G(v_i))$  для каждого  $i$  ( $1 \leq i \leq k - 1$ ).

**Теорема 1.** [С. Зейдер]. Если все графы переходов принадлежат либо классу  $M$  полных многодольных графов, либо классу  $P$  паросочетаний, то задача построения  $T_G$ -совместимой цепи является разрешимой за время  $O(|E(G)|)$ . В противном случае данная задача является  $NP$ -полной.

Если система переходов вершины  $v \in V(G)$  является паросочетанием, то задача сводится к задаче для графа

$$G' : V(G') = V(G) \setminus \{v\}, \quad E(G') = (E(G) \setminus E_G(v)) \cup \{\{v_i v_j\} : \{v_i v, v v_j\} \in E(T_G(v))\}.$$

Если для любой вершины  $v \in V(G)$  граф  $T_G(v)$  является полным многодольным графом, то цепь можно построить с помощью следующего алгоритма.

### Алгоритм $T_G$ -СОВМЕСТИМЫЙ ПУТЬ

#### Входные данные:

- график  $G = (V, E)$ ;
- вершины  $x, y$ , между которыми требуется найти цепь без запрещенных переходов;
- система переходов  $T_G$ :  $(\forall v \in V(G)) T_G(v) \in M$ .

#### Выходные данные:

- последовательность ребер, определяющая  $T_G$ -совместимый путь между вершинами  $x$  и  $y$ , либо сообщение об его отсутствии.

**Шаг 1.** Если вершина  $x$  или вершина  $y$  является изолированной, останов: пути нет.

**Шаг 2.** Удалить из графа  $G$  изолированные вершины.

**Шаг 3.** Построить вспомогательный график  $G'$  следующим образом (рис. 1):

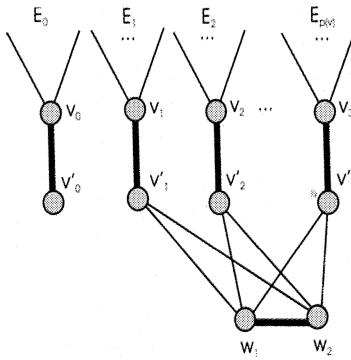


Рис. 1. Иллюстрация построения вспомогательного графа  $G'$

- каждую вершину  $v \in V(G)$  расщепить на вершины  $v_1, v_2, \dots, v_{p(v)}$ , где  $p(v)$  – число долей графа  $T_G(v)$ . Вершине  $v_p$  инцидентны ребра соответствующей доли графа  $T_G(v)$  и одна дополнительная вершина  $v'_{p(v)}$ ;
- добавить две новые вершины  $w_1(v)$  и  $w_2(v)$ , ребро  $w_1(v)w_2(v)$ , и ребро  $v'_{p(v)}w_j(v)$  для каждой доли графа  $T_G(v)$ ,  $1 \leq j \leq 2$ .

**Шаг 4.** Построить первоначальное паросочетание в графе  $G'$

$$M(G') = \bigcup_{v \in V(G)} \left( \bigcup_{p=1,2,\dots,p(v)} \{v_p v'_p\} \bigcup \{w_1(v)w_2(v)\} \right).$$

**Шаг 5.** Искать чередующуюся последовательность между вершинами  $x$  и  $y$ , увеличивающую мощность паросочетания в графе  $G'$ . Если такую последовательность найти не удается – останов (паросочетание  $M(G')$  имеет максимальную мощность, а граф не имеет  $T_G$ -совместимого пути). В противном случае все ребра данного увеличивающего пути за исключением ребер, добавленных при построении графа  $G'$ , образуют  $T_G$ -совместимую цепь между вершинами  $x$  и  $y$ . Останов.

Заметим, что в работе [7] открытым остался вопрос распознавания многодольности графов  $T_G(v)$ , а также проблема построения допустимого маршрута или множества маршрутов, покрывающих все ребра исходного графа.

Покажем на примере графа  $G$ , представленного на рис. 2, что алгоритм  $T_G$ -СОВМЕСТИМЫЙ ПУТЬ не может быть использован для построения маршрутов, покрывающих все ребра графа  $G$ . Допустим для графа задана следующая система переходов  $T_G$ :  $\{\{v_2v_1\}, \{v_1v_5\}\}, \{\{v_6v_1\}, \{v_1v_4\}\}, \{\{v_4v_3\}, \{v_3v_7\}\}, \{\{v_8v_3\}, \{v_3v_2\}\}, \{\{v_3v_2\}, \{v_2v_8\}\}, \{\{v_5v_2\}, \{v_2v_1\}\}, \{\{v_1v_4\}, \{v_4v_6\}\}, \{\{v_7v_4\}, \{v_4v_3\}\}, \{\{v_2v_5\}, \{v_5v_8\}\}, \{\{v_2v_8\}, \{v_8v_5\}\}, \{\{v_3v_8\}, \{v_8v_7\}\}, \{\{v_3v_7\}, \{v_7v_8\}\}, \{\{v_4v_7\}, \{v_7v_6\}\}, \{\{v_4v_6\}, \{v_6v_7\}\}, \{\{v_1v_6\}, \{v_6v_5\}\}, \{\{v_1v_5\}, \{v_5v_6\}\}$ .

Граф  $G'$ , необходимый для нахождения  $T_G$ -совместимого пути между вершинами  $v_1$  и  $v_7$ , построение которого описано на **шаге 3** алгоритма, приведен на рис. 3.

Первоначальное паросочетание  $M(G')$  выделено на рисунке жирными линиями. Для данного паросочетания чередующейся увеличивающей последовательностью ребер является  $\{v_{1,1}v_{5,2}\}, \{v_{5,2}v'_{5,2}\}, \{v'_{5,2}w_{5,2}\}, \{w_{5,2}w_{5,1}\}, \{w_{5,1}v'_{5,1}\}, \{v'_{5,1}v_{5,1}\}, \{v_{5,1}v_{6,2}\}, \{v_{6,2}v'_{6,2}\}, \{v'_{6,2}w_{6,2}\}, \{w_{6,2}w_{6,1}\}, \{w_{6,1}v'_{6,1}\}, \{v'_{6,1}v_{6,1}\}, \{v_{6,1}v_{7,2}\}$ . Ребра этой последовательности, не

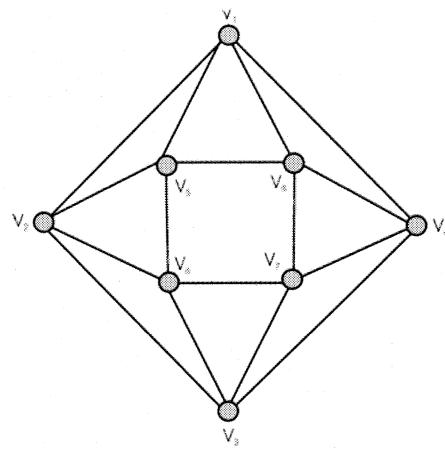


Рис. 2. Пример графа и системы переходов

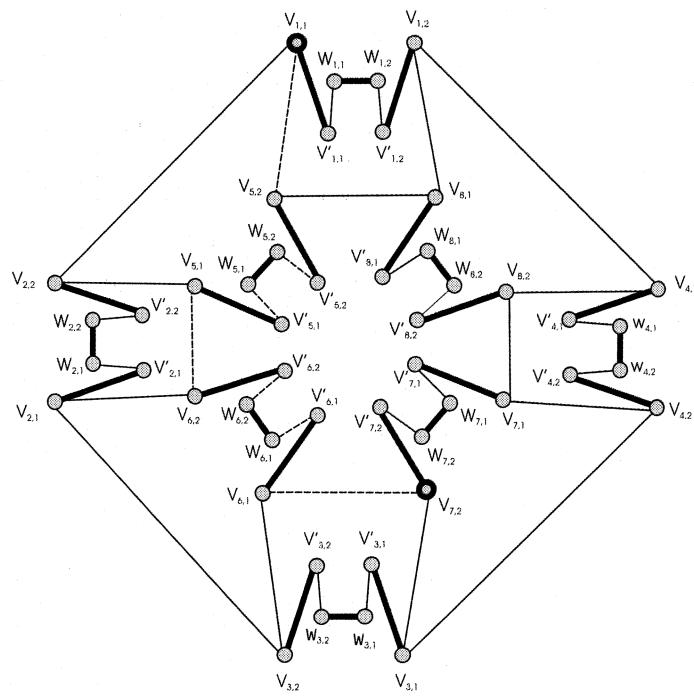


Рис. 3. Граф  $G'$ , полученный с помощью вспомогательных построений из графа  $G$

воведшие в первоначальное паросочетание, изображены пунктирной линией. Эти ребра образуют множество

$$\{v_{1,1}v_{5,2}\}, \quad \{v'_{5,2}w_{5,2}\}, \quad \{w_{5,1}v'_{5,1}\}, \quad \{v_{5,1}v_{6,2}\}, \quad \{w_{6,1}v'_{6,1}\}, \quad \{v_{6,1}v_{7,2}\}.$$

Все ребра данного множества, принадлежащие графу  $G$ , т.е.  $\{v_1v_5\}$ ,  $\{v_5v_6\}$ ,  $\{v_6v_7\}$  образуют  $T_G$ -совместимый путь из вершины  $v_1$  в вершину  $v_7$ .

С помощью алгоритма  **$T_G$ -СОВМЕСТИМЫЙ ПУТЬ** возможно построение только простой цепи между двумя различными вершинами (т.е. цепи, в которых любая вершина встречается ровно один раз).

Однако в общем случае непосредственное применение данного алгоритма не позволяет решить задачу нахождения  $T_G$ -совместимого маршрута, содержащего максимальное число ребер. Действительно, паросочетание максимальной мощности в графе  $G'$  не может содержать пары ребер, образующих запрещенный переход, т.к. они инцидентны одной общей вершине графа  $G'$ . В то же время, в общем случае может существовать  $T_G$ -совместимый маршрут, содержащий такую пару ребер.

Например, в графе  $G$ , приведенном на рис. 2, маршрут

$$\{v_2v_1\}, \{v_1v_4\}, \{v_4v_8\}, \{v_8v_1\}, \{v_1v_5\}, \{v_5v_2\}$$

принципиально не может быть получен с помощью построения паросочетания максимального веса в графе  $G'$ . Этот маршрут начинается с ребра  $v_2v_1$ , а заканчивается ребром  $v_5v_2$ . Эти ребра образуют запрещенный переход  $\{v_5v_2\}, \{v_2v_1\}$ , следовательно, в графе  $G'$  не существует чередующегося пути, содержащего оба эти ребра.

Таким образом, открытym остался вопрос распознавания многодольности графов  $T_G(v)$ , а также проблема построения допустимого маршрута или множества маршрутов, покрывающих все ребра исходного графа.

При разработке алгоритма построения допустимой цепи возник вопрос, можно ли заменить графы переходов некоторой ориентацией исходного графа. В качестве примера рассмотрим граф, представленный на рис. 4(а). Пусть для этого графа заданы следующие допустимые переходы  $\{\{v_2, v_1\}, \{v_1, v_3\}\}, \{\{v_3, v_1\}, \{v_1, v_4\}\}, \{\{v_1, v_4\}, \{v_4, v_2\}\}, \{\{v_1, v_4\}, \{v_4, v_3\}\}, \{\{v_4, v_3\}, \{v_3, v_1\}\}, \{\{v_3, v_2\}, \{v_2, v_1\}\}$ . Попытаемся представить их в виде дуг орграфа, как показано на рис. 4(б).

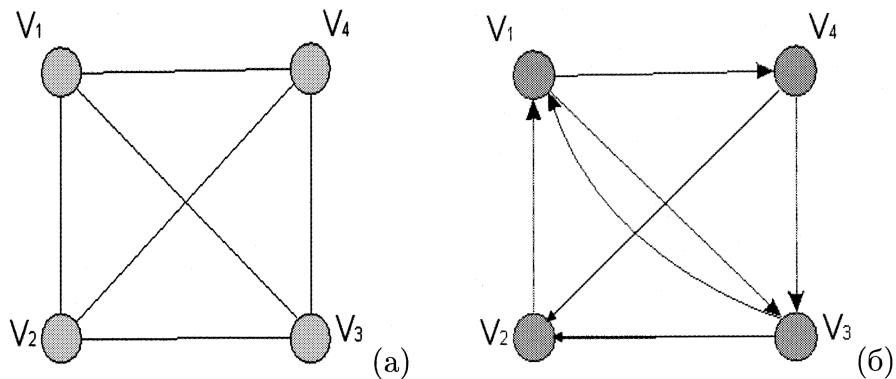


Рис. 4. Пример графа

Заметим, что в построенном орграфе присутствуют и переходы, которые не были заданы системой допустимых переходов (например,  $\{\{v_2, v_1\}, \{v_1, v_4\}\}$ ). Для иллюстрации работы предложенного алгоритма построим вспомогательный граф в соответствии с шагом 3 (рис. 5(а)).

В частности, вершину  $v_1$  нам потребовалось расщепить на две, чтобы показать возможные переходы в ней, как показано на рис. 5(б). Таким образом, представление в виде орграфа не гарантирует существования возможного перехода.

Этот пример показывает, что для нахождения алгоритма построения допустимой цепи невозможно представить систему переходов в виде дуг орграфа, т.е. для каждой вершины необходимо строить соответствующий граф переходов [9].

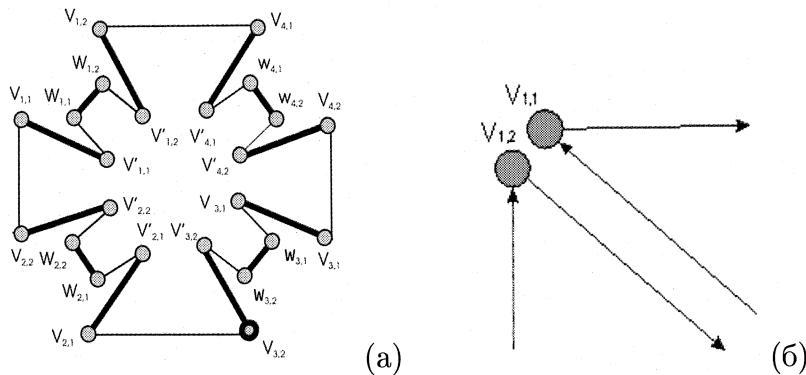


Рис. 5. Расщепленный граф для примера с рис. 4 и возможные переходы для вершины  $v_1$

## 2. Алгоритм построения допустимой цепи

В предыдущем разделе были сформулированы ограничения на допустимость маршрутов в терминах системы разрешенных переходов [7] и показано, что задача построения допустимого пути в графе  $G$  разрешима за полиномиальное время, если система переходов  $T_G$  содержит только паросочетания и полные многодольные графы. Распознавание принадлежности графа разрешенных переходов классу паросочетаний тривиально. Для распознавания принадлежности графа переходов классу полных многодольных графов целесообразно использовать понятие системы разбиения [3]–[5], [8].

Понятие системы разбиения используется для определения допустимой цепи в терминах запрещенных переходов.

**Определение 4.** Пусть дан граф  $G = (V, E)$ . Пусть  $P_G(v)$  – некоторое разбиение множества  $E_G(v)$ . Системой разбиения графа  $G$  будем называть систему множеств  $P_G := \{P_G(v) \mid v \in V(G)\}$ .

**Определение 5.** Пусть  $p \in P_G(v)$ ,  $e, f \in p$ . Цепь, не содержащую переходов  $e \rightarrow v \rightarrow f$  и  $f \rightarrow v \rightarrow e$ , будем называть  $P_G$ -совместимой, а переходы  $e \rightarrow v \rightarrow f$  и  $f \rightarrow v \rightarrow e$  – запрещенными.

Заметим, что граф разрешенных переходов  $T_G(v)$  однозначно определяет граф запрещенных переходов  $\overline{T_G}(v)$ , который является дополнением графа разрешенных переходов до полного графа. Таким образом, с помощью определений 1–3 можно поставить задачу с любым графом разрешенных (запрещенных) переходов.

Напротив, граф разрешенных переходов, определяемый с помощью системы разбиения  $P_G$ , не может быть произвольным, а принадлежит классу  $M$  полных многодольных графов: элементы разбиения  $P_G(v)$  определяют доли графа  $T_G(v) \in M$ , а множество его ребер

$$E(T_G(v)) = \{e, f \in E_G(v) : (\forall p \in P_G(v)) \{e, f\} \not\subseteq p\}.$$

Графом запрещенных переходов  $\overline{T_G}(v)$  в данном случае будет являться набор из  $|P_G(v)|$  клик, этот факт может быть использован для распознавания принадлежности  $T(v) \in M$  с помощью следующего алгоритма.

### Алгоритм РАЗМЕТКА

**Входные данные:** граф переходов  $T_G(v)$ .

**Шаг 1.** Объявить все вершины графа  $T_G(v)$  непомеченными. Положить  $l = 1$ .

**Шаг 2.** Пока список непомеченных вершин не пуст, выполнять шаги 3, 4 и 5. В противном случае – останов: граф  $T_G(v)$  является многодольным и вершины, принадлежащие одному элементу разбиения множества вершин, имеют одинаковые пометки.

**Шаг 3.** Найти некоторую непомеченную вершину  $v$ . Присвоить ей пометку  $l$ .

**Шаг 4.** Применить волновой алгоритм для присваивания пометки  $l$  всем вершинам, достижимым из вершины  $v$  в графе  $\overline{T_G}(v)$ . Очевидно, что все помеченные на данном шаге вершины будут принадлежать одной компоненте связности графа  $\overline{T_G}(v)$ .

**Шаг 5.** Если в выделенной компоненте связности любая пара вершин является смежной, то найденная компонента связности является кликой. Положить  $l = l + 1$  и перейти к выполнению шага 3. В противном случае – останов: граф  $T_G(v)$  не является многодольным.

Оценим сложность приведенного алгоритма. Расстановка пометок в конкретной компоненте связности  $T_k$  составляет величину  $O(|E(T_k)|)$ . Проверка, является ли данная компонента связности кликой, также требует не более  $O(|E(T_k)|)$  операций. Таким образом, сложность алгоритма РАЗМЕТКА равна

$$O\left(\sum_{\forall k} |E(T_k)|\right) = O(|E(T)|).$$

Как было отмечено, алгоритм С. Зейдера в общем случае не позволяет строить допустимые цепи максимальной длины. Особый интерес представляют допустимые эйлеровы цепи. Необходимое и достаточное условие существования  $P_G$ -совместимых цепей дает следующая теорема [8].

**Теорема 2. [А. Коциг].** *Связный эйлеров граф  $G$  имеет  $P_G$ -совместимую эйлерову цепь тогда и только тогда, когда*

$$(\forall v \in V) (\forall p \in P_G(v)) \left( |p| \leq \frac{1}{2}d_G(v) \right).$$

Очевидно, что сложность проверки условия существования  $P_G$ -совместимой эйлеровой цепи не превосходит величины  $O(|E(G)|)$ . Ниже приведен алгоритм построения совместимой цепи.

### Алгоритм $P_G$ -СОВМЕСТИМАЯ ЭЙЛЕРОВА ЦЕПЬ

**Входные данные:**

- эйлеров граф  $G = (V, E)$ ,
- система переходов  $P_G(v) \forall v \in V(G)$ .

**Выходные данные:**

- допустимый эйлеров цикл  $G_{k+1}$ .

**Шаг 1.** Положить  $k = 0$ ,  $G_k = G$ .

**Шаг 2.** Найти вершину  $v$ , у которой  $d_{G_k}(v) > 2$ .

**Шаг 3.** Найти класс  $C_1 \in P_{G_k}(v) : |C_1| = \{\max |C| |C \in P_{G_k}(v)\}$ .

**Шаг 4.** Найти любые ребра  $e_1(v) \in C_1$  и  $e_2(v) \in E_{G_k}(v) - C_1$ . Если множество  $E_{G_k}(v) - C_1 = \emptyset$ , останов:  $P_G$ -совместимой эйлеровой цепи не существует. В противном случае перейти на шаг 5.

**Шаг 5.** Построить граф  $G_{k+1}$ , отщепив от вершины  $v$  вершину  $\hat{v}$ , которой инцидентны только ребра  $e_1$  и  $e_2$ . Остальные ребра оставить инцидентными вершине  $v$ .

**Шаг 6.** Пусть класс  $C_2 \in P_{G_k}(v)$  содержит ребро  $e_2(v)$ . Найти

$$P_{G_k}^-(v) := P_{G_k}(v) - \{C_1, C_2\},$$

$$P'_{G_{k+1}}(v) := \begin{cases} P_{G_k}^-(v) \cup \{C_1 - \{e_1(v)\}, C_2 - \{e_2(v)\}\}, & \text{если } |C_2| > 1, \\ P_{G_k}^-(v) \cup \{C_1 - \{e_1(v)\}\}, & \text{если } |C_1| > |C_2| = 1, \\ P_{G_k}(v), & \text{если } |C_1| = |C_2| = 1, \end{cases}$$

$$P_{G_{k+1}} = \bigcup_{x \in V(G_{1,2})} P'_{G_{k+1}}(x).$$

**Шаг 7.** Определить значение  $\sigma(G_{k+1}) = 2(|E(G_{k+1})| - |V(G_{k+1})|)$ .

**Шаг 8.** Если  $\sigma(G_{k+1}) > 0$ , положить  $k = k + 1$ , перейти на шаг 2, для графа  $G_{k+1}$ . В противном случае – останов: построенный граф  $G_{k+1}$  является эйлеровой цепью, не содержащей запрещенных переходов.

**Теорема 3.** Алгоритм  $P_G$ -СОВМЕСТИМАЯ ЭЙЛЕРОВА ЦЕПЬ корректно решает задачу построения  $P(G)$ -совместимой эйлеровой цепи.

**Доказательство.** Если для некоторого  $k$ , такого что  $C'' \in P'_{G_{k+1}}(v)$ , выполнено неравенство  $|C''| > |C_1 - \{e_1(v)\}|$ , то  $C'' \in P_{G_{k+1}}(v)$  и  $|C_2| \leq |C''| = |C_1| \leq \frac{1}{2}d_{G_k}(v) - 1 = \frac{1}{2}d_{G_{k+1}}(v)$ . На основании этого факта можно заключить, что  $|C| \leq \frac{1}{2}d_{G_{k+1}}(v)$  для каждой вершины  $v \in V(G_{k+1})$  и каждого класса  $C \in P_{G_{k+1}}(v) \subset P_{G_{k+1}}$ . При этом величина  $\sigma(G_{k+1}) = |E(G_{k+1})| - |V(G_{k+1})| < \sigma(G_k)$ . Если граф  $G_{k+1}$  является циклом, то число ребер в нем и число вершин совпадает, т.е. в данном случае  $\sigma(G_{k+1}) = 0$ . Если же граф  $G_{k+1}$  является цепью, то число вершин превышает число ребер на 2, следовательно, в данном случае  $\sigma(G_{k+1}) = -2$ . Если же на некотором этапе для  $e_1(v) \in C_1$  не удалось найти  $e_2(v) \in E_{G_k}(v) - C_1$ , это значит, что  $|C_1| > d(v)/2$ , т.е. не выполнены необходимые и достаточные условия существования эйлерова цикла (теорема Коцига). Из этих фактов следует корректность выполнения алгоритма.  $\square$

Оценим вычислительную сложность предложенного алгоритма. Выполнения шагов 2, 5, 6 и 7 можно организовать с использованием не более  $O(1)$  операций (за счет специальных структур данных). Выполнения же шагов 3 и 4 можно организовать с использованием не более  $O(d_{G_k}(v))$  операций. Цикл алгоритма будет повторен не более, чем  $\sigma(G)$  раз. В итоге имеем, что алгоритм потребует число операций не более

$$O\left(\sum_{k=0,1,\dots,\sigma(G)} d_{G_k}(v_k)\right) = O(|E(G)| \cdot |V(G)|).$$

Таким образом, приведенные алгоритмы разрешимы за полиномиальное время и могут быть легко реализованы с помощью стандартных вычислительных средств.

Рассмотрим задачу покрытия графа допустимыми цепями. Будем считать, что система переходов  $T_G$  содержит только паросочетания и полные многодольные графы.

#### Алгоритм ПОКРЫТИЕ $T_G$ -ДОПУСТИМЫМИ ЦЕПЯМИ

**Входные данные:**

- график  $G = (V, E)$ ,
- графы переходов  $T_G(v) \forall v \in V(G)$ .

**Выходные данные:**

- набор маршрутов  $T^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , покрывающих график  $G$ , где  $m = 2k$  – число вершин нечетной степени.

**Шаг 1.** Пусть  $U = \{v \in V(G) : T_G(v) - \text{паросочетание}\}$ . Сделать редукцию графа  $G$  до графа  $G'$ :

$$V(G') = V(G) \setminus U,$$

$$E(G') = \left( E(G) \setminus \bigcup_{v \in U} E_G(v) \right) \cup \left\{ \bigcup_{v \in U} \{\{v_i v_j\} : \{v_i v, v v_j\} \in T_G(v)\} \right\},$$

графы  $T_G(v)$  редуцировать до графов  $T_{G'}(v)$  заменой всех вхождений вершин  $u \in U$ :  $v u, w u \in E_{T_G}(u)$  вершиной  $w$ .

**Шаг 2.** Достроить граф  $G'$  до  $G^*$  введением дополнительной вершины  $v^*$ , смежной всем вершинам нечетной степени графа  $G'$ . Систему переходов  $T_{G'}(v)$  модифицировать до системы переходов  $T_{G^*}$  введением для всех  $v \in V'(G) : d(v) \equiv 1 \pmod{2}$  в граф переходов  $T_{G^*}(v)$  вершины  $v v^*$ , смежной всем вершинам в графе  $T_{G^*}(v)$ .

**Шаг 3.** Для всех таких вершин  $v \in V(G)$ , что  $\exists p \in P(v) : |p| > d(v)/2$ , ввести  $2|p| - d(v)$  дополнительных ребер  $(v v^*)_i, i = 1, 2, \dots, 2|p| - d(v)$  в граф  $G^*$ . Модифицировать граф переходов  $T_{G^*}(v)$  введением вершин  $(v v^*)_i$ , смежных всем вершинам исходного графа  $T_{G^*}(v)$  и только им.

**Шаг 4.** Найти в  $G^*$   $T_{G^*}$ -совместимый эйлеров цикл  $T^*$ .

**Шаг 5.** Построить покрытие  $T'$  графа  $G'$  цепями, удалив из  $T^*$  ребра  $(v v^*)$ .

**Шаг 6.** Модифицировать маршруты из  $T'$  до маршрутов из  $T$  добавлением вершин  $u \in U$ , удаленных на шаге 1.

**Шаг 7.** Останов.

**Теорема 4.** Алгоритм **ПОКРЫТИЕ  $T_G$ -ДОПУСТИМЫМИ ЦЕПЯМИ** корректно решает задачу минимального покрытия графа  $T_G$ -допустимыми цепями. Его сложность не превосходит величины  $O(|E(G)| \cdot |V(G)|)$ .

*Доказательство.* В результате выполнения шага 1 приходим к задаче для полного многодольного графа  $G'$ . Данное преобразование возможно выполнить, используя не более  $O(|E(G)|)$  операций.

В результате выполнения шага 2 получаем задачу для эйлерова графа, в каждой вершине  $v$  которого граф переходов  $T_{G^*}(v)$  является полным и многодольным. Введенная в граф  $T_{G^*}(v)$  дополнительная вершина  $v v^*$  является отдельным элементом разбиения в  $P_{G^*}(v)$ .

На шаге 3 проверяется выполнение необходимых и достаточных условий существования допустимого эйлерова цикла (теорема Коцига). Во всех вершинах, где условия теоремы Коцига не выполнены, в граф  $G^*$  добавляются мультиребра  $(v v^*)_i, i = 1, 2, \dots, 2|p(v)| - d(v)$ . Также модифицируется и система разбиения  $P_{G^*}(v)$  добавлением элемента разбиения, содержащего все ребра  $(v v^*)_i$ . Такие модификации также выполняются за время, не превосходящее  $O(|V(G)| \cdot |E(G)|)$ .

В результате проведенных модификаций граф  $G^*$  будет эйлеровым, а его система разбиения будет удовлетворять теореме Коцига.

Для построения допустимого эйлерова цикла, содержащего и дополнительные ребра, смежные  $v^*$ , на шаге 4 требуется не более  $O(|V(G)| \cdot |E(G)|)$  операций.

На шаге 5 получим  $l = d(v^*)$  простых цепей удалением ребер, инцидентных вершине  $v^*$ , которые были добавлены на шагах 2 и 3. Все полученные таким образом цепи будут  $P_{G'}$ -допустимыми в графе  $G'$ . Сложность этого этапа составляет величину  $O(|E(G)|)$ .

На шаге 6 происходит добавление удаленных на шаге 1 вершин, что также требует не более чем  $O(|E(G)|)$  операций вставки.

В результате выполненных операций получим покрытие графа  $l + 1$  цепями за время  $O(|V(G)| \cdot |E(G)|)$ . Предположение существования покрытия с меньшим числом цепей приведет к противоречию с теоремой Коцига.  $\square$

## Заключение

Возможно распознавание системы переходов, которая позволяет решить задачу построения допустимого пути за линейное время. В эйлеровом графе  $G$  возможно отыскание  $P_G$ -допустимого эйлерова цикла или установление его отсутствия за время  $O(|V(G)| \cdot |E(G)|)$  с помощью разработанного алгоритма  **$P_G$ -СОВМЕСТИМАЯ ЭЙЛЕРОВА ЦЕПЬ**. Покрытие графа  $G$  допустимыми цепями также возможно за время  $O(|V(G)| \cdot |E(G)|)$  с помощью алгоритма **ПОКРЫТИЕ  $T_G$ -ДОПУСТИМЫМИ ЦЕПЯМИ**.

## Литература

1. Panioukova, T.A. Algorithms for Construction of Ordered Enclosing Traces in Planar Eulerian Graphs / T.A. Panioukova, A.V. Panyukov // The International Workshop on Computer Science and Information Technologies' 2003, Proceedings of Workshop, Ufa, September 16 – 18, 2003/ Ufa State Technical University. – Ufa, 2003. – Vol. 1. – P. 134 – 138.
2. Pisanski, T. Straight-ahead walks in Eulerian graphs / T. Pisanski, T.W. Tucker, A. Zitnik // Discrete Mathematics, 2004. – №. 281. – P. 237 – 246.
3. Фляйшнер, Г. Эйлеровы графы и смежные вопросы / Г. Фляйшнер. – М.: Мир, 2002. – 335 с., ил.
4. Fleischner H. Eulerian Graphs and Related Topics / H. Fleischner. – Part 1, Vol.2 – Ann. Discrete Mathematics, 1991. – № 50.
5. Fleischner, H. Eulerian Graphs / H. Fleischner, L.W. Beineke, R.J. Wilson // Selected Topics in Graph Theory 2, Academic Press, London-NewYork, 1983. – P. 17 – 53.
6. Chebikin, D. On k-edge-ordered graphs / D. Chebikin // Discrete Mathematics, 2004. – № 281. – P. 115 – 128.
7. Szeider, S. Finding Paths in Graphs Avoiding Forbidden Transitions / S. Szeider // Discrete Applied Mathematics, 2003. – № 126. – P. 261 – 273.
8. Kotzig, A. Moves Without Forbidden Transitions in a Graph / A. Kotzig // Mat.-Fiz. Casopis 18, 1968. – № 1. – С. 76 – 80.
9. Панюкова, Т.А. Построение совместимых цепей в графах / Т.А. Панюкова, В.Ф. Мирасов // Проблемы теоретической и прикладной математики: тр. 39-й Регион. молодеж. конф. Екатеринбург, 2008. – С. 38 – 43.

Кафедра «Экономико-математические методы и статистика»  
Южно-Уральский государственный университет  
kwark@mail.ru

Поступила в редакцию 25 декабря 2009 г.

# ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ РЕАКЦИИ И ДИФФУЗИИ В ТРУБЧАТОМ РЕАКТОРЕ

И.А. Плюхина

## PHASE SPACE OF DEGENERATE MODEL OF REACTION AND DIFFUSION IN A TUBE REACTOR

I.A. Plyuhina

Описано фазовое пространство вырожденной линейной модели реакции и диффузии в трубчатом реакторе

*Ключевые слова:* фазовое пространство, уравнения реакции-диффузии, относительно  $p$ -секториальные операторы и вырожденные аналитические полугруппы операторов

Phase space of degenerate linear model of reaction and diffusion in a tube reactor is described

*Keywords:* phase space, reaction-diffusion equations, relatively  $p$ -sectorial operators and degenerate analytical semigroups of operators

### Введение

В 1958 г. А.А. Белоусов опубликовал сообщение о необычной химической реакции окисления лимонной кислоты броматом калия в присутствии катализатора – паров трех- и четырехвалентного церия. Необычность этой реакции заключалась в том, что реагенты вместо того, чтобы прореагировать с образованием нового вещества, создали своего рода «химические часы»: а именно, раствор с реагентами периодически менял цвет с красного на синий и наоборот. Работа Белоусова была продолжена и развита А.М. Жаботинским, который обнаружил возникновение спиральных волн в первоначально однородной химической смеси. К настоящему времени известно множество реакций Белоусова – Жаботинского, которые обычно происходят при  $25^{\circ}\text{C}$  в реакционной смеси, состоящей из бромата калия, маноловой или бромманоловой кислоты и сульфата церия или эквивалентного вещества, растворимого в лимонной кислоте.

Механизм этих реакций, в результате которых возникают упорядоченные временные и (или) пространственные структуры, до конца не изучен до сих пор, однако многое удалось понять, исследуя качественно и численно математические модели в виде так называемых систем уравнений «реакция-диффузия» [1]

$$\begin{cases} v_t = \alpha v_{xx} + f(v, w), \\ w_t = \beta w_{xx} + g(v, w). \end{cases} \quad (0.1)$$

Здесь  $v = v(x, t)$  и  $w = w(x, t)$  – функции, характеризующие концентрации реагентов, вторые производные по  $x$ , согласно закону Фики, характеризуют диффузию реагентов ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$  – коэффициенты диффузии), вектор-функции  $f$  и  $g$  отвечают за взаимодействие реагентов. В результате качественного и численного анализа простейших моделей реакции-диффузии вида (0.1) были обнаружены феномены возникновения временных и пространственных структур.

Качественный анализ систем уравнений (0.1) в предположении, что скорость изменения одной из концентраций существенно превосходит скорость другой, был сделан в [2]. Это предположение приводит к системам уравнений вида

$$\begin{cases} v_t = \alpha v_{xx} + f(v, w), \\ 0 = \beta w_{xx} + g(v, w). \end{cases} \quad (0.2)$$

Нашей целью является изучение фазового пространства линеаризованной системы (0.2) вида

$$\begin{cases} v_t = \alpha v_{xx} + a_{11}v + a_{12}w, \\ 0 = \beta w_{xx} + a_{21}v + a_{22}w, \end{cases} \quad (0.3)$$

заданной на геометрическом графе. Уравнения (0.2), (0.3) в подходящим образом подобранных функциональных пространствах редуцируются к линейному уравнению соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu, \quad (0.4)$$

которое затем исследуется методами теории уравнений соболевского типа и вырожденных полугрупп операторов [3], гл. 3. Эта теория к настоящему времени апробирована в различных аспектах [4, 5], однако к данной ситуации применяется впервые.

Дифференциальные уравнения на графах – сравнительно новая область математического знания. Первая монография в этой области [6] вышла в 2004 году (см. там прекрасный очерк истории вопроса). Первая работа по уравнениям соболевского типа на геометрических графах [7] вышла в 2002 г. Первая диссертация, в которой описаны фазовые пространства линейных и полулинейных уравнений соболевского типа на графах [8], защищена в 2005 г. В данной статье впервые рассмотрены системы дифференциальных уравнений на геометрическом графе.

Статья кроме введения и списка литературы содержит два параграфа. В первом описана редукция уравнений (0.3) на геометрическом графе к уравнению (0.4). Во втором дается описание фазового пространства данного уравнения. Список литературы отражает лишь вкусы и пристрастия автора и не претендует на полноту.

## 1. Постановка задачи

Пусть  $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}; \mathfrak{E})$  – конечный связный ориентированный граф, где  $\mathfrak{V} = \{V_i\}$  – множество вершин, а  $\mathfrak{E} = \{E_j\}$  – множество дуг. Мы предполагаем, что каждая дуга  $E_j$  имеет длину  $l_j > 0$  и площадь поперечного сечения  $d_j > 0$ . Сначала на графике  $\mathbf{G}$  рассмотрим уравнения Штурма – Лиувилля

$$\varphi_{jxx} = \lambda \varphi_j. \quad (1.1)$$

Наша первая цель – изучение решений уравнений (1.1), удовлетворяющих «условию непрерывности» в вершинах графа

$$\begin{aligned} \varphi_j(0, t) = \varphi_k(0, t) = \varphi_m(l_m, t) = \varphi_n(l_n, t); \\ E_j, E_k \in E^\alpha(V_i); \quad E_m, E_n \in E^\omega(V_i) \end{aligned} \quad (1.2)$$

и «условию баланса потоков»

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j \varphi_{jx}(0, t) - \sum_{E_j \in E^\omega(V_i)} d_j \varphi_{jx}(l_j, t) = 0, \quad (1.3)$$

где через  $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$  обозначено множество ребер с началом (концом) в вершине  $V_i$ . Если графике  $\mathbf{G}$  содержит только одно нециклическое ребро (т.е. всего две вершины), то условия

(1.2) отсутствуют, а условия (1.3) превращаются в условия Неймана. Если же это ребро циклическое (т.е. только одна вершина у графа  $\mathbf{G}$ ), то условия (1.2), (1.3) превращаются в условия согласования. Заметим еще, что в контексте условий (1.2) «отсутствовать» не значит «быть равным нулю». Например, если в вершину  $V_i$  все ребра «входят», то первые два равенства в (1.2) именно «отсутствуют», а не «равны нулю».

Введем в рассмотрение множество  $L_2(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots) : g_j \in L_2(0, l_j)\}$ . Множество  $L_2(\mathbf{G})$  является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$\langle g, h \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} g_j h_j dx.$$

Через  $\mathfrak{W}$  обозначим множество  $\mathfrak{W} = \{w = (w_1, w_2, \dots, w_j, \dots) : w_j \in W_2^1(0, l_j)\}$  и выполнено (1.2). Множество  $\mathfrak{W}$  является банаховым пространством с нормой

$$\|w\|_{\mathfrak{W}}^2 = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (w_{jx}^2 + w_j^2) dx.$$

В силу теоремы вложения Соболева пространство  $W_2^1(0, l_j)$  состоит из абсолютно непрерывных функций, а значит пространство  $\mathfrak{W}$  корректно определено, плотно и компактно вложено в  $L_2(\mathbf{G})$ . Отождествим  $L_2(\mathbf{G})$  со своим сопряженным, и через  $\mathfrak{H}$  обозначим сопряженное относительно двойственности  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  пространство к  $\mathfrak{W}$ . Очевидно,  $\mathfrak{H}$  – банахово пространство, причем вложение  $\mathfrak{W} \hookrightarrow \mathfrak{H}$  компактно.

Формулой

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} \varphi_{jx} \psi_{jx} dx$$

определен оператор  $A : \mathfrak{W} \rightarrow \mathfrak{H}$ . Справедлива следующая [9]:

**Теорема 1.** *Оператор  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{W}; \mathfrak{H})$ , причем спектр  $\sigma(A)$  оператора  $A$  дискретен, конечнократен и сгущается только к  $+\infty$ .*

Заметим, что первое собственное значение оператора  $A$  равно нулю, и это значение однократно. Действительно,

$$\langle A\chi, \chi \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} \chi_{jx}^2 dx \geq 0$$

при всех  $\chi \in \mathfrak{W}$  и равно нулю только для таких  $\chi = (\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_j, \dots)$ , что  $\chi_1 = \chi_2 = \dots = \chi_j = \dots = \text{const}$ . Введем в рассмотрение нормированную в смысле  $L_2(\mathbf{G})$  собственную функцию оператора  $A$

$$\chi_1 = \left( \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j l_j \right)^{-1/2} (1, 1, \dots, 1, \dots),$$

отвечающую первому (нулевому) собственному значению. Через  $\{\lambda_k\}_{k=2}^{\infty}$  обозначим семейство собственных значений оператора  $A$ , занумерованное по неубыванию с учетом их кратности; а через  $\{\chi_k\}_{k=2}^{\infty}$  обозначим соответствующие ортонормированные в смысле  $L_2(\mathbf{G})$  собственные функции.

Теперь на графе  $\mathbf{G}$  рассмотрим системы уравнений

$$\begin{cases} v_{jt} = \alpha v_{jxx} + a_{11}v_j + a_{12}w_j, \\ 0 = \beta w_{jxx} + a_{21}v_j + a_{22}w_j, \end{cases} \quad (1.4)$$

причем каждая функция  $v_j$  и  $w_j$  удовлетворяет условиям (1.2), (1.3). Чтобы редуцировать (1.2) – (1.4) к уравнению (0.4), зададим пространства  $\mathfrak{U} = L_2(\mathbf{G}) \times L_2(\mathbf{G})$ ,  $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$  и определим операторы

$$\begin{aligned} [Lu, \zeta] &= \langle v, \xi \rangle, \\ [Mu, \zeta] &= \langle (-\alpha A + a_{11})v + a_{12}w, \xi \rangle + \langle (-\beta A + a_{22})w + a_{21}v, \eta \rangle. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь  $u = (v, w)$ ,  $\zeta = (\xi, \eta)$ ,  $u, \zeta \in \mathfrak{W} \times \mathfrak{W}$ , а  $[ \cdot, \cdot ]$  – скалярное произведение в  $\mathfrak{U}$ , т.е.

$$[u, \zeta] = \langle v, \xi \rangle + \langle w, \eta \rangle.$$

**Теорема 2.** Оператор  $L \in \mathcal{L}(0\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ ,  $\ker L = \{0\} \times \mathfrak{H}$ ,  $\text{im } L = \mathfrak{H} \times \{0\}$ , а оператор  $M \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ ,  $\text{dom } M = \mathfrak{W} \times \mathfrak{W}$ .

*Доказательство.* Непрерывность оператора  $L$ , а также утверждения о его ядре и образе очевидны. Замкнутость и плотная определенность оператора  $M$  вытекает из непрерывности оператора  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{W}, \mathfrak{H})$  (теорема 1), а также плотности и непрерывности вложения  $\text{dom } M \hookrightarrow \mathfrak{U}$ .  $\square$

## 2. Фазовое пространство

Поиски фазового пространства начнем с вычисления  $L$ -спектра оператора  $M$ , где операторы  $L$  и  $M$  определены выше. Итак,

$$\sigma^L(M) = \{\mu_k = a_{11} - \alpha\lambda_k + a_{12}a_{21}(\beta\lambda_k - a_{22})^{-1}, k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \beta\lambda_l = a_{22}\}\}.$$

В силу теоремы 1 справедлива

**Лемма 1.** При любых  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ,  $\beta, a_{kl} \in \mathbb{R}$ ,  $k, l = 1, 2$ ,  $L$ -спектр  $\sigma^L(M)$  оператора  $M$  дискретен, конечнократен и сгущается только  $\kappa = \infty$ .

Найдем  $L$ -резольвенту оператора  $M$ ,

$$\begin{aligned} (\mu L - M)^{-1} &= \sum_{k=1}^{\infty} [\mu(\beta\lambda_k - a_{22}) + (\alpha\lambda_k - a_{11})(\beta\lambda_k - a_{22}) - a_{12}a_{21}]^{-1} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \beta\lambda_k - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & \mu + \alpha\lambda_k - a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \cdot, \chi_k \rangle \chi_k \\ \langle \cdot, \chi_k \rangle \chi_k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Теперь, используя понятия и методы [3], гл. 3, получим следующий результат

**Лемма 2.** При любых  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $a_{kl} \in \mathbb{R}$ ,  $k, l = 1, 2$  таких, что  $\beta^{-1}a_{22} \notin \sigma(A)$  и  $a_{21} \neq 0$ , оператор  $M$  сильно  $(L, 0)$ -секториален, причем пространства  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{F}$  расщепляются в прямые суммы  $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$  и  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$ , где

$$\mathfrak{U}^0 = \{0\} \times L_2(\mathbf{G}), \quad \mathfrak{F}^1 = \mathfrak{H} \times \{0\},$$

$$\mathfrak{U}^1 = \{u \in \mathfrak{U} : u = \text{col}(a_{21}^{-1}(\beta A - a_{22})\varphi, \varphi) \in \mathfrak{W}\},$$

$$\mathfrak{F}^0 = \{f \in \mathfrak{F} : f = \text{col}(a_{12}\varphi, (a_{22} - \beta A)\varphi) \in \mathfrak{W}\}.$$

Итак, в силу определения фазового пространства (см. [3], гл. 3) справедлива

**Теорема 3.** *При любых  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ,  $\beta$ ,  $a_{kl} \in \mathbb{R}$ ,  $k, l = 1, 2$ , таких, что  $\beta^{-1}a_{22} \notin \sigma(A)$  и  $a_{21} \neq 0$  фазовым пространством уравнений (1.4), (1.2), (1.3) служит подпространство  $\mathfrak{U}^1$ .*

*В заключение автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю признательность проф. Г.А. Свиридову за постановку задачи и обсуждение результатов.*

## Литература

1. Пригожин, И. От существующего к возникающему / И. Пригожин. – М: URSS, 2006.
2. Бокарева, Т.А. Сборки Уитни фазовых пространств некоторых полулинейных уравнений типа Соболева / Т.А. Бокарева, Г.А. Свиридов // Матем. заметки. – 1994. – Т. 5, № 3. – С. 3 – 10.
3. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2003.
4. Замышляева, А.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа / А.А. Замышляева // Вычислите. технологии. – 2003. – Т. 8, № 4. – С. 45 – 54.
5. Загребина, С.А. О задаче Шоултера – Сидорова / С.А. Загребина // Изв. вузов. Математика – 2007. – № 3. – С. 22 – 28.
6. Покорный, Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев. – М.: Физматлит, 2004.
7. Свиридов, Г.А. Уравнения соболевского типа на графах / Г.А. Свиридов // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск, 2002. – С. 221 – 225.
8. Шеметова, В.В. Исследование одного класса уравнений соболевского типа на графах: дис. ... канд. физ.-мат. наук/ В.В. Шеметова. – Магнитогорск: Магнитогорск: Магнитогорск: МГУ, 2005. – 109 с.
9. Баязитова, А.А. Обобщенная задача Штурма – Лиувилля на графе / А.А. Баязитова // Воронеж. зим. мат. школа С.Г. Крейна - 2010: тез. докл. Воронеж, 2010. – С. 18 – 19.

Кафедра уравнений математической физики,  
Южно-Уральский государственный университет  
polovinochka\_88@mail.ru

*Поступила в редакцию 17 февраля 2010 г.*

# О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ СТЕПЕНИ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

A.I. Седов

## ABOUT THE APPROXIMATE SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM OF THE SPECTRAL ANALYSIS FOR LAPLACE OPERATOR

A.I. Sedov

Приведены достаточные условия, налагаемые на последовательность комплексных чисел, для которой существует возмущенный оператор Лапласа такой, что его спектр совпадает с данной последовательностью. Приводится алгоритм приближенного нахождения возмущающего оператора.

*Ключевые слова:* оператор Лапласа, ядерный оператор, спектр, след, возмущение, собственные числа

We give the sufficient conditions imposed on a sequence of complex numbers for which there exists such pertubated Laplace operator, that its spectrum is equal to the given sequence. The algorithm for the approximate finding of the perturbation operator is given.

*Keywords:* Laplace operator, operator of trace class, spectrum, trace, perturbation, eigenvalue

## Введение

Известно много различных результатов, относящихся к обратной задаче спектрального анализа (см. например [1]) для обыкновенных дифференциальных операторов. Для операторов с частными производными результатов значительно меньше. В основном рассматривается степень оператора Лапласа, поскольку резольвента оператора Лапласа не ядерная. Так, в работах [2 – 7] решена обратная задача для степени оператора Лапласа больше 2 на прямоугольнике. В работах [8, 9] поставленная задача решена для степени больше 3/2. В работе [10] – для степени равной 1. В [11] рассмотрена не прямоугольная область. Во всех перечисленных работах [2 – 11] на возмущающий оператор накладывались условия малости. В представленной работе этот существенный недостаток устранен. Кроме того, впервые предлагается алгоритм приближенного нахождения решения обратной задачи.

## 1. Постановка задачи

Пусть  $\Pi$  – прямоугольник со сторонами  $a$  и  $b$ ,  $\frac{a^2}{b^2}$  – иррациональное. Рассмотрим самосопряженный неотрицательный оператор  $T_0$ , порожденный краевой задачей Дирихле:

$$-\Delta v = \lambda v, \quad v|_{\partial\Pi} = 0,$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа.

Введем оператор  $T = \int_0^\infty \lambda^\beta dE(\lambda)$ , где  $E(\lambda)$  — спектральное разложение единицы оператора  $T_0$ ,  $\beta > 3/2$ ,  $\lambda^\beta > 0$  при  $\lambda > 0$ . Известно, что собственным числам  $\lambda_{kl} = \left( \frac{\pi^2 k^2}{a^2} + \frac{\pi^2 l^2}{b^2} \right)^\beta$  оператора  $T$  соответствуют ортонормированные в  $L_2(\Pi)$  собственные функции  $v_{kl}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\left(\frac{\pi kx}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi ly}{b}\right)$ ;  $k, l \in \mathbb{N}$ .

Пусть  $P$  — оператор умножения на функцию  $p \in L_2(\Pi) = H$ , вещественность  $p$  не предполагается. Эту функцию часто называют потенциалом,  $\text{dom } P = \{p : p \in L_2, (T+P)y \in L_2\}$ , где  $y \in L_2$ . Обозначим через  $\mu_{kl}$  собственные числа оператора  $T + P$ , занумерованные в порядке возрастания действительных частей с учетом алгебраической кратности, а через  $u_{kl}$  — соответствующие ортонормированные в  $H = L_2(\Pi)$  собственные функции.

Поскольку  $a^2/b^2$  иррациональное число, то спектр  $\sigma(T)$  оператора  $T$  однократный. Для удобства будем нумеровать упорядоченные по возрастанию собственные числа и связанные с ними спектральные объекты одним натуральным индексом.

Обозначим  $\Pi_4 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a \cdot 2^{-1}, 0 \leq y \leq b \cdot 2^{-1}\}$  — вспомогательный прямоугольник и введем полную ортонормированную в  $L_2(\Pi_4)$  систему функций  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $\varphi_n(x, y) = \varphi_{kl}(x, y) = \frac{4}{\sqrt{ab}} \cos \frac{2\pi kx}{a} \cos \frac{2\pi ly}{b}$ , где  $\lambda_n = \left( \frac{\pi^2 k^2}{a^2} + \frac{\pi^2 l^2}{b^2} \right)^\beta$ ,  $k, l = \overline{1, \infty}$ .

Рассмотрим следующую обратную задачу спектрального анализа: *построить ряд  $\sum_n |\lambda_n - \xi_n|$  сходится. Для последовательности  $\{\xi_n\}$  требуется доказать существование такого оператора  $T + P$ , что его спектр  $\sigma(T + P) = \{\mu_n\}$  совпадает с данной последовательностью  $\{\xi_n\}$ .*

## 2. Основные утверждения

Введем следующие обозначения:  $r_n = \frac{1}{2} \min\{\lambda_{n+1} - \lambda_n; \lambda_n - \lambda_{n-1}\}$ ,  $\gamma_n = \{\lambda : |\lambda_n - \lambda| = r_n\}$ ,  $\Gamma_n = \{\lambda : |\lambda| = \lambda_n\}$ ,  $\Omega_n = \{\lambda : |\lambda_n - \lambda| \geq r_n\}$ ,  $\Omega_N = \bigcap_{n=N}^\infty \Omega_n$ ,  $R_0(\lambda) = (T - \lambda E)^{-1}$ ,  $R(\lambda) = (T + P - \lambda E)^{-1}$ ;  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  — ядерная норма и норма Гильберта–Шмидта соответственно.

**Лемма 1.** [11] При  $n \gg 1$ ,  $\beta > 3/2$ , имеет место оценка:

$$\|R_0(\lambda)\|_2^2 \leq \|R_0(\lambda)\|^2 + \frac{1}{r_n^2} \left( 2 + \frac{\beta C}{2} + \frac{1}{C^{1/\beta}} \right), \quad \lambda \in \gamma_n.$$

**Следствие 1.** [11] При  $\beta > 3/2$  ряд  $\sum_n r_n^2 \left( \max_{\lambda \in \gamma_n} \|R_0(\lambda)\|_2 \right)^4$  сходится.

**Лемма 2.** [11] Существует  $N \in \mathbb{N}$  такое, что

- 1) для любых  $n \leq N$  все собственные числа  $\lambda_n$  и  $\mu_n$  будут находиться внутри контура  $\Gamma_N$ ,
- 2) для любых  $n > N$  внутри контуров  $\gamma_n$  будут находиться ровно по одному  $\lambda_n$  и  $\mu_n$ .

Рассмотрим операторное тождество

$$R(\lambda) = R_0(\lambda) - R_0(\lambda) P R_0(\lambda) + R(\lambda) (P R_0(\lambda))^2, \quad \lambda \in \Omega_N.$$

Умножим его на  $\frac{\lambda}{2\pi i}$ , проинтегрируем по контуру  $\gamma_n$  и найдем след. В итоге получим:

$$\mu_n = \lambda_n + (Pv_n, v_n) + \alpha_n(p), \quad n > N,$$

где

$$\alpha_n(p) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \lambda \operatorname{Sp} [R(\lambda)(PR_0(\lambda))^2] d\lambda.$$

Аналогично, умножая на  $\frac{\lambda^q}{2\pi i}$  и интегрируя по  $\Gamma_N$ , получим

$$\sum_{n=1}^N \mu_n^q = \sum_{n=1}^N \lambda_n^q + \sum_{n=1}^N q \lambda_n^{q-1} (Pv_n, v_n) + \alpha_q(p), \quad q \leq N, \quad (1)$$

где

$$\alpha_q(p) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} \lambda^q \operatorname{Sp} [R(\lambda)(PR_0(\lambda))^2] d\lambda.$$

Можно показать, что оператор  $R(\lambda)$  ядерный, и для него справедливо разложение в сходящийся по норме ряд

$$R(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k R_0(\lambda)(PR_0(\lambda))^k, \quad \lambda \in \Omega_N. \quad (2)$$

Подставим ряд (2) в  $\alpha_n$ . Получим  $\alpha_n(p) = \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_n^{(k)}(p)$ , где

$$\alpha_q^{(k)}(p) = -\frac{(-1)^k}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} \lambda^q \operatorname{Sp} [R_0(\lambda)(PR_0(\lambda))^k] d\lambda, \quad q \leq N,$$

$$\alpha_n^{(k)}(p) = -\frac{(-1)^k}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \lambda \operatorname{Sp} [R_0(\lambda)(PR_0(\lambda))^k] d\lambda, \quad n > N.$$

Интегрируя по частям, легко получить следующую формулу:

$$\operatorname{Sp} \int_{\gamma_n} g(\lambda) R_0(\lambda)(PR_0(\lambda))^k d\lambda = \frac{-1}{k} \operatorname{Sp} \int_{\gamma_n} g'(\lambda)(PR_0(\lambda))^k d\lambda.$$

Отсюда получаем

$$\alpha_q^{(k)}(p) = \frac{(-1)^k q}{2\pi i k} \int_{\Gamma_N} \lambda^{q-1} \operatorname{Sp} [(PR_0(\lambda))^k] d\lambda, \quad q \leq N,$$

$$\alpha_n^{(k)}(p) = \frac{(-1)^k}{2\pi i k} \int_{\gamma_n} \operatorname{Sp} [(PR_0(\lambda))^k] d\lambda, \quad n > N.$$

Запишем (1) в матричном виде.  $WV = M$ , где

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{N-1} & \lambda_2^{N-1} & \dots & \lambda_N^{N-1} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} (Pv_1, v_1) \\ (Pv_2, v_2) \\ \dots \\ (Pv_N, v_N) \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_N \end{pmatrix},$$

$m_q = \frac{1}{q} \left[ \sum_{n=1}^N (\mu_n^q - \lambda_n^q) - \alpha_N^{(q)}(p) \right]$ . Определитель Вандермонда  $|W| \neq 0$ , поэтому матрица  $W$  обратима, и  $V = W^{-1}M$ . Обозначим через  $w_{nq}^-$  элементы обратной матрицы  $W^{-1}$ .

Таким образом, получаем  $(Pv_n, v_n) = \sum_{q=1}^N w_{nq}^- m_q$ ,  $n \leq N$ .

**Лемма 3.** Если функция  $p$  удовлетворяет условиям:

- (i)  $p(x, b - y) = p(x, y) = p(a - x, y)$ , для почти всех  $(x, y) \in \Pi$ ,
- (ii)  $(p, \varphi_{0k})_{L_2(\Pi)} = (p, \varphi_{k0})_{L_2(\Pi)} = 0$ ,  $k = \overline{0, \infty}$ , то

$$(Pv_n, v_n)_{L_2(\Pi)} = \frac{1}{\sqrt{ab}}(p, \varphi_n)_{L_2(\Pi_4)}.$$

Пусть  $r = \min\{\|P_1\|, \|P_2\|\}$ . Оценим разности  $|\alpha_n(p_1) - \alpha_n(p_2)|$  при  $n > N$ .

$$\begin{aligned} |\alpha_n^{(k)}(p_1) - \alpha_n^{(k)}(p_2)| &= \frac{1}{2\pi k} \left| \int_{\gamma_n} \text{Sp} \left[ (P_1 R_0(\lambda))^k - (P_2 R_0(\lambda))^k \right] d\lambda \right| \leq \\ &\leq \frac{r_n}{k} \max_{\lambda \in \gamma_n} \left\| (P_1 R_0(\lambda))^k - (P_2 R_0(\lambda))^k \right\|_1 \leq \\ &\leq \frac{r_n}{k} \max_{\lambda \in \gamma_n} \left\| \sum_{s=0}^{k-1} (P_2 R_0(\lambda))^s (P_1 - P_2) R_0(\lambda) (P_1 R_0(\lambda))^{k-s-1} \right\|_1 = \\ &= \frac{r_n}{k} \max_{\lambda \in \gamma_n} \left( \sum_{s=0}^{k-1} \|P_1 - P_2\| r^{k-1} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \|R_0(\lambda)\|^{k-2} \right) = \\ &= r_n \|P_1 - P_2\| r^{k-1} \max_{\lambda \in \gamma_n} (\|R_0(\lambda)\|_2^2 \|R_0(\lambda)\|^{k-2}). \end{aligned}$$

Далее оценим модуль разности:

$$\begin{aligned} |\alpha_n(p_1) - \alpha_n(p_2)| &\leq r_n r \|P_1 - P_2\| \max_{\lambda \in \gamma_n} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \sum_{k=0}^{\infty} r^k \max_{\lambda \in \gamma_n} \|R_0(\lambda)\|^k \leq \\ &\leq \|P_1 - P_2\| \max_{\lambda \in \gamma_n} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \frac{rr_n}{1 - r/r_n}. \end{aligned}$$

Аналогично, при  $q \leq N$  получаем

$$|\alpha_q(p_1) - \alpha_q(p_2)| \leq \|P_1 - P_2\| \max_{\lambda \in \Gamma_N} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \frac{qr r_N^q}{1 - r/r_N}.$$

### 3. Существование

**Теорема 1.** Если для последовательности  $\{\xi_n\}$  найдется  $N \in \mathbb{N}$  такое, что выполняется неравенство

$$\sum_{n=1}^N \left| \sum_{q=1}^N \frac{w_{nq}^-}{q} \sum_{s=1}^N (\xi_s^q - \lambda_s^q) \right|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} |\xi_n - \lambda_n|^2 \leq r_N^2 w^2 ab,$$

где  $w \in (0, 1)$ , то существует оператор  $P$  такой, что спектр  $\sigma(T + P)$  совпадает с последовательностью  $\{\xi_n\}$ .

*Доказательство.* В пространстве  $H_1 = L_2(\Pi_4)$  рассмотрим уравнение относительно  $p$ :

$$p = \alpha_0 - \alpha(p),$$

где

$$\alpha_0 = \sum_{n=1}^N \sum_{q=1}^N \frac{w_{nq}^-}{q} \sum_{s=1}^N (\xi_s^q - \lambda_s^q) \varphi_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} (\xi_n - \lambda_n) \varphi_n,$$

$$\alpha(p) = \sum_{n=1}^N \sum_{q=1}^N \frac{w_{nq}^-}{q} \alpha_q(p) \varphi_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n(p) \varphi_n.$$

Введем оператор  $A : H_1 \rightarrow H_1$ :

$$Ap = \alpha_0 - \alpha(p).$$

Найдем

$$\begin{aligned} \|\alpha(p_1) - \alpha(p_2)\|_{H_1}^2 &\leq \sum_{n=1}^N \left[ \sum_{q=1}^N |w_{nq}^-| \|P_1 - P_2\| \max_{\lambda \in \Gamma_N} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \frac{rr_N^q}{1-r/r_N} \right]^2 + \\ &\quad \sum_{n=N+1}^{\infty} \left[ \|P_1 - P_2\| \max_{\lambda \in \gamma_n} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \frac{rr_n}{1-r/r_n} \right]^2 = \\ r^2 \|P_1 - P_2\|^2 &\left\{ \left[ \max_{\lambda \in \Gamma_N} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \frac{1}{1-r/r_N} \right]^2 \sum_{n=1}^N \left[ \sum_{q=1}^N |w_{nq}^-| r_N^q \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. \sum_{n=N+1}^{\infty} \max_{\lambda \in \gamma_n} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \frac{r_n}{1-r/r_n} \right\} = \|p_1 - p_2\|_{H_1}^2 \omega^2, \end{aligned}$$

где

$$\omega^2 = \frac{4r^2}{ab} \{ \dots \}.$$

Выберем  $r$  таким, чтобы выполнялось неравенство  $\omega < 1$ . Тогда  $\alpha$  — оператор сжатия.

Положим  $R = \min\{r, r_N \sqrt{ab}(1-w)\}$ . Так как оператор  $\alpha_0$  является вполне непрерывным, то по комбинированному принципу уравнение в шаре  $U(\alpha_0, R) \subset H_1$  будет иметь решение. Отметим, что комбинированный принцип не гарантирует единственности решения.

Пусть  $p$  — решение уравнения,  $P$  — оператор умножения на функцию  $p$ ,  $\sigma(T+P) = \{\mu_n\}$  спектр найденного оператора. Из построения уравнения очевидно, что последовательности  $\{\mu_n\}$  и  $\{\xi_n\}$  совпадают.  $\square$

#### 4. Приближенное решение

Приближенное решение будем находить методом последовательных приближений. Выберем  $M$  первых собственных чисел из последовательности  $\{\lambda_n\}_{n=1}^M$ . Число выбираем произвольно, чем оно больше, тем точнее будет найдено приближенное решение. Далее, вместо рядов  $\alpha_0$  и  $\alpha(p)$ , а также всех других рядов, встречающихся при вычислениях, будем писать суммы до  $M$ .

1. Положим  $p_0 \equiv 0$ .

2.  $p_1 = \alpha_0 - \alpha(p_0) = \alpha_0$ .

3.  $p_{j+1} = \alpha_0 - \alpha(p_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots$

4. Найдем каким-либо способом, например, описанным в [12], спектр  $\sigma(T + P_j) = \{\mu_n^j\}$ .

Получим множество  $\{\sigma(T + P_j)\}_{j=1}^K$ , где  $K$  большое число. При увеличении  $K$  будет нарастать вычислительная погрешность.

Вычислительный процесс остановим, когда  $\sum_{n=1}^M |\mu_n^j - \xi_n|$  будет наименьшая. Найденное  $p_j$  будем считать приближенным решением обратной задачи.

## Литература

1. Юрко, В.А. Обратные спектральные задачи и их приложения / В.А. Юрко. – Саратов: Изд-во СГПИ, 2001.
2. Дубровский, В.В. К обратной задаче для оператора Лапласа с непрерывным потенциалом / В.В. Дубровский, А.В. Нагорный // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, № 9. – С. 1563 – 1567.
3. Дубровский, В.В. Устойчивость решения обратных задач спектрального анализа / В.В. Дубровский, А.В. Нагорный // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, № 5. – С. 839 – 843.
4. Дубровский, В.В. Обратная задача для степени оператора Лапласа с потенциалом из  $L^2$  / В.В. Дубровский, А.В. Нагорный // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, № 9. – С. 1552 – 1561.
5. Дубровский, В.В. Теорема существования в обратной задаче спектрального анализа / В.В. Дубровский // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 12. – С. 1702 – 1703.
6. Дубровский, В.В. Теорема о существовании решения обратной задачи спектрального анализа для степени оператора Лапласа / В.В. Дубровский, А.С., Великих // Электромагнитные волны и электронные системы. – 1998. – Т. 3, № 5. – С. 6 – 9.
7. Дубровский, В.В. Обратная задача спектрального анализа и интерполяция по Л. Карлесону / В.В. Дубровский // Математические заметки. – 2001. – Т. 70, вып. 3. – С. 468 – 471.
8. Садовничий, В.А. Об обратной задаче спектрального анализа для степени оператора Лапласа с потенциалом / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский, Е.А. Пузанкова // ДАН. – 1999. – Т. 367, № 3. – С. 307 – 309.
9. Садовничий, В.А. Обратная задача спектрального анализа для степени оператора Лапласа на прямоугольнике / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский, Е.А. Пузанкова // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 12. – С. 1695 – 1698.
10. Седов, А.И. Обратная задача спектрального анализа для одного дифференциального оператора в частных производных с неядерной резольвентой / А.И. Седов, В.В. Дубровский (мл.) // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2005. – Т. 10, № 1–2. – С. 1 – 8.
11. Седов, А.И. Обратная задача спектрального анализа для степени оператора Лапласа на равнобедренном прямоугольном треугольнике / А.И. Седов, Г.А. Закирова // Вестн. СамГУ. Естественно-науч. сер. – 2008. – № 2. – С. 34 – 42.
12. Вычисление первых собственных чисел дискретного оператора / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский, С.И. Кадченко, В.Ф. Кравченко // Электромагнитные волны и электронные системы. – 1998. – Т. 3, № 2. – С. 6 – 8.

Кафедра математических методов в экономике,  
Магнитогорский государственный университет  
sedov-ai@yandex.ru

Поступила в редакцию 13 марта 2010 г.

# НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ХОФФА НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

*Н.П. Семенова*

## THE INITIAL-FINITE PROBLEM FOR HOFF'S EQUATIONS ON GEOMETRICAL GRAPH

*N.P. Semenova*

Статья посвящена исследованию однозначной разрешимости начально-конечной задачи для уравнения Хоффа на конечном связном ориентированном графе.

*Ключевые слова:* *уравнение Хоффа, начально-конечная задача, относительно p-ограниченные операторы, конечный связный ориентированный граф*

The article is devoted to the study of unique solvability of initial-finite problem for Hoff's equations on a finite connected oriented graph.

*Keywords:* *Hoff's equation, initial-finite problem, relatively p-bounded operators, finite connected oriented graph*

Пусть  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{F}$  — банаховы пространства, операторы  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$  (т.е. линеен и непрерывен) и  $M \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$  (т.е. линеен замкнут и плотно определен). Введем в рассмотрение  $L$ -резольвентное множество  $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})\}$  и  $L$ -спектр  $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$  оператора  $M$  [1].

**Теорема 1.** [1] Пусть оператор  $M$  ( $L, p$ )-ограничен. Тогда существуют проекторы  $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$  и  $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$  такие, что  $L \in \mathcal{L}(\ker P; \ker Q) \cap \mathcal{L}(\text{im } P; \text{im } Q)$  и  $M \in \mathcal{Cl}(\ker P; \ker Q) \cap \mathcal{Cl}(\text{im } P; \text{im } Q)$ .

Положим  $\mathfrak{U}^0 = \ker P$ ,  $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$ ,  $\mathfrak{U}^1 = \text{im } P$ ,  $\mathfrak{F}^1 = \text{im } Q$ . Тогда  $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$ ,  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$ . Через  $L_0(M_0)$  обозначим сужение оператора  $L(M)$  на  $\mathfrak{U}^0$ , ( $\text{dom } M_0 = \text{dom } M \cap \mathfrak{U}^0$ ).

**Теорема 2.** [2] Пусть  $\sigma^L(M) = \sigma_{in}^L(M) \cup \sigma_{ex}^L(M)$ , причем  $\sigma_{in}^L(M)$  содержится в ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{C}$  с кусочно гладкой границей  $\partial\Omega$  и  $\partial\Omega \cap \sigma^L(M) = \emptyset$ . Тогда существуют проекторы  $P_{in} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$  и  $Q_{in} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$  такие, что операторы  $L \in \mathcal{L}(\ker P_{in}; \ker Q_{in}) \cap \mathcal{L}(\text{im } P_{in}; \text{im } Q_{in})$  и  $M \in \mathcal{Cl}(\ker P_{in}; \ker Q_{in}) \cap \mathcal{Cl}(\text{im } P_{in}; \text{im } Q_{in})$ .

Проекторы  $P_{in}$  и  $Q_{in}$  имеют вид  $P_{in} = (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) d\mu$ ,  $Q_{in} = (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) d\mu$ , где контур  $\gamma = \partial\Omega$ .

**Следствие 1.** Пусть выполнены условия теорем (1) и (2). Тогда  $P_{in}P = PP_{in} = P_{in}$  и  $Q_{in}Q = QQ_{in} = Q_{in}$ .

Положим  $P_{ex} = P - P_{in}$ , в силу следствия (1)  $P_{ex} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$  — проекtor. Возьмем  $T \in \mathbb{R}_+$ ,  $u_0$ ,  $u_T \in \mathfrak{U}$  и рассмотрим задачу

$$P_{ex}(u(0) - u_0) = 0, \quad P_{in}(u(T) - u_T) = 0 \quad (1)$$

для линейного уравнения соболевского типа

$$Lu = Mu + f. \quad (2)$$

Вектор-функцию  $u \in C^1((0, T); \mathfrak{U}) \cap C([0, T]; \mathfrak{U})$ , удовлетворяющую уравнению (2), назовем его *решением*; решение  $u = u(t)$  уравнения (2) назовем *решением задачи (1), (2)*, если  $\lim_{t \rightarrow 0+} P_{ex}(u(t) - u_0) = 0$  и  $\lim_{t \rightarrow T-} P_{in}(u(t) - u_T) = 0$ .

Положим  $\text{im } P_{in(ex)} = \mathfrak{U}_{in(ex)}^1$ ,  $\text{im } Q_{in(ex)} = \mathfrak{F}_{in(ex)}^1$ . По построению  $\mathfrak{U}_{in} \oplus \mathfrak{U}_{ex} = \mathfrak{U}^1$  и  $\mathfrak{F}_{in} \oplus \mathfrak{F}_{ex} = \mathfrak{F}^1$ .

**Теорема 3.** Пусть оператор  $M$   $(L, p)$ -ограничен и выполнены условия теоремы 2. Тогда для любых  $u_0, u_T \in \mathfrak{U}$  и вектор-функции  $f = f(t), t \in [0, T]$ , такой, что  $f^0 \in C^p([0, T]; \mathfrak{F}^0) \cap C^{p+1}((0, T); \mathfrak{F}^0)$ ,  $f^{in} \in C([0, T]; \mathfrak{F}_{in}^1)$ ,  $f^{ex} \in C([0, T]; \mathfrak{F}_{ex}^1)$  существует единственное решение задачи (1)-(2), которое к тому же имеет вид

$$u(t) = - \sum_{q=0}^p G^q M_0^{-1} \frac{d^q}{dt^q} f^0(t) + U_{in}^{t-T} u_T - \int_t^T R_{in}^{t-s} f^{in}(s) ds + U_{ex}^t u_0 + \int_0^t R_{ex}^{t-s} f^{ex}(s) ds.$$

Здесь  $f^0 = (\mathbb{I} - Q)f$ ,  $f^{in(ex)} = Q_{in(ex)}f$ ,  $G = M_0^{-1}L_0$ ,  $U_{in}^t = (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu$ ,

$$R_{in}^t = (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma} (\mu l - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu$$

История задачи (1) начинается с одной стороны в [3], где она названа задачей Веригина, а с другой стороны и независимо – в [4], где она названа задачей сопряжения. Однако в обоих случаях вместо относительно спектральных проекторов  $P_{in}$  и  $P_{ex}$  рассматриваются спектральные проекторы оператора  $L$ , причем  $L$  вдобавок предполагается самосопряженным. Наш подход основан на концепции относительного спектра, предложенной Г.А. Свиридюком. Первые результаты в этом направлении изложены в [5], где рассмотрен частный случай задачи (1), причем с более жесткими, чем здесь, условиями на  $L$ -спектр оператора  $M$ . В [6] рассмотрена задача (1), но для тех же условий на  $L$ -спектр оператора  $M$ , что и в [5], однако для  $(L, p)$ -ограниченного оператора  $M$  отмечена возможность большего произвола в относительно спектральных условиях. В [7] результаты [6] распространены на случай  $(L, p)$ -радиального оператора  $M$ . Нам кажется, что наиболее удобным будет эту задачу называть *начально-конечной*.

Пусть теперь  $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}; \mathfrak{E})$ , где  $\mathfrak{V} = \{V_i\}$  – множество вершин, а  $\mathfrak{E} = \{E_j\}$  – множество ребер, – конечный связный ориентированный граф, причем каждому его ребру  $E_j$  сопоставлены два положительных числа  $l_j, d_j$ , которые удобно трактовать как длину и площадь поперечного сечения соответственно. Такой граф  $\mathbf{G}$  предложено называть *геометрическим* [8]. Пусть на каждом ребре  $E_j$  заданы линеаризованные уравнения Хоффа, которые моделируют динамику выпучивания конструкции из двутавровых балок

$$\lambda u_{jt} + u_{jtxx} = \alpha u_j + f_j. \quad (3)$$

Здесь параметр  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  характеризует свойства материала балки, а параметр  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  – вертикальную нагрузку. Нас интересуют решения уравнения (3) удовлетворяющие следующим условиям:

$$u_j(0, t) = u_k(0, t) = u_m(l_m, t) = u_n(l_n, t), \quad (4)$$

где  $E_j, E_k \in E^{\alpha}(V_i), E_m, E_n \in E^{\omega}(V_i)$ ;  $(E^{\alpha(\omega)}(V_i))$  – множество ребер с началом (концом) в вершине  $V_i$ , а также

$$\sum_{E_j \in E^{\alpha}(V_i)} d_j u_{jx}(0, t) - \sum_{E_k \in E^{\omega}(V_i)} d_k u_{kx}(l_k, t) = 0. \quad (5)$$

Условия (4) требуют непрерывности решений в вершинах графа, причем при этих условиях термин «отсутствовать» не значит «быть равным нулю». Например, если в вершину  $V_i$  все ребра «входят», то первые два равенства в (4) именно «отсутствуют», а не «равны нулю». Условие (5) означает, что поток через каждую вершину должен равняться нулю.

Впервые уравнения в частных производных на геометрических графах начали изучаться в конце прошлого века в связи с моделированием процессов «реакции-диффузии» в трубчатых реакторах, а также динамики давления и влагопереноса в «тонких» областях. Первая монография [8] по классическим дифференциальным уравнениям на геометрических графах вышла в 2004 г. Первая статья [9], в которой рассмотрены уравнения соболевского типа на графах, появилась в 2002 г. Первая диссертация [10], в которой описаны фазовые пространства некоторых уравнений соболевского типа, заданных на графах, защищена в 2005 г. Обобщенная задача Шоултера – Сидорова для уравнений соболевского типа на графе была рассмотрена в [11].

Чтобы редуцировать задачу (3) – (5) к задаче (1) – (2), ведем в рассмотрение банаховы пространства  $\mathfrak{F} = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots) : g_j \in L_2(0, l_j)\}$  и  $\mathfrak{V} = \{v = (v_1, v_2, \dots, v_j, \dots) : v_j \in W_2^1(0, l_j)$  и выполнено (4)}. Пространство  $\mathfrak{F}$  – гильбертово со скалярным умножением

$$\langle g, h \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} g_j h_j dx,$$

а пространство  $\mathfrak{V}$  – банахово с нормой

$$\|v\|_{\mathfrak{V}}^2 = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (v_{jx}^2 + v_j^2) dx.$$

В силу теорем вложения Соболева функции из  $W_2^1$  абсолютно непрерывны, поэтому пространство  $\mathfrak{V}$  определено корректно.

Обозначим через  $\mathfrak{V}^*$  сопряженное к  $\mathfrak{V}$  относительно двойственности  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  пространство и формулой

$$\langle Au, v \rangle = - \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} u_{jx} v_{jx} dx, \quad u, v \in \mathfrak{V}$$

зададим оператор  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}^*)$ . Спектр оператора  $A$  неположителен, дискретен, конечно-кратен и сгущается только к  $-\infty$ . Занумеруем собственные значения  $\{\lambda_k\}$  оператора  $A$  по невозврастанию с учетом кратности.

Введем в рассмотрение еще одно банахово пространство  $\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots) : u_j \in W_2^2(0, l_j)$  и выполняются (4), (5)} с нормой

$$\|u\|_u^2 = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jxx}^2 + u_{jx}^2 + u_j^2) dx$$

Формулой  $B : u \rightarrow (u_{1xx}, u_{2xx}, \dots, u_{jxx}, \dots)$ , зададим оператор  $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ . При всех  $u \in \mathfrak{U}$   $Bu = Au$ . Выберем  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  и построим оператор  $L = \lambda + B$ . По построению оператор  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ , а его спектр  $\sigma(L) = \{\lambda + \lambda_k\}$ . Оператор  $M$  зададим формулой  $Mu = \alpha u$ , для всех  $u \in \mathfrak{U}$ .

**Лемма 1.** *При любых  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  оператор  $M$  ( $L, 0$ )-ограничен.*

Таким образом редукция задачи (3) – (5) к задаче (1) – (2) закончена. Итак, все условия теоремы 3 выполнены, и поэтому справедлива

**Теорема 4.** *При любых  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ,  $u_0, u_T \in \mathfrak{U}$ ,  $f \in \mathfrak{F}$  существует единственное решение  $u \in C([0, T]; \mathfrak{U}) \cap C^1((0, T); \mathfrak{U})$  задачи (4), (5) для уравнения (3).*

## Литература

1. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / Fedorov, V.E. – Utrecht: VSP, 2003. – 228 p.
2. Келлер, А.В. Исследование ограниченных решений линейных уравнений типа Соболева: дис. ... канд. физ.-мат. наук / А.В. Келлер. – Челябинск, 1997.
3. Панков, А.А. Нелинейные эволюционные уравнения с необратимым операторным коэффициентом при производной / А.А. Панков, Т.Е. Панкова // Докл. Акад. наук Украины. – 1993. – № 9. – С. 18 – 20.
4. Pyatkov, S.G. Operator theory. Nonclassical problems / S.G. Pyatkov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2002.
5. Свиридов, Г.А. Задача Веригина для линейных уравнений соболевского типа с относительно р-секториальными операторами / Г.А. Свиридов, С.А. Загребина // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т.38, № 12. – С. 1646 – 1652.
6. Загребина, С.А. О задаче Шоултера – Сидорова / С.А. Загребина // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 3. – С. 22 – 28.
7. Загребина, С.А. Обобщенная задача Шоултера – Сидорова для уравнений соболевского типа с сильно  $(L, p)$ -радиальным оператором / С.А. Загребина, М.А. Сагадеева // Вестн. МаГУ. Сер. «Математика». – 2006. – Вып. 9. – С. 17 – 27.
8. Покорный, Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев. – М.: Физматлит, 2004.
9. Свиридов, Г.А. Уравнения соболевского типа на графах / Г.А. Свиридов // Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. работ. – Новосибирск, 2002. – С. 221 – 225.
10. Шеметова, В.В. Исследование одного класса уравнений соболевского типа на графах: дис. ... канд. физ.-мат. наук / В.В. Шеметова – Магнитогорск, 2005.
11. Загребина, С.А. Задача Шоултера – Сидорова для уравнения соболевского типа на графике / С.А. Загребина // Оптимизация, управление, интеллект. – Иркутск, 2006. – 1 (12). – С. 42 – 49.

Кафедра уравнений математической физики,  
Южно-Уральский государственный университет  
npsemenova@rambler.ru

*Поступила в редакцию 17 марта 2010 г.*

# ЗАДАЧА ТЕРМОКОНВЕКЦИИ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

Т.Г. Сукачева

## THE THERMOCONVECTION PROBLEM FOR THE LINEARIZED MODEL OF THE INCOMPRESSIBLE VISCOELASTIC FLUID

T.G. Sukacheva

Рассматривается задача Коши – Дирихле для гибрида линеаризованной системы Осколкова и уравнения теплопроводности в приближении Обербека – Буссинеска, моделирующего термоконвекцию несжимаемой вязкоупругой жидкости. Данная задача исследуется на основе теории относительно  $p$ -секториальных операторов и вырожденных полугрупп операторов. Доказана теорема существования единственного решения указанной задачи и получено описание ее расширенного фазового пространства.

*Ключевые слова:* уравнение соболевского типа, система уравнений Осколкова, несжимаемая вязкоупругая жидкость, относительно  $p$ -секториальный оператор, расширенное фазовое пространство

The Cauchy-Dirichlet problem for the hybrid of linearized Oskolkov system and heat equation in the approximation of Oberbeck-Bussinesq modeling thermoconvection of incompressible viscoelastic fluid is considered. This problem is investigated on the base of the theory of relatively  $p$ -sectorial operators and degenerate semigroups of operators. The theorem of existence of the unique solution of this problem is proved and the description of its extended phase space is received.

*Keywords:* Sobolev type equation, Oskolkov system of equations, an incompressible viscoelastic fluuid, relatively  $p$ -sectorial operator, extended phase space

## Введение

Система уравнений

$$\begin{cases} (1 - \lambda \nabla^2) \mathbf{v}_t = \nu \nabla^2 \mathbf{v} - (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}} - \nabla p - g\gamma\theta + \mathbf{f}, \\ 0 = \nabla \cdot \mathbf{v}, \\ \theta_t = \kappa \nabla^2 \theta - \mathbf{v} \cdot \nabla \theta + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \end{cases} \quad (1)$$

является гибридом линеаризованной системы Осколкова [1, 2] и уравнения теплопроводности в приближении Обербека – Буссинеска, моделирующего термоконвекцию несжимаемой вязкоупругой жидкости. Она моделирует эволюцию скорости  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ,  $v_i = v_i(x, t)$ , градиента давления  $\nabla p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ,  $p_i = p_i(x, t)$  и температуры  $\theta = \theta(x, t)$

простейшей неильтоновской жидкости — несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта нулевого порядка. Параметры  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\nu \in \mathbb{R}_+$  и  $\kappa \in \mathbb{R}_+$  характеризуют упругость, вязкость и теплопроводность жидкости соответственно;  $g \in \mathbb{R}_+$  — ускорение свободного падения; вектор  $\gamma = (0, \dots, 0, 1)$  — орт в  $\mathbb{R}^n$ ; свободный член  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ ,  $f_i = f_i(x, t)$ , отвечает внешнему воздействию на жидкость, а вектор-функция  $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$ ,  $\tilde{v}_k = \tilde{v}_k(x)$  соответствует стационарному решению исходной системы [1, 2]. Обоснование линеаризованной модели несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина – Фойгта нулевого порядка содержится в [3].

Рассмотрим первую начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, 0) &= \mathbf{v}_0(x), & \theta(x, 0) &= \theta_0(x), & \forall x \in \Omega; \\ \mathbf{v}(x, t) &= 0, & \theta(x, t) &= 0, & \forall (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \end{aligned} \quad (2)$$

для системы (1). Здесь  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$   $n = 2, 3, 4$  — ограниченная область с границей  $\partial\Omega$  класса  $C^\infty$ .

Впервые задачу термоконвекции для несжимаемых вязкоупругих жидкостей Кельвина – Фойгта поставил А.П. Осколков [4]. Им же была исследована разрешимость задачи (2) для соответствующей нелинейной модели нулевого порядка в случае  $\lambda^{-1} > -\lambda_1$  ( $\lambda_1$  – наименьшее собственное значение задачи Дирихле для оператора Лапласа в области  $\Omega$ ) [5]. Первая начально-краевая задача для этой модели рассматривалась в [3, 6], а для ее модификации на случай плоско-параллельного течения в [7]. В этих работах изучалась ситуация, когда свободный член  $\mathbf{f}$  не зависит от времени, а в [8] — указанная неавтономная задача. Нестационарная линеаризованная модель нулевого порядка изучалась в [9], а ее обобщение на случай модели ненулевого порядка в [10].

Нашей целью является изучение разрешимости задачи (1), (2) при нестационарном свободном члене  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x, t)$ . Эту задачу мы исследуем в рамках теории полулинейных уравнений соболевского типа. Основным инструментом исследования является понятие относительно  $p$ -секториального оператора и порожденной им разрешающей вырожденной полугруппы операторов. Доказана теорема существования единственного решения указанной задачи, и получено описание ее расширенного фазового пространства. В первой части статьи в соответствии с [8] рассматривается абстрактная задача Коши для указанного класса уравнений, а затем задача (1), (2) изучается как конкретная интерпретация абстрактной задачи. Заметим, что указанная задача рассматривается впервые и в силу последнего уравнения системы (1) является нелинейной.

## 1. Абстрактная задача

Пусть  $\mathcal{U}$  и  $\mathcal{F}$  — банаховы пространства, оператор  $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ , т.е. линеен и непрерывен,  $\ker L \neq \{0\}$ ; оператор  $M : \text{dom } M \rightarrow \mathcal{F}$  линеен, замкнут и плотно определен в  $\mathcal{U}$ , т.е.  $M \in Cl(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ . Через  $\mathcal{U}_M$  обозначим линеал  $\text{dom } M$ , снабженный нормой графика  $\|\cdot\| = \|M \cdot\|_{\mathcal{F}} + \|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ . Пусть оператор  $F \in C^\infty(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$ , функция  $f \in C^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+; \mathcal{F})$ .

Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \quad (3)$$

для полулинейного нестационарного уравнения соболевского типа

$$L \dot{u} = Mu + F(u) + f(t). \quad (4)$$

**Определение 1.** Локальным решением (далее просто — решением) задачи (3), (4) назовем вектор-функцию  $u \in C^\infty((0, T); \mathcal{U}_M)$ , удовлетворяющую уравнению (4) и такую, что  $u(t) \rightarrow u_0$  при  $t \rightarrow 0+$ .

Введем в рассмотрение  $L$ -резольвентное множество  $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})\}$  и  $L$ -спектр  $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$  оператора  $M$ .

**Определение 2.** Оператор  $M$  называется  $(L, p)$ -секториальным, если существуют константы  $a \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{R}_+$ ,  $\Theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  такие, что

$$(i) \quad S_{\Theta, a}^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \Theta, \mu \neq a\} \subset \rho^L(M);$$

$$(ii) \quad \max\{\|R_{(\mu, p)}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})}, \|L_{(\mu, p)}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})}\} \leq \frac{k}{\prod_{q=0}^p |\mu_q - a|}$$

при любых  $\mu, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_p \in S_{\Theta, a}^L(M)$ .

Здесь

$$R_{(\mu, p)}^L(M) = \prod_{q=0}^p R_{\mu_q}^L(M), \quad L_{(\mu, p)}^L(M) = \prod_{q=0}^p L_{\mu_q}^L(M)$$

соответственно правая и левая  $(L, p)$ -резольвенты оператора  $M$ ,  $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ ,  $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$  [11].

**Определение 3.** Оператор  $M$  называется сильно  $(L, p)$ -секториальным, если он  $(L, p)$ -секториален и при всех  $\mu, \mu_0, \dots, \mu_p \in S_{\Theta, a}^L(M)$

$$(i) \quad \|MR_{(\mu, p)}^L(M)(\mu L - M)^{-1}f\|_{\mathcal{F}} \leq \frac{\text{const}(f)}{|\mu - a| \prod_{q=0}^p |\mu_q - a|}$$

при всех  $f$  из некоторого плотного в  $\mathcal{F}$  линеала;

$$(ii) \quad \|(\mu L - M)^{-1}L_{(\mu, p)}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})} \leq \frac{\text{const}}{|\mu - a| \prod_{q=0}^p |\mu_q - a|}.$$

**Замечание 1.** Если  $p = 0$ , то  $(L, p)$ - и сильно  $(L, p)$ -секториальный оператор  $M$  называется соответственно  $L$ - и сильно  $L$ -секториальным [3].

Будем рассматривать задачу (3), (4) в предположении, что оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -секториален. При условии сильной  $(L, p)$ -секториальности оператора  $M$  решение задачи (3), (4) может быть неединственным, что показывает пример, приведенный в [12]. Поэтому сузим понятие решения уравнения (4). Также известно [13, 14, 15], что решения задачи (3), (4) существуют не для всех  $u_0 \in \mathcal{U}_M$ . Поэтому введем два определения.

**Определение 4.** Множество  $\mathcal{B}^t \subset \mathcal{U}_M \times \bar{\mathbb{R}}_+$  назовем расширенным фазовым пространством уравнения (4), если для любой точки  $u_0 \in \mathcal{U}_M$  такой, что  $(u_0, 0) \in \mathcal{B}^0$  существует единственное решение задачи (3), (4), причем  $(u(t), t) \in \mathcal{B}^t$ .

**Замечание 2.** Если  $\mathcal{B}^t = \mathcal{B} \times \bar{\mathbb{R}}_+$ , где  $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}_M$ , то множество  $\mathcal{B}$  называется фазовым пространством уравнения (4). Ранее вместо термина «расширенное фазовое пространство» использовался термин «конфигурационное пространство» [8], что вносило некоторую путаницу в терминологию [16].

**Определение 5.** Пусть пространство  $\mathcal{U}$  расщепляется в прямую сумму  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \oplus \mathcal{U}_1$  так, чтобы  $\ker L \subset \mathcal{U}_0$ . Решение  $u = v + w$ , где  $v(t) \in \mathcal{U}_0$ , а  $w(t) \in \mathcal{U}_1$  при всех  $t \in (0, T)$ , уравнения (4) назовем квазистационарной полутраекторией, если  $Lv \equiv 0$ .

**Замечание 3.** Понятие квазистационарной полутраектории обобщает понятие квазистационарной траектории, введенное для динамического случая [12, 14, 15].

В силу того, что оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -секториален, пространства  $\mathcal{U}$  и  $\mathcal{F}$  расщепляются в прямые суммы  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$  [11], где

$$\mathcal{U}^0 = \{\varphi \in \mathcal{U} : U^t \varphi = 0 \quad \exists t \in \mathbb{R}_+\}, \quad \mathcal{F}^0 = \{\psi \in \mathcal{F} : F^t \psi = 0 \quad \exists t \in \mathbb{R}_+\} -$$

ядра, а

$$\mathcal{U}^1 = \{u \in \mathcal{U} : \lim_{t \rightarrow 0+} U^t u = u\}, \quad \mathcal{F}^1 = \{f \in \mathcal{F} : \lim_{t \rightarrow 0+} F^t f = f\} -$$

образы аналитических разрешающих полугрупп

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu, \quad F^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu, \quad (5)$$

( $\Gamma \subset S_{\Theta, a}^L(M)$  — контур такой, что  $\arg \mu \rightarrow \pm \Theta$  при  $|\mu| \rightarrow +\infty$ ) линейного однородного уравнения  $L\dot{u} = Mu$ .

Обозначим через  $L_k(M_k)$  сужение оператора  $L(M)$  на  $\mathcal{U}^k$  ( $\mathcal{U}^k \cap \text{dom } M$ ),  $k = 0, 1$ . Тогда  $L_k : \mathcal{U}^k \rightarrow \mathcal{F}^k$ ,  $M_k : \mathcal{U}^k \cap \text{dom } M \rightarrow \mathcal{F}^k$ ,  $k = 0, 1$ , причем сужения  $M_0$  и  $L_1$  операторов  $M$  и  $L$  на пространства  $\mathcal{U}^0 \cap \text{dom } M$  и  $\mathcal{U}^1$  соответственно являются линейными непрерывными операторами и имеют ограниченные обратные операторы. Эти утверждения следуют из соответствующих результатов [11]. Поэтому приведем уравнение (4) к эквивалентной форме

$$\begin{aligned} R\dot{u}^0 &= u^0 + G(u) + g(t) & u^0(0) &= u_0^0, \\ \dot{u}^1 &= Su^1 + H(u) + h(t) & u^1(0) &= u_0^1, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $u^k \in \mathcal{U}^k$ ,  $k = 0, 1$ ,  $u = u^0 + u^1$ , операторы  $R = M_0^{-1}L_0$ ,  $S = L_1^{-1}M_1$ ,  $G = M_0^{-1}(I - Q)F$ ,  $H = L_1^{-1}QF$ ,  $g = M_0^{-1}(I - Q)f$ ,  $h = L_1^{-1}Qf$ . Здесь  $Q \in \mathcal{L}(F)(\equiv \mathcal{L}(F; F))$  — проектор, расщепляющий пространство  $\mathcal{F}$  требуемым образом.

**Определение 6.** Систему уравнений (6) назовем нормальной формой уравнения (4).

**Замечание 4.** В случае, когда оператор  $M$  сильно  $L$ -секториален, нормальная форма уравнения (4) (в случае  $f(t) \equiv 0$ ) имеет вид (5.1) в [7].

В дальнейшем ограничимся изучением таких квазистационарных полутраекторий уравнения (4), для которых  $R\dot{u}^0 \equiv 0$ . Для этого предположим, что оператор  $R$  — бирациональный [17], т.е. его ядро  $\ker R$  и образ  $\text{im } R$  дополняемы в пространстве  $\mathcal{U}$ . Положим  $\mathcal{U}^{00} = \ker R$ , а через  $\mathcal{U}^{01} = \mathcal{U}^0 \ominus \mathcal{U}^{00}$  обозначим некоторое дополнение к подпространству  $\mathcal{U}^{00}$ . Тогда первое уравнение нормальной формы (6) редуцируется к виду

$$R\dot{u}^{01} = u^{00} + u^{01} + G(u) + g(t), \quad (7)$$

где  $u = u^{00} + u^{01} + u^1$ .

**Теорема 1.** Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -секториален, а оператор  $R$  — бирациональный. Пусть существует квазистационарная полутраектория  $u = u(t)$  уравнения (4). Тогда она удовлетворяет соотношениям

$$0 = u^{00} + u^{01} + G(u) + g(t), \quad u^{01} = \text{const}. \quad (8)$$

**Доказательство.** Первое соотношение вытекает из (7) в силу требования квазистационарности  $R\dot{u}^0 = R\dot{u}^{01} \equiv 0$ . Второе соотношение вытекает из тождества  $R\dot{u}^{01} \equiv 0$ , так как по теореме Банаха об обратном операторе сужение оператора  $Q_R R(I - P_R)$  на  $\mathcal{U}^{01}$  есть непрерывно обратимый оператор. Здесь  $Q_R$  и  $P_R$  — проекторы на  $\text{im } R$  и  $\ker R$  соответственно,  $\ker P_R = \mathcal{U}^{01}$ .  $\square$

**Замечание 5.** Второе соотношение в (8) поясняет смысл термина «квазистационарные полутраектории», т.е. это такие полутраектории, которые «стационарны по некоторым переменным». Другими словами, квазистационарная полутраектория обязательно лежит в некоторой плоскости  $(I - P_R)u^0 = \text{const}$ .

Теорема 1 устанавливает необходимые условия существования квазистационарной полутраектории уравнения (4). Переходим к рассмотрению достаточных условий. Известно, что при условии сильной  $(L, p)$ -секториальности оператора  $M$  оператор  $S$  секториален [11]. Значит, он порождает на  $\mathcal{U}^1$  аналитическую полугруппу, которую мы обозначим через  $\{U_1^t : t \geq 0\}$ , так как в действительности оператор  $U_1^t$  есть сужение оператора  $U^t$  на  $\mathcal{U}^1$ . Из того, что  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$  следует, что существует проектор  $P \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ , соответствующий данному расщеплению. Можно показать, что  $P \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M)$  [11]. Тогда пространство  $\mathcal{U}_M$  расщепляется в прямую сумму  $\mathcal{U}_M = \mathcal{U}_M^0 \oplus \mathcal{U}_M^1$  так, что вложение  $\mathcal{U}_M^k \subset \mathcal{U}^k$ ,  $k = 0, 1$ , плотно и непрерывно. Символом  $A'_v$  обозначена производная Фреше в точке  $v \in \mathcal{V}$  оператора  $A$ , определенного на некотором банаховом пространстве  $\mathcal{V}$ .

**Теорема 2.** Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -секториален, оператор  $R$  — бирацицептирующий, оператор  $F \in C^\infty(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$ , а вектор-функция  $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{F})$ . Пусть

(i) в некоторой окрестности  $\mathcal{O}_{u_0} \subset \mathcal{U}_M$  точки  $u_0$  выполнено соотношение

$$0 = u_0^{01} + (I - P_R)(G(u^{00} + u_0^{01} + u^1) + g(t)); \quad (9)$$

(ii) проектор  $P_R \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$ , и оператор  $I + P_R G'_{u_0^0} : \mathcal{U}_M^0 \rightarrow \mathcal{U}_M^0$  — топологический изоморфизм ( $\mathcal{U}_M^0 = \mathcal{U}_M \cap \mathcal{U}^0$ );

(iii) для аналитической полугруппы  $\{U_1^t : t \geq 0\}$  выполнено соотношение

$$\int_0^\tau \|U_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}^1; \mathcal{U}_M^1)} dt < \infty \quad \forall \tau \in \mathbb{R}_+. \quad (10)$$

Тогда существует единственное решение задачи (3), (4), являющееся квазистационарной полутраекторией уравнения (4).

**Доказательство.** Рассмотрим окрестность  $\mathcal{O}_{u_0}$  точки  $u_0$ . В этой окрестности первое уравнение (6) приобретет вид

$$0 = u^{00} + P_R(G(u^{00} + u_0^{01} + u^1) + g(t)) \quad (11)$$

в силу условия (i). Далее, из (i) в силу теоремы о неявной функции существуют окрестности  $\mathcal{O}_{u_0^{00}} \subset \mathcal{U}_M^0$ , ( $\mathcal{U}_M^0 = \mathcal{U}^0 \cap \mathcal{U}_M$ )  $\mathcal{O}_{u_0^1} \subset \mathcal{U}_M^1$  ( $\mathcal{U}_M^1 = \mathcal{U}^1 \cap \mathcal{U}_M$ ) точек  $u_0^{00} = P_R(I - P)u_0$ ,  $u_0^1$  соответственно и отображение  $\delta : \mathcal{O}_{u_0^1} \rightarrow \mathcal{O}_{u_0^{00}}$  класса  $C^\infty$  такое, что уравнение

$$u^{00} = \delta(u^1, t) \quad (12)$$

эквивалентно уравнению (11).

Теперь в силу (12) второе уравнение (6) в окрестности  $\mathcal{O}_{u_0^1}$  приобретет вид

$$\dot{u}^1 = Su^1 + H(\delta(u^1) + u_0^{01} + u^1) + h(t), \quad (13)$$

где оператор  $H((I + \delta)(\cdot) + u_0^{01}) : \mathcal{O}_{u_0^1} \rightarrow \mathcal{U}^1$  принадлежит классу  $C^\infty$  по построению.

Для доказательства однозначной разрешимости задачи  $u^1(0) = u_0^1$  для уравнения (13) воспользуемся методом Соболевского – Танабэ, изложенным в [18, гл. 9]. В силу (iii), гладкости оператора  $H$  и вектор-функции  $h$  все условия теорем 9.4, 9.6 и 9.7 в [18] выполнены. Поэтому если  $u_0^1 \in \mathcal{U}_M^1$ , то при некотором  $T \in \mathbb{R}_+$  существует единственное решение  $u^1 = u^1(t)$ ,  $t \in [0, T]$  уравнения (13) такое, что  $u^1(t) \rightarrow u_0^1$  при  $t \rightarrow 0+$  в топологии  $\mathcal{U}_M^1$ .

Итак, решение задачи (3), (4) в данном случае будет иметь вид  $u = u^1 + \delta(u^1) + u_0^{01}$ , и это решение будет квазистационарной полутраекторией по построению.  $\square$

**Замечание 6.** Для любой квазистационарной полутраектории уравнения (4) соотношение (9) непосредственно вытекает из первого уравнения (8).

**Замечание 7.** Условие (10) для обычных аналитических полугрупп, имеющих оценку  $\|U_1^t\|_{\mathcal{L}(U^1; U_M^1)} < t^{-1}\text{const}$ , не выполняется. В дальнейшем мы собираемся использовать теорему 2 именно в такой ситуации, и потому необходимо сделать некоторые пояснения. Пусть  $\mathcal{U}_\alpha^1 = [\mathcal{U}^1; \mathcal{U}_M^1]_\alpha$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  — некоторое интерполяционное пространство, построенное по оператору  $S$ . В теореме 2 условие «оператор  $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M^1; \mathcal{F})$ , вектор-функция  $f \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+; \mathcal{F})»$  дополним условием «оператор  $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M^1; \mathcal{U}_\alpha^1)$ ,  $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{U}_\alpha^1)\»$ , а соотношение (10) заменим соотношением

$$\int_0^\tau \|U_1^t\|_{\mathcal{L}(U^1; U_\alpha^1)} dt < \infty \quad \forall \tau \in \mathbb{R}_+. \quad (14)$$

Тогда утверждение теоремы 2 не изменится. Обсуждение этого круга вопросов см. в [18, глава 9].

**Замечание 8.** Пусть выполнены условия теоремы 2 (возможно, с учетом замечания 7). Построим плоскость  $\mathcal{A} = \{u \in \mathcal{U}_M : (I - P_R)(I - P)u = u_0^{01}\}$  и множество  $\mathcal{M} = \{u \in \mathcal{U}_M : P_R((I - P)u + G(u) + g(t)) = 0\}$ . По условию теоремы их пересечение  $\mathcal{A} \cap \mathcal{M} \neq \emptyset$ , так как содержит по крайней мере точку  $u_0$ . Более того, существует  $\mathcal{C}^\infty$ -диффеоморфизм  $I + \delta$ , отображающий окрестность  $\mathcal{O}_{u_0^1}$  на некоторую окрестность  $\mathcal{O}_{u_0} \subset \mathcal{A} \cap \mathcal{M}$ . Следовательно, в качестве начального значения можно брать не только точку  $u_0$ , но и любую из некоторой ее окрестности  $\mathcal{O}_{u_0}$ . Это значит, что  $\mathcal{O}_{u_0}$  является частью *расширенного фазового пространства*  $\mathcal{B}^t$  уравнения (4).

Теперь пусть  $\mathcal{U}_k$  и  $\mathcal{F}_k$  — банаховы пространства, операторы  $A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_k, \mathcal{F}_k)$ , а операторы  $B_k : \text{dom } B_k \rightarrow \mathcal{F}$  линейны и замкнуты с областями определений  $\text{dom } B_k$  плотными в  $\mathcal{U}_k$ ,  $k = 1, 2$ . Построим пространства  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$  и операторы  $L = A_1 \otimes A_2$ ,  $M = B_1 \otimes B_2$ . По построению оператор  $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ , а оператор  $M : \text{dom } M \rightarrow \mathcal{F}$  линеен, замкнут и плотно определен,  $\text{dom } M = \text{dom } B_1 \times \text{dom } B_2$ .

**Теорема 3.** [19] Пусть операторы  $B_k$  сильно  $(A_k, p_k)$ -секториальны,  $k = 1, 2$ ; причем  $p_1 \geq p_2$ . Тогда оператор  $M$  сильно  $(L, p_1)$ -секториален.

## 2. Конкретная интерпретация

Рассмотрим задачу (2) для системы (1), представленной в виде

$$\begin{cases} (1 - \lambda \nabla^2) \mathbf{v}_t = \nu \nabla^2 \mathbf{v} - (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{p} - g\gamma\theta + \mathbf{f}, \\ 0 = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}), \\ \theta_t = \kappa \nabla^2 \theta - \mathbf{v} \cdot \nabla \theta + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\gamma}. \end{cases} \quad (15)$$

Здесь  $\mathbf{p} = \nabla p$ , т.к. во многих гидродинамических задачах знание градиента давления предпочтительнее, чем знание давления [20]. Впервые такая замена уравнения неразрывности сделана в [21]. Нас будет интересовать локальная однозначная разрешимость задачи (15), (2), эквивалентной исходной задаче (1), (2). Эту задачу удобно рассматривать в рамках теории полулинейных уравнений соболевского типа, изложенной в п.1.

Для того, чтобы редуцировать задачу (15), (2) к задаче (3), (4) введем, следуя [21], пространства  $\mathbf{H}_\sigma^2$ ,  $\mathbf{H}_\pi^2$ ,  $\mathbf{H}_\sigma$  и  $\mathbf{H}_\pi$ . Здесь  $\mathbf{H}_\sigma^2$  и  $\mathbf{H}_\sigma$  — подпространства соленоидальных функций в

пространствах  $(W_2^2(\Omega))^n \cap (\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))^n$  и  $(L_2(\Omega))^n$  соответственно, а  $\mathbf{H}_\pi^2$  и  $\mathbf{H}_\pi$  — их ортогональные (в смысле  $(L_2(\Omega))^n$ ) дополнения. Через  $\Sigma$  обозначим ортопроектор на  $\mathbf{H}_\sigma$ , причем его сужение на пространство  $(W_2^2(\Omega))^n \cap (\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))^n$  будем обозначать тем же символом. Положим  $\Pi = I - \Sigma$ .

Формулой  $A = \nabla^2 E_n : \mathbf{H}_\sigma^2 \oplus \mathbf{H}_\pi^2 \rightarrow \mathbf{H}_\sigma \oplus \mathbf{H}_\pi$ , где  $E_n$  — единичная матрица порядка  $n$ , зададим линейный непрерывный оператор с дискретным конечнократным спектром  $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ , сгущающимся лишь на  $-\infty$ . Формулой  $B : \mathbf{v} \rightarrow \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$  зададим линейный непрерывный сюръективный оператор  $B : \mathbf{H}_\sigma^2 \oplus \mathbf{H}_\pi^2 \rightarrow \mathbf{H}_\pi$  с ядром  $\ker B = \mathbf{H}_\sigma^2$ .

Пользуясь естественным изоморфизмом прямой суммы и декартова произведения базаховых пространств, введем в рассмотрение пространства  $\mathcal{U}_1 = \mathbf{H}_\sigma^2 \times \mathbf{H}_\pi^2 \times \mathbf{H}_p$  и  $\mathcal{F}_1 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \mathbf{H}_p$ , где  $\mathbf{H}_p = \mathbf{H}_\pi$ . Построим операторы

$$A_1 = \begin{pmatrix} \Sigma(I - \lambda A) & \Sigma(I - \lambda A) & O \\ \Pi(I - \lambda A) & \Pi(I - \lambda A) & O \\ O & O & O \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} \nu \Sigma A & \nu \Sigma A & O \\ \nu \Pi A & \nu \Pi A & -I \\ O & B & O \end{pmatrix}.$$

**Замечание 9.** Обозначим через  $A_\sigma$  сужение оператора  $\Sigma A$  на  $\mathbf{H}_\sigma^2$ . По теореме Солонникова-Воровича-Юдовича спектр  $\sigma(A_\sigma)$  вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается лишь на  $-\infty$ .

**Теорема 4.** (i) *Операторы  $A_1, B_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_1; \mathcal{F}_1)$ , и, если  $\lambda^{-1} \notin \sigma(A)$ , то оператор  $A_1$  — бирасцеллюющий,  $\ker A_1 = \{0\} \times \{0\} \times \mathbf{H}_p$ ,  $\text{im } A_1 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \{0\}$ .*  
(ii) *Если  $\lambda^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$ , то оператор  $B_1$  ( $A_1, 1$ )-ограничен.*

**Замечание 10.** Доказательство теоремы 4 приведено в [8], только в другой терминологии. Впервые понятие относительно ограниченного оператора введено в [22]. Случай относительно секториального оператора рассматривался в [7, 23, 24].

Далее положим  $\mathcal{U}_2 = \mathcal{F}_2 = L_2(\Omega)$  и формулой  $B_2 = \kappa \nabla^2 : \text{dom } B_2 \rightarrow \mathcal{F}_2$  определим линейный замкнутый и плотно определенный оператор  $B_2$ ,  $\text{dom } B_2 = W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ . Если оператор  $A_2$  положить равным  $I$ , то в силу секториальности оператора  $B_2$  [25, гл. 1] справедлива

**Теорема 5.** *Оператор  $B_2$  сильно  $A_2$ -секториален.*

Положим  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ .

Вектор  $u$  пространства  $\mathcal{U}$  имеет вид  $u = \text{col}(u_\sigma, u_\pi, u_p, u_\theta)$ , где  $\text{col}(u_\sigma, u_\pi, u_p) \in \mathcal{U}_1$ , а  $u_\theta \in \mathcal{U}_2$ . Аналогичный вид имеет вектор  $f \in \mathcal{F}$ . Операторы  $L$  и  $M$  определим формулами  $L = A_1 \otimes A_2$  и  $M = B_1 \otimes B_2$ . Оператор  $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ , а оператор  $M : \text{dom } M \rightarrow \mathcal{F}$  линеен, замкнут и плотно определен,  $\text{dom } M = \mathcal{U}_1 \times \text{dom } B_2$ .

Из теоремы 4 и соответствующих результатов [11] следует, что оператор  $B_1$  сильно  $(A_1, 1)$ -секториален. В силу этого и теорем 3 и 5 справедлива

**Теорема 6.** *Пусть  $\lambda^{-1} \notin \sigma(A)$ , тогда оператор  $M$  сильно  $(L, 1)$ -секториален.*

Перейдем к построению нелинейного оператора  $F$ . В данном случае его удобно представить в виде  $F = F_1 \otimes F_2$ , где  $F_1 = F_1(u_\sigma, u_\pi, u_\theta) = \text{col}(-\Sigma(((\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) - ((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) + g\gamma u_\theta + f), -\Pi(((\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) - ((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) + g\gamma u_\theta + f), 0)$ , а  $F_2 = F_2(u_\sigma, u_\pi, u_\theta) = (u_\sigma + u_\pi) \cdot (\gamma - \nabla u_\theta)$ .

Формально найдем производную Фреше  $F'_u$  оператора  $F$  в точке  $u$ ,

$$F'_u = \begin{pmatrix} \Sigma a(u_\sigma, u_\pi) & \Sigma a(u_\sigma, u_\pi) & O & -g\Sigma\gamma \\ \Pi a(u_\sigma, u_\pi) & \Pi a(u_\sigma, u_\pi) & O & -g\Pi\gamma \\ O & O & O & O \\ (\gamma - \nabla u_\theta) \cdot (*) & (\gamma - \nabla u_\theta) \cdot (*) & O & -(u_\sigma + u_\pi) \cdot (*) \end{pmatrix},$$

где  $a(u_\sigma, u_\pi) = -((*) \cdot \nabla)(\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) - ((\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) \cdot \nabla)(*)$ , а на место символа  $*$  следует ставить соответствующую координату вектора  $v$  в случае, когда мы хотим найти вектор  $F'_u v$ .

Далее, в нашем случае пространство  $\mathcal{U}_M = \mathcal{U}_1 \times \text{dom } B_2$  (в силу непрерывности оператора  $B_1$ ). Используя стандартную технику (см., например, [14, 15]), нетрудно показать, что при любых  $u \in \mathcal{U}_M$  оператор  $F'_u \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$ . Аналогично устанавливается, что вторая производная Фреше  $F''_u$  оператора  $F$  — непрерывный билинейный оператор из  $\mathcal{U}_M \times \mathcal{U}_M$  в  $\mathcal{F}$ , а  $F'''_u \equiv O$ . Таким образом, справедлива

**Теорема 7.** *Оператор  $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$ .*

Вектор-функцию  $f$  представим в виде  $f = f_1 \otimes f_2$ , где  $f_1 = \text{col}(\Sigma\mathbf{f}, \Pi\mathbf{f}, 0)$ ,  $f_2 = 0$ . Будем предполагать, что  $f \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+; \mathcal{F})$ .

Итак, редукция задачи (15), (2) к задаче (3), (4) закончена. В дальнейшем всюду отождествляем задачи (15), (2) и (3), (4). Теперь перейдем к проверке выполнения условий теорем 1 и 2.

В силу теоремы 6 и соответствующих результатов [11] существует аналитическая полугруппа  $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$  разрешающих операторов уравнения (4), которую в данном случае естественно представить в виде  $U^t = V^t \otimes W^t$ , где  $V^t(W^t)$  — сужение оператора  $U^t$  на  $\mathcal{U}_1(\mathcal{U}_2)$ . Поскольку оператор  $B_2$  секториален, то  $W^t = \exp(tB_2)$ , что влечет за собой  $\mathcal{W}^\circ = \{0\}$  и  $\mathcal{W}^1 = \mathcal{U}_2$ .

Рассмотрим полугруппу  $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ . В силу теорем 4 и 6 и цитируемой монографии [11] данная полугруппа продолжим до группы  $\{V^t : t \in \mathbb{R}\}$ . Ее ядро  $\mathcal{V}^0 = \mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}$  где  $\mathcal{U}_1^{00} = \{0\} \times \{0\} \times \mathbf{H}_p (= \ker A_1$  по теореме 5), а  $\mathcal{U}_1^{01} = \Sigma A_\lambda^{-1} A_{\lambda\pi}^{-1} [\mathbf{H}_\pi^2] \times \mathbf{H}_\pi^2 \times \{0\}$ . Здесь  $A_\lambda = I - \lambda A$ ,  $A_{\lambda\pi}$  — сужение оператора  $\Pi A_\lambda^{-1}$  на  $\mathbf{H}_\pi$ . Известно, что если  $\lambda^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$ , то оператор  $A_{\lambda\pi} : \mathbf{H}_\pi \rightarrow \mathbf{H}_\pi^2$  — топлинейный изоморфизм (см., например, [8]). Обозначим через  $\mathcal{U}_1^1$  образ  $\mathcal{V}^1$ . Тогда пространство  $\mathcal{U}_1$  разлагается в прямую сумму подпространств:  $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01} \oplus \mathcal{U}_1^1$ .

Построим оператор  $R = B_{10}^{-1} A_{10} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01})$ , где  $A_{10}(B_{10})$  — сужение оператора  $A_1(B_1)$  на  $\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}$ . (Оператор  $B_{10}^{-1}$  существует в силу теоремы 6 и соответствующих результатов [11]). По построению  $\ker R = \mathcal{U}_1^{00}$ , а в [21] показано, что  $\text{im } R = \mathcal{U}_1^{00}$ . Значит, оператор  $R$  — бираццеляющий. Обозначим через  $P_R$  проектор пространства  $\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}$  на  $\mathcal{U}_1^{00}$  вдоль  $\mathcal{U}_1^{01}$ . В силу конструкции пространства  $\mathcal{U}_M$  проектор  $P_R \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$ , где  $\mathcal{U}_M^0 = \mathcal{U}_M \cap (\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}) (\equiv \mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01})$ . Зафиксируем это в следующем утверждении.

**Лемма 1.** *Пусть  $\lambda^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$ . Тогда оператор  $R$  — бираццеляющий, причем  $P_R \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$ .*

Введем в рассмотрение проекторы

$$P_0 = \begin{pmatrix} O & O & O \\ O & O & O \\ O & O & \Pi \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} O & P_1^{12} & O \\ O & \Pi & O \\ O & O & O \end{pmatrix},$$

где  $P_1^{12} = \Sigma A_\lambda^{-1} A_{\lambda\pi}^{-1}$ . Из [21] и в силу того, что ядро  $\mathcal{W}^0 = \{0\}$ , следует  $I - P = (P_0 + P_1) \otimes O$ . Применяя проектор  $I - P$  к уравнению (4) в данной транскрипции, получаем

$$\begin{aligned} \Pi(\nu A(u_\sigma + u_\pi) - ((\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) - ((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) - u_p - g\gamma u_\theta + f(t)) = 0, \\ Bu_\pi = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Отсюда в силу теоремы 1 и свойств оператора  $B$  получаем необходимое условие квазистационарности полутраектории  $u_\pi \equiv 0$ . Другими словами, все решения нашей задачи (если они существуют) с необходимостью должны лежать в плоскости  $\mathcal{B} = \{u \in \mathcal{U}_M : u_\pi = 0\}$ . А так как  $\Pi u_p = u_p$ , то из первого уравнения (16) получаем соотношение (8) в нашей транскрипции

$$u_p = \Pi(\nu Au_\sigma - ((\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) \cdot \nabla)u_\sigma - (u_\sigma \cdot \nabla)(\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) - g\gamma u_\theta + f(t)). \quad (17)$$

Очевидно,  $P_0 \equiv P_R$ , поэтому второе уравнение (16) есть соотношение (9) применительно к нашей ситуации. Итак, справедлива

**Лемма 2.** В условиях леммы 1 любое решение задачи (3), (4) лежит во множестве

$$\mathcal{A}^t = \{u \in \mathcal{U}_M : u_\pi = 0, \quad u_p = \Pi(\nu Au_\sigma - ((\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) \cdot \nabla)u_\sigma - (u_\sigma \cdot \nabla)(\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) - g\gamma u_\theta) + f_\pi(t)\}.$$

**Замечание 11.** Из (17) сразу следует условие (iii) теоремы 2 для любой точки  $u_0^0 \in \mathcal{U}_M^{00} (\equiv \mathcal{U}_1^{00} \times \{0\})$ . Поэтому ввиду замечания 8 множество  $\mathcal{A}^t$  — простое банахово многообразие  $\mathcal{C}^\infty$ -диффеоморфное подпространству  $\mathcal{U}_1^1 \times \mathcal{U}_2$  — является кандидатом на роль расширенного фазового пространства задачи (15), (2).

Приступим к проверке условий (10) и (14). Построим пространство  $\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}_1 \times \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ . Данное пространство, очевидно, будет интерполяционным пространством для пары  $[\mathcal{U}, \mathcal{U}_M]_\alpha$ , причем  $\alpha = 1/2$ . Как отмечено выше, полугруппа  $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$  продолжается до группы  $\{V_1^t : t \in \mathbb{R}\}$  на  $\mathcal{U}_1^1$ , где  $V_1^t$  — сужение оператора  $V^t$  на  $\mathcal{U}_1^1$ . Поскольку  $\mathcal{U}_M^1 = \mathcal{U}_M \cap \mathcal{U}_1^1$  (по построению), и оператор  $B_1$  непрерывен (теорема 4), то в силу равномерной ограниченности полугруппы  $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$  имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \|V_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1^1; \mathcal{U}_M^1)} dt \leq \\ \text{const} \|B_1\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1; \mathcal{F}_1)} \int_0^\tau \|V_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1^1)} dt < \infty \quad \forall \tau \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (18)$$

Далее, в силу неравенства Соболева [18, гл. 9] полугруппа  $\{W^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$  удовлетворяет оценке

$$\int_0^\tau \|W^t\|_{\mathcal{L}(\text{dom } B_2; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))} dt < \infty. \quad (19)$$

Положим  $\mathcal{U}_\alpha^1 = \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}^1$ , где  $\mathcal{U}^1 = \mathcal{U}_1^1 \times \mathcal{U}_2$ . Тогда из (18) и (19) вытекает

**Лемма 3.** В условиях леммы 1 выполняется соотношение (10).

И наконец, выполняя требование (14), найдем оператор  $H$  и вектор-функцию  $h$ . Для этого построим проектор  $Q : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^1$ . Согласно [21]  $Q = (I - Q_0 - Q_1) \otimes I$ , где

$$Q_0 = \begin{pmatrix} O & O & O \\ O & \Pi & Q_0^{23} \\ O & O & O \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} O & O & Q_1^{13} \\ O & O & Q_1^{23} \\ O & O & \Pi \end{pmatrix},$$

$Q_1^{13} = \Sigma A A_\lambda^{-1} A_{\lambda\pi}^{-1} B_\pi^{-1}$ ,  $Q_1^{23} = \Pi A A_\lambda^{-1} A_{\lambda\pi}^{-1} B_\pi^{-1}$ ,  $Q_0^{23} = -Q_1^{23}$ , а оператор  $B_\pi$  есть сужение оператора  $B$  на  $\mathbf{H}_\pi^2$  (в силу теоремы Банаха об обратном операторе оператор  $B_\pi : \mathbf{H}_\pi^2 \rightarrow \mathbf{H}_\pi$  — топлинейный изоморфизм). Таким образом, оператор  $H = H_1 \otimes H_2$ , где  $H_1 = A_{11}^{-1}(I - Q_0 - Q_1)F_1$ , а  $H_2 = F_2(A_{11} — сужение оператора A на  $\mathcal{U}_1^1$ ). Включение  $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M^1; \mathcal{U}_\alpha^1)$ , где  $\mathcal{U}_\alpha^1 = \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}^1$  показывается аналогично тому, как было показано включение  $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$ . Вектор-функция  $h(t)$  определяется как  $h_1(t) \otimes h_2(t)$ , где  $h_1 = A_{11}^{-1}(I - Q_0 - Q_1)f_1$ , а  $h_2 = 0$ . В силу бесконечной гладкости  $f = f_1 \otimes f_2$ ,  $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{U}_\alpha^1)$ .$

Таким образом, все условия теоремы 2 выполнены. Поэтому справедлива

**Теорема 8.** Пусть  $\lambda^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$ . Тогда при любом  $u_0$  таком, что  $(u_0, 0) \in \mathcal{A}^0$  и некотором  $T \in \mathbb{R}_+$  существует единственное решение  $u = (u_\sigma, 0, u_p, u_\theta)$  задачи (1), (2), являющееся квазистационарной полутраекторией, причем  $(u(t), t) \in \mathcal{A}^t$ , при всех  $t \in (0, T)$ .

Автор выражает благодарность профессору Г.А. Свиридуку за поддержку и интерес к данным исследованиям, а также профессору Favini и организаторам программы Erasmus Mundus за прекрасную возможность работы над этой статьей в г. Болонья, Италия.

## Литература

1. Осколков, А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина – Фойгта и жидкостей Олдройта / А.П. Осколков // Тр. ин-та математики АН СССР. – 1988. – №179. – С. 126 – 164.
2. Осколков, А.П. Нелокальные проблемы для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С.Л. Соболева / А.П. Осколков // Записки науч. семинаров ЛОМИ. – 1991. – Т. 198. – С. 31 – 48.
3. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи матем. наук. – 1994. – Т. 49, №4. – С. 47 – 74.
4. Осколков, А.П. О некоторых нестационарных линейных и квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей / А.П. Осколков // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. – 1976. – Т. 59. – С. 133 – 177.
5. Осколков, А.П. К теории жидкостей Фойгта / А.П. Осколков // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1980. – Т. 96. – С. 233 – 236.
6. Свиридюк, Г.А. Разрешимость задачи термоконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости / Г.А. Свиридюк // Изв. вузов. Математика. – 1990. – №12. – С. 65 – 70.
7. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором / Г.А. Свиридюк // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6, №5. – С. 216 – 237.
8. Сукачева, Т.Г. Исследование математических моделей несжимаемых вязкоупругих жидкостей: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Т.Г. Сукачева // Новгород. гос. ун-т. – Великий Новгород, 2004. – 249 с.
9. Сукачева, Т.Г. Нестационарная линеаризованная модель движения несжимаемой вязкоупругой жидкости / Т.Г. Сукачева // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2009. – №20 (158), вып. 11. – С. 77 – 83.
10. Сукачева, Т.Г. Нестационарная линеаризованная модель движения несжимаемой вязкоупругой жидкости высокого порядка / Т.Г. Сукачева // Вестн. ЮУрГУ. Сер. «Математическое моделирование и программирование». – 2009. – № 17 (150), вып. 3. – С. 86 – 93.
11. Sviridyuk G.A. Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov // Utrecht-Boston: VSP, 2003. – 179 p.

12. Свиридов, Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридов // Изв. РАН. Сер. математика. – 1993. – Т. 57, №3. – С. 192 – 207.
13. Levine, H.A. Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form  $Du_t = -Au + F(u)$  / H.A. Levine // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1973. – V.51, № 5. – P. 371 – 386.
14. Свиридов, Г.А. Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридов, Т.Г. Сукачева // Сиб. матем. журн. – 1990. – Т. 31, №5. – С. 109 – 119.
15. Свиридов Г.А. Фазовые пространства одного класса операторных уравнений / Г.А. Свиридов, Т.Г. Сукачева // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, №2. – С. 250 – 258.
16. Свиридов Г.А. Некоторые математические задачи динамики вязкоупругих несжимаемых сред / Г.А. Свиридов, Т.Г. Сукачева // Вестн. МагУ. Математика. – 2005. – Вып. 8. – С. 5 – 33.
17. Борисович, Ю.Г. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере-Шаудера / Ю.Г. Борисович, В.Г. Звягин, Ю.И. Сапронов // Успехи матем. наук. – 1977. – Т. 32, №4. – С. 3 – 54.
18. Марсден, Дж. Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Дж. Марсден, М. МакКракен – М.: Мир, 1980. – 368 с.
19. Бокарева, Т.А. Исследование фазовых пространств уравнений типа Соболева с относительно секториальными операторами: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Т.А. Бокарева // Санкт-Петербург, 1993. – 107 с.
20. Ладыженская, О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. – Изд. 2. – М.: Наука, 1970. – 288 с.
21. Свиридов, Г.А. Об одной модели слабосжимаемой вязкоупругой жидкости / Г.А. Свиридов // Изв. вузов. Матем. – 1994. – № 1. – С. 62 – 70.
22. Свиридов, Г.А. Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно ограниченным оператором / Г.А. Свиридов // ДАН СССР. – 1991. – Т.318, № 4. – С. 828 – 831.
23. Свиридов, Г.А. Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно секториальными операторами / Г.А. Свиридов // Докл. РАН. – 1993. – Т. 329, №3. – С. 274 – 277.
24. Свиридов, Г.А. Аналитические полугруппы с ядрами и линейные уравнения типа Соболева / Г.А. Свиридов, В.Е. Федоров // Сиб. матем. журн. – 1995. – Т.36, №5. – С. 1130 – 1145.
25. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. – М.: Мир, 1985. – 376 с.

Кафедра математического анализа,  
Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого  
tamara.sukacheva@novsu.ru

Поступила в редакцию 2 марта 2010 г.

**УДК 517.925**

# **ИССЛЕДОВАНИЕ УНИВЕРСАЛЬНОСТИ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКОГО ПОДХОДА К ОЦЕНКЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ЭПР-ДОЗИМЕТРИИ ЗУБНОЙ ЭМАЛИ**

*Ю.С. Тимофеев, Е.А. Шишкина, Д.В. Иванов, Р. Fattibene, А. Wieser,  
В.И. Заляпин*

## **UNIVERSALITY INVESTIGATION OF SEMI-EMPIRICAL APPROACH TO UNCERTAINTY ESTIMATION IN EPR-DOSIMETRY OF A TOOTH ENAMEL**

*Y.S. Timofeev, E.A. Shishkina, D.V. Ivanov, P. Fattibene, A. Wieser,  
V.I. Zalyapin*

Рассматриваются подходы к оценке неопределенностей в ЭПР-дозиметрии зубной эмали

*Ключевые слова:* ЭПР-дозиметрия, статистическая неопределенность, оценивание, моделирование

The approaches to uncertainty estimation in a EPR-dosimetry of tooth enamel are studied.

*Keywords:* EPR-dosimetry, statistical uncertainty, estimation, modelling

## **Введение**

Изучение последствий радиоактивного загрязнения для окружающей среды и человека является одной из наиболее актуальных проблем современной радиоэкологии и охраны природопользования. Очевидно, что для комплексного анализа последствий проживания человека на радиоактивно загрязненных территориях нужна достоверная дозиметрическая информация. Известно [1], что метод дозиметрии на основе Электронного Паремагнитного Резонанса (ЭПР) эмали зубов является практически единственным методом индивидуальной ретроспективной дозиметрии.

Методика ЭПР-дозиметрии является многоступенчатой (химическое приготовление, спектрометрические измерения, анализ спектров, калибровка), и на каждом из этапов возможно привнесение дополнительных погрешностей [2]. Это одна из причин того, что до сих пор не существует стандартизированного алгоритма расчета неопределенностей метода ЭПР-дозиметрии зубной эмали. В работе [3] был предложен метод оценки неопределенностей, который на сегодняшний день является одним из немногих описанных методов для задачи ЭПР-дозиметрии эмали зубов.

Метод представляет собой полуэмпирическую модель, параметры которой оцениваются на основе анализа стандартных отклонений повторных ЭПР-измерений в зависимости от измеренной дозы и рассеяния данных относительно калибровочной кривой. Модель была разработана и верифицирована на основе анализа результатов измерений одной из лабораторий-участниц межлабораторного сравнения результатов ЭПР-дозиметрии, использующей оригинальную методику. Следует заметить, что в рамках этого сравнения тестировалось 9 вариантов ЭПР-дозиметрических методик, выполненных в одинаковом экспериментальном

дизайне [3]. Авторы предположили, что данная модель может применяться и для других методик.

Полуэмпирические методы оценки неопределенностей включают 2 компонента одинаково важных для получения достоверных оценок неопределенностей:

1) правильность теоретических предположений о механизме возникновения неопределенностей (конструкция модели);

2) постановка эксперимента должна быть такой, чтобы параметры модели могли быть оценены достоверно и с достаточной для применения точностью.

Поэтому, говоря о методе оценки неопределенности, следует иметь в виду, как конструкцию модели, так и достаточность экспериментальных данных для оценки параметров модели.

Целью данной работы является проверка универсальности предложенного метода оценки неопределенностей ЭПР-дозиметрии на зубной эмали человека. Для этого был использован метод статистического моделирования Монте – Карло, с помощью которого варьировались параметры модели в пределах ошибки среднего, оцененные для разных методов (модель с распределенными параметрами). Сопоставление аналитического и статистического решений, полученных для одной и той же модели, прилагаемой к различным методам, позволит сделать вывод об универсальности метода оценки неопределенностей.

## 1. Описание полуэмпирического метода оценки неопределенности

Предложенный метод базируется на следующих предположениях: – общая неопределенность оценки ЭПР-дозиметрии эмали зубов складывается из двух компонент: неопределенность оценки фоновой дозы  $\sigma_{blank}$  (связанной с естественным радиационным фоном) и оценки техногенной дозы  $\sigma_{dosed}$  (искомая величина, связанная с радиационными инцидентами)

$$\sigma_{tot}^2 = \sigma_{blank}^2 + \sigma_{dosed}^2. \quad (1)$$

Параметр, соответствующий вариации фоновых доз  $\sigma_{blank}$ , определяется на основе оценки рассеяния результатов измерений необлученных образцов; – неопределенность оценки техногенной дозы  $\sigma_{dosed}$  связана, прежде всего, с воспроизводимостью ЭПР-измерения, которая зависит от величины измеряемой дозы, и описывается также двумя компонентами:

1) постоянная –  $\sigma_{const}$  ассоциируется в основном со спектральным шумом, оценивается по отклонению ЭПР-измерений эмали, облученной известной дозой, от калибровочной кривой;

2) относительная –  $\sigma_{rel}$ , связанная с анизотропией ЭПР-сигнала.

Когда ЭПР-сигнал существенно превышает величину спектрального шума (высокие дозы), воспроизводимость ЭПР-измерений определяется в основном второй компонентой. Обе компоненты  $\sigma_{dosed}$  чувствительны к алгоритму анализа спектров. Зависимость  $\sigma_{dosed}$  от величины измеряемой дозы D определяется уравнением

$$\sigma_{dosed}^2 = \left[ \sigma_{const}^2 + \left( \frac{\sigma_{rel} D}{100} \right)^2 \right] \theta(D - DC). \quad (2)$$

Здесь  $\theta(D - DC)$  – функция, определяющая характер неопределенности дозовой зависимости

$$\theta(D - DC) = 1 - \exp\left(-\frac{D}{DC}\right). \quad (3)$$

Неопределенность оценки внешней дозы вносит значимый вклад в общую неопределенность только тогда, когда полученная доза выше критической  $DC$ . Критическая доза, в свою

очередь, определяется по рассеянию измерений фоновых доз и равна 95-й процентилю их распределения. В данной работе они рассчитывались согласно уравнению

$$DC = 1,645 \frac{\sigma_{blank}}{b}. \quad (4)$$

в приближении нормального распределения фоновых доз.

Параметры данной модели было предложено [3] оценивать по данным эксперимента, представляющего собой построение калибровочной кривой в приближении линейной зависимости доза-ЭПР-отклика с использованием однородной смеси, приготовленной из эмали зубов. Смесь должна быть разделена на 30 порций по 95 – 110 мг каждая. Порции должны быть облучены известными дозами согласно схеме, представленной в таблице 1. Средние значения трех повторных измерений образца используются в качестве оценки дозы. Соответственно и при оценке параметров модели используются тройные измерения каждой порции и их стандартные отклонения. Модель разрабатывалась и верифицировалась изначально для метода ЭПР-дозиметрии зубной эмали, использующегося в ЭПР лаборатории Исследовательского центра Гельмгольца (HMGU, Мюнхен).

**Таблица 1**

Схема облучения образцов

Доза облучения Гр	0	0,1	0,2	0,5	1	1,5
Количество образцов	5	5	5	5	5	5

## 2. Материалы и методы

### 2.1. Экспериментальные методы

Проверка универсальности предложенной модели осуществлялась с помощью набора измерений, выполненных в аналогичном дизайне, но с использованием различных методик приготовления образцов и оценки ЭПР-сигналов. Исследование проводилось в рамках межлабораторного сравнения, подробного описанного в [3].

В эксперименте участвовало 3 лаборатории: уже названная лаборатория HMGU, ЭПР центр при Институте Физики Металлов (ИФМ) и ЭПР лаборатория Высшего Института Здравоохранения (ISS, Рим). Каждая из лабораторий, согласно собственному протоколу, приготовили однородную смесь из эмали зубов. Облучение и измерения образцов проводились согласно предложенной методике. В результате для каждой дозы облучения имелось 5 значений интенсивности ЭПР-отклика, полученных на основе трех повторных ЭПР-измерений. Затем лаборатории обменялись образцами и повторили измерения для образцов, приготовленных коллегами. Таким образом, всего было получено 9 пулов экспериментальных данных, соответствующих 9-ти вариантам. Поскольку целью данной работы не является сравнение конкретных методов, то произвольным образом пронумеруем методики и, в дальнейшем, будем использовать просто номера. Оценки параметров модели (1) – (4) для всех 9-ти методов приведены в таблице 2.

Как было отмечено выше, один из вариантов методики использовался для создания модели неопределенности. В таблице 2 соответствующие ему данные представлены под номером 9. Именно потому, что модель изначально была разработана для этой методики, параметры здесь оценены с наименьшим рассеянием.

### 2.2. Численное решение уравнений (1) – (4)

Параметры модели, как это видно из таблицы 2, были оценены с некоторой точностью. Поскольку модель подгонялась методом наименьших квадратов, то в случае соответ-

ствия модели экспериментальным данным, значения параметров модели концентрируются в окрестности наиболее вероятного значения. Для численного решения уравнений (1) – (4) был проведен статистический эксперимент, в рамках которого по нормальному закону разыгрывались параметры модели со средними значениями и стандартными отклонениями, соответствующим результатам, приведенным в таблице 2.

Таблица 2

Параметры полуэмпирической модели (приведены по данным [3])

Методика ЭПР-дозиметрии	Параметры			
	$\sigma_{blank}(\xi_{blank})$ , мГр – мат.ожид. (ст. откл.)	$\sigma_{rel}(\xi_{rel})$ , % – мат.ожид. (ст. откл.)	$\sigma_{const}(\xi_{const})$ , мГр – мат.ожид. (ст. откл.)	DC – критическая доза, мГр
1	66(72)	11(5)	51(141)	157
2	46(26)	7(2)	0(>10000)	104
3	112(52)	9(7)	83(120)	242
4	60(33)	4(6)	90(33)	165
5	22(37)	0(>1000)	50(28)	56
6	30(19)	5(1)	43(19)	63
7	35(42)	7(4)	70(34)	77
8	36(14)	5(1)	30(23)	88
9	10(2)	2(0,2)	37(1)	22

Нормальная случайная величина  $\psi$ , моделируемая по заданным параметрам –  $m$  – математическое ожидание и  $\sigma$  – среднеквадратичное отклонение, вычислялась с использованием формулы:

$$\psi = \sigma \left( \sum_{i=1}^{12} \lambda_i - 6 \right) + m, \quad (5)$$

где,  $\lambda_i$  – случайное число из интервала от 0 до 1, полученное с помощью генератора псевдослучайных чисел Borland C++ Builder 6.0.

Для каждого значения дозы по аналогии с методикой физического эксперимента (см. табл. 1) проводились розыгрыши нормальных случайных величин  $\xi_{blank}$ ,  $\xi_{const}$ ,  $\xi_{rel}$  с соответствующими параметрами из таблицы 2. Суммарная неопределенность  $\xi_{tot}$  рассчитывалась по формуле, полученной из системы (1) – (4):

$$\xi_{i,tot} = \sqrt{\xi_{i,blank}^2 + (\xi_{i,const}^2 + \left( \frac{\xi_{i,rel} D}{100} \right)^2)(1 - \exp^{-\frac{D}{DC}})}, \quad (6)$$

где  $\xi_{i,x}$  –  $i$ -я реализация соответствующей случайной величины. В качестве математического ожидания и среднеквадратичного отклонения суммарной неопределенности использовались их несмещенные оценки:

$$m(\xi_{tot}) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \xi_{i,tot} \quad (7)$$

$$\sigma^2(\xi_{tot}) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^N (\xi_{i,tot} - m(\xi_{tot}))^2. \quad (8)$$

Количество розыгрышней комбинаций случайных величин (уравнение (6)) должно быть таким, чтобы оценка математического ожидания имела погрешность менее 1% с вероятностью 0,99 для всех методов.

$$P\{|m^* - m| < 0,01m\} \geq 0,99, \quad (9)$$

где  $m^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2$  – несмещенная оценка математического ожидания. Чтобы оценить требуемое количество испытаний, необходимы предварительные оценки  $m^*$  и  $\sigma^*$ . Эти оценки получим, положив, первоначально,  $n = 100$ . Известно [4], что тогда  $N$  должно удовлетворять следующему неравенству:

$$2F\left(\frac{0,01m}{\sigma}\sqrt{N}\right) - 1 \geq 0,99, \quad (10)$$

где  $F$  – стандартная функция Лапласа. Из формулы (10) получаем:

$$N \geq \frac{2,58^2 \sigma^2}{0,01^2 m^2}. \quad (11)$$

Неизвестное математическое ожидание  $m$  заменим на его нижнюю оценку:

$$m^* - \varepsilon_m \leq m, \quad (12)$$

где  $\varepsilon_m = \frac{\sigma^* t_{0,995}}{\sqrt{n}}$ ,  $t_{0,995}$  – квантиль распределения Стьюдента с  $n$  степенями свободы, отвечающий надежности 0,995,  $\sigma^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^n (\xi_i - m^*)^2$  – несмещенная оценка дисперсии.

Среднеквадратичное отклонение, наоборот, заменим его верхней оценкой:

$$\sigma^2 \leq \frac{(n-1)\sigma^{*2}}{\lambda}, \quad (13)$$

где,  $\lambda = G_{n-1}^{-1}\left(\frac{1-0,995}{2}\right)$ ,  $G_{n-1}(x)$  – функция распределения хи-квадрат с  $n-1$  степенями свободы. Таким образом, окончательно для  $N$  получим следующую оценку:

$$N \leq \frac{2,58^2(n-1)\sigma^{*2}}{0,01^2 \lambda (m^* - \varepsilon_m)^2}. \quad (14)$$

Проведя численный эксперимент для  $n = 100$  и рассчитав для него оценки  $m^*$  и  $\sigma^*$ , получим по формуле (14), что  $N$  необходимо взять равным 10 000. Поэтому для каждого значения дозы проводилась серия из 10 000 розыгрышней параметров модели, по которым получали 10 000 значений суммарной неопределенности.

Решения, полученные статистически, сравнивались с аналитическим выражением, получаемым подстановкой в уравнения (1) – (4) значений  $\sigma_{blank}$ ,  $\sigma_{const}$  и  $\sigma_{rel}$  из таблицы 2.

### 3. Результаты

Поскольку предложенный метод оценки неопределенности является полуэмпирическим, то следует проверить как достаточность экспериментальной постановки, так и универсальность аналитического описания (1) – (4). Анализируя подгоночные параметры модели (1) – (4), представленные в таблице 2, приходим к выводу, что большинство параметров оценены крайне неточно. Точность оценок практически всех параметров модели хуже 30% от их среднего значения, за исключением метода 9. При этом  $\sigma_{const}$  для метода 2 и  $\sigma_{rel}$  для метода 5 в принципе невозможно описать как рассеянную величину. Это может быть обусловлено двумя причинами: либо статистической недостаточностью экспериментальных данных (неуниверсальность экспериментальной постановки в методике), либо невозможностью подогнать

данную модель к данным, полученным с использованием иной методики (неуниверсальность модели). Кроме того, возможно, что какая-либо из методик в принципе некорректна (например, если методика измерений несовместима с методикой приготовления образцов).

Если предположить, что метод оценки неопределенностей корректен и универсален, а слишком большое рассеяние подгоночных параметров в методах 2 и 5 связано с некорректностью методик, то для методов 1, 3, 4, 6, 7 и 8 аналитическое описание неопределенности должно совпасть со статистическим (здесь мы допускаем систематический сдвиг), и стандартное отклонение статистически моделируемой неопределенности не должно быть хуже 25% от среднего значения (мы принимаем это значение за удовлетворительную точность модели неопределенности применительно к конкретному методу). Так, для метода 9, на основе которого и создавалась проверяемая модель, аналитическая оценка неопределенностей практически полностью совпадает с оценкой математического ожидания суммарной неопределенности, полученной статистически (см. рис. 1).

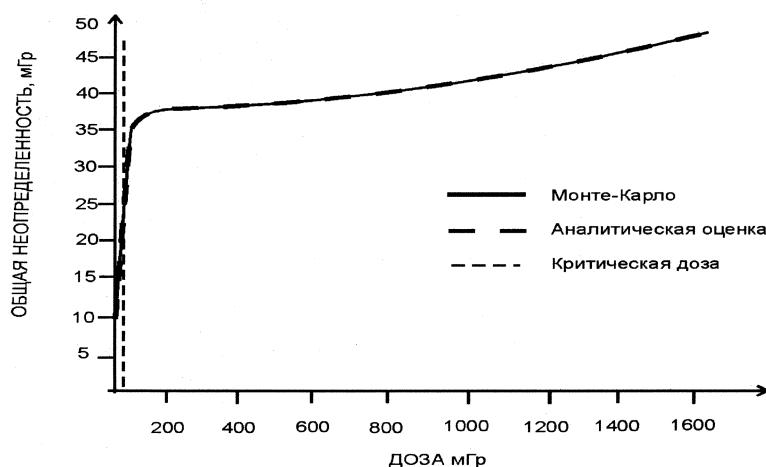


Рис. 1. Совпадение оценок неопределенностей, полученных на основе аналитического и статистического подходов

Если вышеназванные условия по удовлетворительной точности рассматриваемой модели не выполняются, то следует проверить экспериментальную постановку на универсальность. Если экспериментальная постановка окажется удовлетворительной для всех методов, то мы не обнаружим значимой корреляции между ошибками оценок параметров модели и разницей между аналитическим и статистическим описанием. Если ошибки параметров модели не коррелируют с разницей между двумя описаниями, то сама модель – не универсальна.

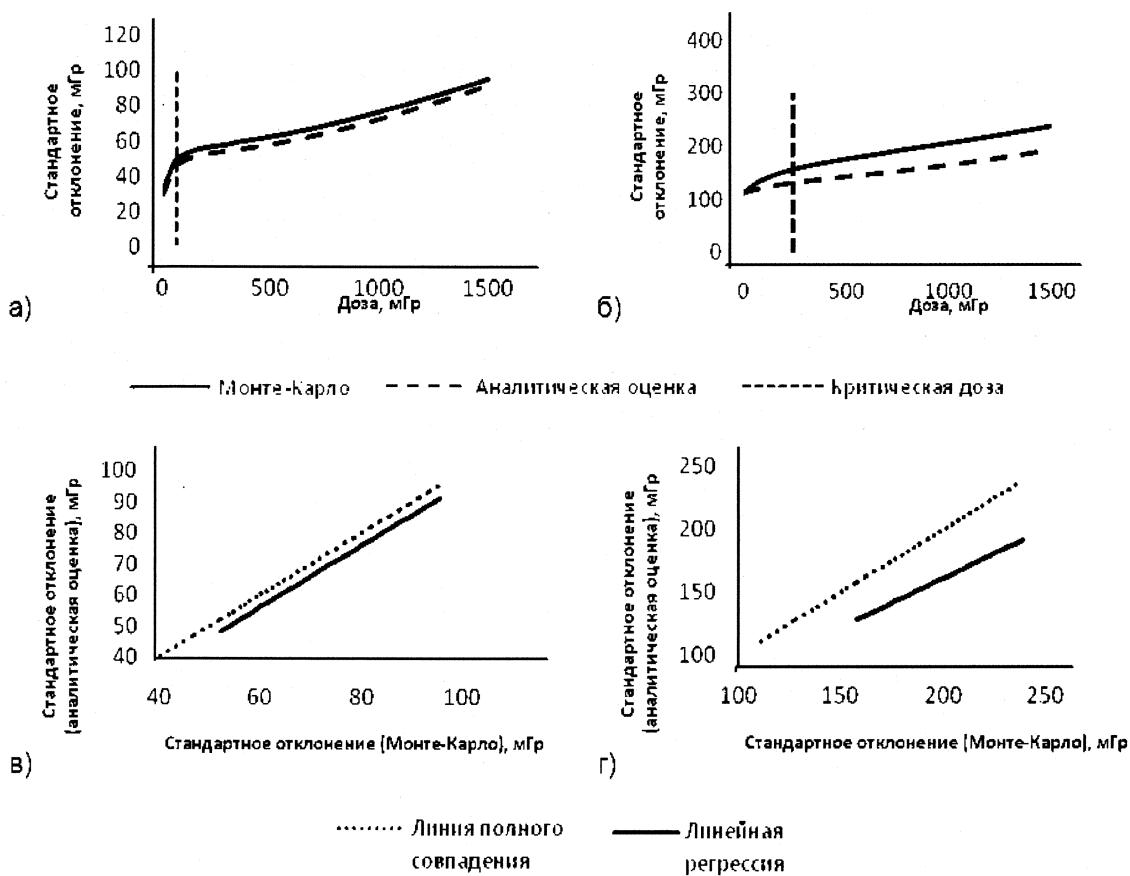
### 3.1. Проверка универсальности модели (1) – (4)

Для методов 1, 3, 4, 6, 7 и 8, которые мы условно приняли за «хорошие», было проведено статистическое решение уравнений (1) – (4) с учетом нормального рассеяния параметров. Сопоставление неопределенностей, полученных статистически и аналитически, по аналогии с расчетами, представленными для метода 9 на рис. 1, показало, что результаты статистического моделирования смешены для большинства наборов относительно аналитических оценок. На рис. 2, на примере методов 6 и 3 показаны сопоставления дозовых зависимостей неопределенностей (а, б) и корреляции между двумя оценками стандартных отклонений, полученными на интервалах доз выше критического значения (в, г).

Для метода 6 наблюдается систематический сдвиг данных статистического расчета относительно данных аналитического (рис. 2 а, в). С поправкой на систематический сдвиг

результаты расчета модели можно считать удовлетворительными. Для метода 3 кроме систематического сдвига присутствует различие между наклонами линии полного совпадения и линии регрессии (рис. 2 г), и одной только поправкой на систематический сдвиг полного совпадения добиться не удастся. Это различие в наклоне ожидаемой и наблюдаемой регрессий означает, что модель (1) – (4) не может быть признана удовлетворительной применимо к методу 3.

Таким образом, параметры линейной регрессии между данными аналитического и статистического расчетов являются показателями корректности и, следовательно, применимости рассматриваемого полумпирического метода для различных методик ЭПР-дозиметрии. Как показывает анализ – линейная регрессия хорошо описывает корреляцию между стандартными отклонениями для всех рассматриваемых методов. Параметры регрессий приведены в табл. 3.



**Рис. 2.** Примеры сопоставления аналитических и статистических оценок неопределенностей для методов 6 и 3: а) дозовая зависимость неопределенности для метода 6; б) дозовая зависимость неопределенности для метода 3; в) корреляция между оценками стандартных отклонений для метода 6; г) корреляция между оценками стандартных отклонений для метода 3

Наибольшее различие между аналитическими и статистическими оценками наблюдается для методов с большей критической дозой (см. табл. 2). Тем не менее, критическая доза не является очевидным показателем применимости модели. Например, для метода 5 параметр  $\sigma_{rel}$  нельзя описать статистически из-за большого рассеяния, хотя значение критической до-

зы невелико. Для методов 3 и 4 мы не можем принять результаты аналитического расчета, т.к. наклон регрессионных прямых значительно отличается от 1. Тем не менее, для большинства методов угол наклона близок к единице, что свидетельствует о систематическом смещении статистических решений от аналитических оценок.

Для методов 1, 6, 7, 8 мы можем использовать поправку на систематический сдвиг ( $\Delta = \text{const}$ ), которую можно взять равной  $-y_0$  ( $y_0$  с обратным знаком) из таблицы 3. Систематическое смещение возникает из-за формы распределения общей неопределенности, которая не является нормальной для всех методов на всем интервале исследуемых доз.

**Таблица 3**

Параметры уравнений линейной регрессии, описывающей корреляцию между стандартными отклонениями, полученными аналитически (переменная  $y$ ) и методом статистического моделирования Монте-Карло (переменная  $x$ )

Метод	Параметры уравнения линейной регрессии $y = y_0 + ax^1$	
	$y_0$	$a$
1	-86( $\pm 7$ )	1,1( $\pm 0,03$ )
3	4 ( $\pm 5$ )	0,79( $\pm 0,02$ )
4	49( $\pm 4$ )	0,5( $\pm 0,03$ )
6	-3,7( $\pm 0,7$ )	1( $\pm 0,01$ )
7	-9 ( $\pm 1$ )	0,96( $\pm 0,01$ )
8	-5,6( $\pm 0,5$ )	1,018( $\pm 0,006$ )

На рисунке 3 а представлена гистограмма значений общей неопределенности в сравнении с ожидаемой нормальной плотностью для метода 1 и дозы 200 мГр. Экспериментальные значения общей неопределенности не могут быть надежно описаны каким-либо стандартным распределением, таким как нормальное или логнормальное распределение.

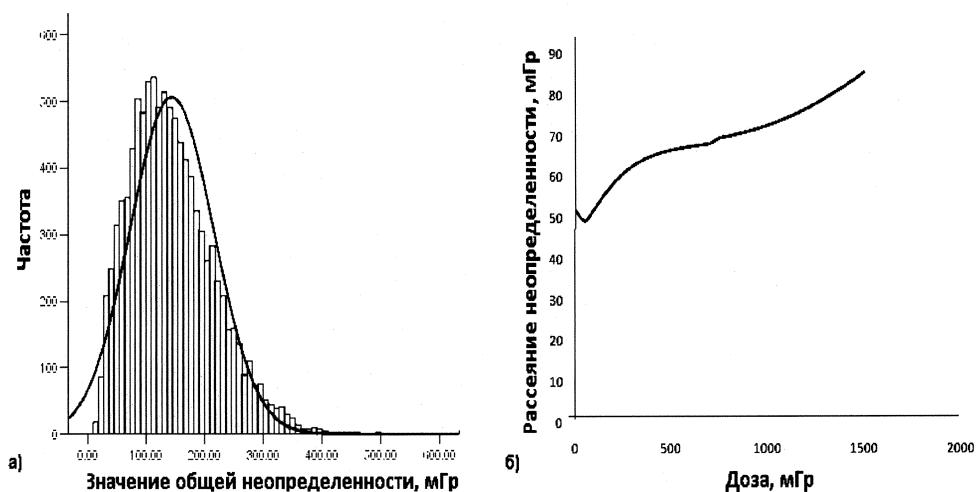
Также наблюдается дозовая зависимость статистических решений системы (1) – (4) для методов 1, 3, 4, 7 (рис. 3 б). На рисунке представлена зависимость рассеяния неопределенности от дозы для метода 3.

Как видно из рисунка 3 б, для метода 3 рассеяние неопределенности увеличивается в два раза на исследуемом интервале доз от 0 до 1500 мГр. Поэтому для больших значений доз точность оценки неопределенности хуже для методов 1, 3, 4, 7.

В таблице 4 представлены минимальные и максимальные значения рассеяния моделируемого стандартного отклонения и ширина 95% доверительного интервала в процентном отношении от среднего значения. Корреляционный анализ проводился для значений доз выше критического уровня.

Как видно из таблицы 4, точность решений системы (1) – (4) сильно различается. Заметим, что рассеяние стандартного отклонения меньше чем 3 – 4% от его среднего значения, и ширина 95% интервала находится в пределах от 4% до 7% для метода 9 (метод, на основе которого была построена данная модель). В допущении, что для применимости модели рассеяние стандартного отклонения должно быть меньше чем 25%, то только для методов 8, 6 и 4 мы можем принять оценки неопределенности. Поэтому, либо параметры модели должны быть уточнены для остальных методов (т.е. необходимо провести серии дополнительных испытаний), либо должен быть пересмотрен подход к оценке неопределенности.

Так как критерии для точности и надежности решений, а именно совпадение статистического и аналитического решений и не превышение рассеяния стандартного отклонения статистически моделируемой неопределенности порога в 25% от среднего значения, не выполняются, то следует определить, является ли постановка эксперимента статистически недостаточной, либо модель в ее математической формулировке не является универсальной.



**Рис. 3.** а) гистограмма значений общей неопределенности и график плотности нормального распределения для метода 1 и дозы 200 мГр, б) зависимость рассеяния неопределенности в зависимости от дозы для метода 3

**Таблица 4**

Характеристика точности оценок общей неопределенности, полученных численным моделированием с помощью модели (1) – (4)

Метод	Процентные доли от среднего значения (%) для стандартного отклонения		ширины 95% доверительного интервала
	стандартного отклонения	ширины 95% доверительного интервала	
1	33–50		56–92
3	33–38		56–69
4	26–33		44–59
6	17–32		28–52
7	29–38		47–67
8	17–32		30–56

Проверим экспериментальную постановку на универсальность. Корреляционный анализ зависимости параметров и  $y_0$  (см. табл. 4) от математических ожиданий и среднеквадратических отклонений параметров полуэмпирической модели (см. табл. 2) показывает, что на наклон линейной регрессии в большей степени влияет математическое ожидание и дисперсия постоянной компоненты  $\sigma_{\text{const}}$ , тогда как параметр  $y_0$  обладает слабой зависимостью от параметров модели. Результаты анализа приведены в таблице 5. Данные представлены значением коэффициента корреляции между соответствующими параметрами линейной регрессии и параметрами модели на уровне значимости  $\alpha = 0,05$ .

Как видно из таблицы 5, не обнаружено значимой корреляции между стандартными отклонениями (являющимися показателями точности оценок параметров модели) и разницей между аналитическим и статистическим описанием. Поэтому именно модель [3] в ее математической формулировке не может быть признана универсальной.

**Таблица 5**

Результаты корреляционного анализа зависимости параметров линейной регрессии от параметров полуэмпирической модели

Параметры полуэмпирической модели		Параметры линейной регрессии	
		$a$	$y_0$
Математическое ожидание	$\sigma_{blank}$	-0,4	-0,05
	$\sigma_{rel}$	0,24	-0,7
	$\sigma_{const}$	-0,8	0,42
Стандартное отклонение	$\sigma_{blank}$	-0,018	-0,55
	$\sigma_{rel}$	-0,58	0,04
	$\sigma_{const}$	0,07	-0,6

#### 4. Дискуссия

Приведенный метод эмпирического изучения неуниверсальности модели неопределенности ЭПР базируется только на данных о средних значениях и точности оценок параметров модели. Во внимание не принимается какая-либо априорная информация о самих методах ЭПР-измерений. Поэтому, исключение из рассмотрения методов 2 и 5 в допущении, что они «плохие», не должно быть понято как критика этих методик. Предлагаемый метод проверки универсальности модели изначально строился так, чтобы он мог быть использован независимо от экспертных суждений, тогда, когда объективные оценки надежности того или иного метода не доступны. И предложенный нами подход с использованием сравнения результатов аналитического и статистического моделирования, как видно из результатов, является удобным и наглядным.

Однако, чтобы у читателя не сложилось мнение о том, что методы, исключенные из рассмотрения, являются на самом деле некорректными, стоит заметить, что, по крайней мере, метод 5 использует новейшее и наиболее чувствительное оборудование; тесты приготовления образцов в рамках этого метода так же удовлетворительны [5]. Кроме того, метод участвовал в ряде международных межлабораторных сравнений и всегда входил в пятерку лучших [6, 7].

Конечно, предложенный подход проверки модели на универсальность не может дать ответ на вопрос, возможно ли вообще построение универсальной модели неопределенности для различных методов ЭПР-дозиметрии. Чтобы попытаться ответить на этот вопрос, стоит внимательно рассмотреть на многоступенчатость методик ЭПР-дозиметрии, которая проиллюстрирована таблицей 6. Как видно из таблицы 6, одни источники неопределенности интерферируют с другими. Например, качество приготовления образца влияет на форму спектра и величину шума, при этом, в зависимости от параметров записи спектров и типа резонатора, это может быть заметно в большей или меньшей степени, то есть приготовление образцов и аппаратурные настройки не являются независимыми факторами. Кроме того, вариация спектральных шумов и формы ЭПР-сигнала влияет на результат обработки сигнала, который так же зависит и от используемого алгоритма деконволюции для различных спектральных компонент и оценки величины радиационной составляющей суммарного сигнала. Более того, дополнительным источником неопределенности является калибровка (т.е. процесс перехода от относительных единиц величины ЭПР-отклика к абсолютным единицам поглощенной дозы). То есть названные источники неопределенности оценки ЭПР сигнала не являются независимыми для различных методов и могут, накладываясь друг на друга, создавать противоположный эффект. Например, измерения, проводимые в рамках метода 9, демонстрируют высокую точность и малое значение критической дозы при

фиксированном приготовлении образцов (табл. 2). Однако, изменив в методике лишь приготовление образцов, при прочих равных, метод становится одним из худших (метод 3 в табл. 2). Интерференция источников неопределенностей вызывает сомнение в возможности создания унифицированной модели неопределенностей на основе полуэмпирического подхода, подобного описанному выше. Таким образом, разработка описания неопределенности, типичной для каждого конкретного метода ЭПР-дозиметрии, кажется более предпочтительной. Проанализированная полуэмпирическая модель априори предполагала независимость параметров. Вообще говоря, сама возможность такого «примитивного» моделирования неопределенности ЭПР-дозиметрии вызывает некоторые сомнения. На итальянской Национальной Конференции по Радиационной Защите, проходившей в г. Пизе в 2008 г. [8] был представлен доклад о сопоставлении неопределенностей, предсказываемых на основе 2-х «примитивных» полуэмпирических моделей и 1-й эмпирической.

**Таблица 6**

**Классификация погрешностей в ЭПР-дозиметрии**

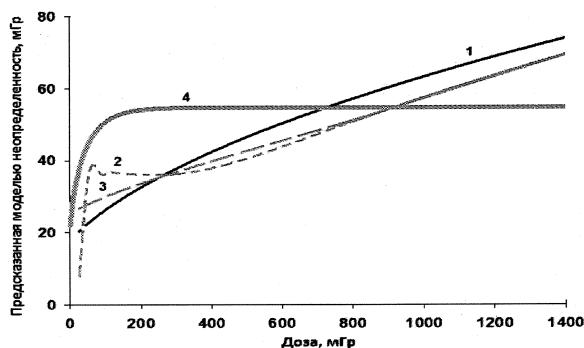
<b>Источник неопределенности</b>	<b>Описание и характеристика источника</b>
1. При приготовлении образца качество химической экстракции органических включений;	Независимый параметр общей неопределенности
2. Масса образца – точность измерения массы;	Независимый параметр общей неопределенности
3. При измерении спектра: – аппаратурная погрешность, включая эффект белого шума, стабильность прибора, тип резонатора, параметры записи спектра и т.д ; – поправочные коэффициенты, зависящие от массы образца;	Добротность резонатора зависит от массы образца (фактор 2)
4. Анализ спектра и оценка интенсивности сигнала: – алгоритм анализа спектра – эффект микровключений в образце и отношение сигнал/шум; – анизотропия сигнала;	Неопределенность зависит как от алгоритма анализа спектров, так и от факторов 1 – 3
5. Индивидуальная чувствительность эмали зубов к ионизирующему излучению	Независимый параметр общей неопределенности
6. Калибровочный стандарт	Независимый параметр общей неопределенности
7. Калибровка: – линейная зависимость от дозы; – точность оценки параметров калибровочной кривой	Большая неопределенность в оценке интенсивности сигнала (фактор 4) и индивидуальная вариабельность радиационной чувствительности (фактор 5) влияют на ошибку оценки параметров калибровочной кривой

Все 3 модели подгонялись к данным метода 5 (см. табл. 2). На рис. 4 представлены сопоставления предсказаний трех моделей согласно [8] и исследованной выше модели [3] для

метода 5. Как видно, максимальное различие в предсказаниях моделей неопределенности, построенных на одних и тех же данных (кривые 1, 2, 3), имеют место в области низких доз (< 200 мГр), которые представляют наибольший практический интерес в задачах радиационной защиты населения.

При этом следует иметь в виду, что экспериментальные данные, использованные для оценки неопределенности, были получены на смеси эмали зубов. То есть было искусственно минимизировано влияние некоторых факторов, а именно:

- 1) индивидуальная радиационная чувствительность эмали;
- 2) разная начальная (фоновая) доза у разных доноров;
- 3) индивидуальная вариация парамагнитной анизотропии разных образцов.



**Рис. 4.** Сопоставление предсказаний различных моделей неопределенностей с параметрами, подогнанными по одному и тому же набору данных: 1) полуэмпирическая модель 1 [8]; 2) полуэмпирическая модель 2 [8]; 3) эмпирическая модель [8]; 4) полуэмпирическая модель [3]

Иными словами, для индивидуальных измерений зубов наблюдаемые различия между предсказаниями моделей могут значительно увеличиться и в области доз выше 200 мГр. Судить о том, какая из предложенных моделей неопределенности ЭПР-дозиметрии наиболее адекватна, не представляется возможным.

Набор использованных данных был ограничен тридцатью трехкратными измерениями для 6-ти доз. Эмпирическое же описание требует специальной постановки эксперимента, более подробной, нежели предложенная выше схема и, в конечном итоге, много большего набора экспериментальных данных для дозовой зависимости. Для метода ЭПР дозиметрии подготовка и измерение 30 образцов — это большой объем рутинной работы. Кроме того, себестоимость каждого из измерений велика. Поэтому комбинация экспериментальных результатов и моделирования — наиболее приемлемый путь к оценке неопределенности.

Таким образом, работа [3] явилась первым шагом на пути к пониманию источников неопределенностей и их нетривиальному пересечению. Анализ предложенной в [3] модели позволил убедиться в том, что единая универсальная аналитическая модель неопределенности метода ЭПР практически нереализуема. Очевидно, что наиболее перспективным для расчета неопределенности ЭПР дозиметрии является применение Байесовского подхода к моделированию.

## 5. Выводы

Таким образом, предложен объективный метод проверки универсальности модели, позволяющий принимать решения в отсутствии экспертов либо дополнительной априорной ин-

формации. Применение этого метода позволило доказать, что аналитическая модель неопределенности [3] не является универсальной.

Более того, анализ источников неопределенностей и литературных данных позволяет усомниться, что единая универсальная аналитическая модель неопределенности метода ЭПР реализуема.

## Литература

1. Egersdorfer, S. Tooth enamel as a detector material for retrospective EPR dosimetry / S. Egersdorfer, A. Wieser, A. Muller. – Appl. Radiat. Isot. – 1996. – P. 1299 – 1303.
2. Toth enamel EPR dosimetry: sources of error and their correction / A.I. Ivannikov, V.G. Skvortsov, V.F. Stepanenko, A.F. Tsyb, L.G. Khamidova, D.D. Tikunov. – Applied radiation and Isotopes. – 2000. – Vol. 52 – P. 1291 – 1296.
3. Assessment of performance parameters for EPR dosimetry with tooth enamel / A. Wieser, P. Fattibene, E.A. Shishkina, D.V. Ivanov, V. De Coste, A. Guttler, S. Onori. – Radiation Measurements. – 2008. – № 43. – P. 731 – 736.
4. Заляпин В.И. Математическая статистика / В.И. Заляпин, Е.В. Харитонова. – Челябинск, 2008.
5. Comparison of sample preparation and signal evaluation methods for EPR analysis of tooth enamel / A. Wieser, S. Onori, P. Fattibene, D. Aragno, A. Romanyukha, E. Ignatiev, A. Koshta, V. Skvortsov, A. Ivannikov, V. Stepanenko, V. Chumak, S. Sholom, E. Haskell, R. Hayes, G. Kenner. – Applied radiation and Isotopes. – 2000. – № 52 – P. 1059 – 1064.
6. The Second intercomparison on EPR tooth dosimetry / A. Wieser, K. Mehta, S. Amira, D. Aragno, S. Bercea, A. Brik, A. Bugai, F. Callens, V. Chumak, B. Ciesielski, R. Debuyt, S. Dubovsky, O.G. Duliu, P. Fattibene, E. Haskell, R. Hayes, E. Ignatiev, A. Ivannikov, V. Kirillov, E. Kleschenko, N. Nakamura, M. Nather, J. Nowak, S. Onori, B. Pass, S. Pivovarov, A. Romanyukha, O. Scherbina, A.I. Shames, S. Sholom, V. Skvortsov, V. Stepanenko, D.D. Tikounov, S. Toyoda. – Radiation Measurements. – 2000. – № 32 – P. 549 – 557.
7. The 3rd international intercomparison on EPR tooth dosimetry: Part 1, general analysis / A. Wieser, R. Debuyt, P. Fattibene, A. Meghzifene, S. Onori, S.N. Bayankin, B. Blackwell, A. Brik, A. Bugay, V. Chumak, B. Ciesielski, M. Hoshi, H. Imata, A. Ivannikov, D. Ivanov, M. Junczewska, C. Miyazawa, B. Pass, M. Penkowski, S. Pivovarov, A. Romanyukha, L. Romanyukha, D. Schauer, O. Scherbina, K. Schultka, A. Shames, S. Sholom, A. Skinner, V. Skvortsov, V. Stepanenko, E. Tielewuhan, S. Toyoda, F. Trompier. – Applied radiation and Isotopes. – 2005. – № 62(2) – P. 163 – 171.
8. Protocollo per la valutazione dei limiti di applicabilità della dosimetria con smalto dentale / S. La Civita, P. Fattibene, E. Shishkina, A. Wieser, D. Ivanov, V. De Coste, A. Guttler, S. Onori. – Convegno nazionale di radioprotezione. Cinquantenario AIRP: storia e prospettive della radioprotezione. – Pisa, 2008 – P. 280 – 287.

Кафедра математического анализа,  
Южно-Уральский государственный университет  
swimmer\_86@mail.ru

Поступила в редакцию 10 сентября 2009 г.

## CAEBEANS BROKER: БРОКЕР РЕСУРСОВ СИСТЕМЫ CAEBEANS

*A. V. Шамакина*

## CAEBEANS BROKER: RESOURCE BROKER IN CAEBEANS SYSTEM

*A. V. Shamakina*

В работе дано описание CAEBangs Broker – автоматизированной системы регистрации, анализа и предоставления ресурсов распределенной вычислительной среды. Приводятся логическая структура, архитектура очередей и алгоритм планирования CAEBangs Broker. Описаны аспекты реализации грид-сервиса CAEBangs Broker в контейнере WSRFLite.

*Ключевые слова:* CAE, CAEBangs, грид-сервис, брокер ресурсов, алгоритм планирования

This paper describes CAEBangs Broker – automated system for registration, analysis and provision of resources of distributed computing environment. The logical structure, the architecture of queues and scheduling algorithm CAEBangs Broker are presented. Aspects of the implementation of the Grid service CAEBangs Broker in container WSRFLite are described.

*Keywords:* CAE, CAEBang, grid-service, resource broker, scheduling algorithm

### Введение

В настоящее время важную роль при разработке новых технологических линий и производственных технологий играют компьютерное моделирование и виртуальные испытательные стенды, зачастую требующее значительного количества вычислительных ресурсов и времени. В качестве примера можно привести классическую задачу обтекания профиля крыла самолета в аэродинамике или использование в промышленности стендов для задачи овализации труб при их закалке и последующем отпуске [1]. Такой подход позволяет существенно повысить точность анализа проектных вариантов продукции, значительно сократить стоимость опытно-конструкторских работ и проводить виртуальные эксперименты, которые в реальности выполнить невозможно.

Для решения данной проблемы предлагается использовать программные системы класса CAE (Computer Aided Engineering), позволяющие эффективно осуществлять суперкомпьютерное моделирование сложных технологических процессов, а также вычислительные ресурсы грид.

В качестве перспективного подхода к решению задач с помощью инженерных пакетов в распределенных вычислительных средах предлагается использовать технологию CAEBangs [2, 3]. В ее основе лежит обеспечение сервисно-ориентированного предоставления программных ресурсов базовых компонентов CAE-систем и формирование деревьев проблемно-ориентированных оболочек, инкапсулирующих процедуру постановки и решения конкретного класса задач. Технология CAEBangs автоматизирует: декомпозицию задач

на типовые подзадачи; поиск вычислительных ресурсов; постановку задач соответствующим базовым компонентам САЕ-систем; мониторинг хода решения задач; предоставление результатов решения задачи пользователю.

Система CAEBeans представляет собой совокупность программных средств, данных и аппаратных ресурсов, ориентированных на поддержку технологии CAEBeans. CAEBeans Broker – один из компонентов, входящих в систему CAEBeans. Брокер ресурсов представляет собой автоматизированную систему регистрации, анализа и предоставления ресурсов распределенной вычислительной среды.

Грид объединяет разнородные вычислительные ресурсы, использует отличные друг от друга стратегии доступа к ним. Научные, инженерные и коммерческие задачи, решаемые посредством грида, предъявляют к системе различные требования. Вычислительные ресурсы обычно принадлежат нескольким организациям, имеющим свои правила управления ресурсами, использования и определения стоимости их для пользователей. Доступность и загруженность ресурсов также могут динамически изменяться во времени.

В соответствии с этим актуальной проблемой является разработка систем управления ресурсами грида, нацеленных на эффективное решение задач и рациональное использование ресурсов в соответствии с выбранным алгоритмом планирования ресурсов в распределенных вычислительных средах.

В работе [4] рассматриваются пакетные и планирующие системы. К наиболее известным системам относится Condor [5]. Condor – это пакет программ для выполнения пакетных заданий на платформах UNIX. Главными особенностями Condor являются автоматическое нахождение ресурсов, распределение работ, установка контрольных точек и миграция процессов.

В переносимой системе PBS (Portable Batch System) [6] реализована пакетная организация очереди заданий и управления рабочей нагрузкой, первоначально разработанная для NASA. Планировщик заданий PBS позволяет локальным узлам устанавливать их собственную дисциплину планирования во времени и пространстве. PBS адаптирован к различным вариантам политики администрирования и обеспечивает расширяемую аутентификацию и модель защиты, регистрация заданий, отслеживание их выполнения и другие административные функции осуществляются посредством графического интерфейса.

Платформа Sun Grid Engine (SGE) [7] основана на программном обеспечении, разработанном фирмой Genias, известном как Codine/GRM. В SGE задания находятся в зоне ожидания, а очереди на серверах обеспечивают сервисы для заданий. Потребитель вводит задание в SGE и объявляет профиль необходимых требований для его выполнения. SGE определяет заданию соответствующую очередь и распределяет его либо с высшим приоритетом, либо с самым длинным временем ожидания, пробуя запускать новые задания на наиболее соответствующей или наименее загруженной очереди.

Средство распределения нагрузки LSF (Load Sharing Facility) [8] – это коммерческая система от Platform Computing Corp. В настоящее время является наиболее широко используемой коммерческой системой для управления выполнением заданий. LSF включает распределенный механизм разделения нагрузки и программное обеспечение для организации очередей заданий, которое управляет, контролирует и анализирует ресурсы и рабочие нагрузки на сети разнородных компьютеров, имея при этом возможности обеспечения отказоустойчивости.

Многие системы управления ресурсами грида (например, Legion [9], Condor [5], AppLeS PST [10], NetSolve [11], PUNCH [12], XtremWeb [13] и т.д.) используют простые схемы распределения, когда компонент, отвечающий за распределение, решает, какие задачи должны быть выполнены на каком ресурсе, используя функции стоимости, задаваемые системными параметрами. Целью таких систем распределения является увеличение пропускной способ-

ности системы, ее загруженности и уменьшения времени выполнения задач, а не увеличение рентабельности ресурсов и приложений.

В работе [14] предложено использование экономического подхода к планированию и распределению ресурсов, когда решения о распределении ресурсов производятся динамически и зависят от текущих требований пользователей. Подход реализован в системе GRACE [15]). Это – рыночная модель распределения ресурсов, когда цена каждого ресурса определяется потребностями в нем пользователей и его доступностью. Таким образом, в системе грид пользователь конкурирует с другими пользователями и владелец ресурса – с другими владельцами ресурсов. Экономический подход позволяет успешно управлять децентрализованными и гетерогенными ресурсами так, как это происходит в реальной экономике. Экономические системы управления ресурсами грид динамически определяют наилучшие ресурсы, учитывая их цену и производительность, и распределяют задачи на этих ресурсах так, чтобы удовлетворить потребности пользователей.

Однако использование в системе CAEBeans вышеперечисленных брокеров ресурсов и планировщиков является невозможным, поскольку они работают на более низком системном уровне, чем компонент CAEBeans Broker. Кроме того, ни одна из ранее созданных систем управления ресурсами не удовлетворяет специфике системы CAEBeans [16], в рамках которой необходимо учитывать не только характеристики ресурсов, но и наличие установленных инженерных пакетов, количество доступных лицензий на них и др.

В настоящей статье рассмотрены архитектура и аспекты реализации компонента CAEBeans Broker. Статья организована следующим образом. В разделе 1 приводится описание логической структуры, архитектуры очередей и алгоритма планирования CAEBeans Broker. В разделе 2 обсуждается реализация грид-сервиса CAEBeans Broker в контейнере WSFLite. В заключении суммируются основные результаты, полученные в данной статье.

## **1. CAEBeans Broker**

CAEBeans Broker – это компонент системы CAEBeans, который принимает задания от пользователя, согласовывает требования к ресурсам и направляет задания на подходящий вычислительный элемент. Можно выделить следующие основные задачи брокера ресурсов: обработка каталога ресурсов грид-среды; анализ запросов на предоставление ресурсов, поступающих от компонентных CAEBean; сбор и предоставление информации об актуальном состоянии грид-среды.

Реализация CAEBeans Broker производится на языке программирования Java в виде грид-сервиса на основе Web Services Resource Framework (WSRF), спецификаций, дополняющих стандарты web-служб и позволяющих устанавливать связь между Web-службами и ресурсами (WS-Resource, WS-ResourceProperties, WS-ResourceLifetime, WS-BaseFaults, WS-ServiceGroup, WS-Notification). Данный подход обеспечивает независимость компонента от вычислительной платформы, предоставление полной информации о текущем состоянии экземпляра сервиса, а также поддерживает возможность надежного и безопасного исполнения, управление временем жизни; рассылку уведомлений об изменении состояния экземпляра сервиса, управление политикой доступа к ресурсам, управление сертификатами доступа и виртуализации.

### **1.1. Логическая структура CAEBeans Broker**

Общая структура брокера ресурсов CAEBeans Broker приведена на рис. 1. Программный компонент представляет собой грид-сервис, предоставляющий интерфейс управления ресурсами, содержащимися в каталоге ресурсов.

В процессе работы брокера поиск требуемых ресурсов выполняется для нескольких за-

даний одновременно. При старте компонента CAEBeans Broker производится регистрация на определенном порте грид-сервиса, к которому при помощи протокола SOAP 1.2 обращается компонент CAEBeans Server для поиска подходящих ресурсов. Описание методов грид-сервиса CAEBeans Broker, а также протокола взаимодействия компонентов CAEBeans Server и CAEBeans Broker приводится в работах [17, 18].

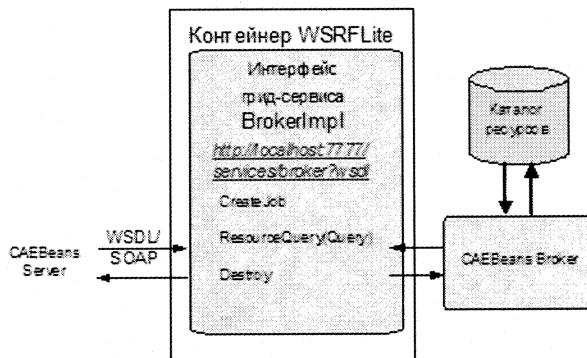


Рис. 1. Структура брокера ресурсов

## 1.2. Алгоритм планирования брокера ресурсов

Алгоритм планирования брокера ресурсов основывается на очередях к вычислительным ресурсам, архитектура которых описана в работе [18], и понятии физического и виртуального ресурсов.

При запуске грид-сервис CAEBeans Broker оперирует понятием физического ресурса. Под физическим ресурсом или целевой системой понимается совокупность аппаратных ресурсов вычислительной системы, операционной системы, инженерных пакетов и системных CAEBean, которые играют роль грид-оболочек над инженерными пакетами. На целевой системе в качестве программного обеспечения промежуточного слоя установлен Unicore 6.0. Вся информация о целевых системах, лицензиях и заданиях хранится в каталоге ресурсов, который представляет собой базу данных.

Виртуальный ресурс – это часть физического ресурса, которая имеет собственную очередь заданий. В каждый момент времени на виртуальном ресурсе выполняется только одно задание. Это существенно облегчает процесс управления ресурсами.

Поступающие к CAEBeans Broker задания помещаются во входную очередь – *inputQueue*. Обработку заданий осуществляет одна из подсистем брокера ресурсов – планировщик. Планировщик ресурсов в цикле извлекает задания из очереди *inputQueue*, находит подходящий физический ресурс, формирует из него виртуальный ресурс путем выделения физических узлов, количество которых определяется требованиями задания. Тем самым осуществляется первоначальное распределение физических ресурсов на виртуальные. Для каждого виртуального ресурса создается своя очередь заданий. Совокупность всех очередей к виртуальным ресурсам обозначим *virtualQueue*. Процесс создания виртуальных ресурсов продолжается до тех пор, пока не закончатся свободные физические ресурсы. Последующие задания из очереди *inputQueue* будут ставиться планировщиком в очереди к уже созданным виртуальным ресурсам: планировщик находит все виртуальные ресурсы, удовлетворяющие требованиям задания, ставит задание к каждому из них в очередь.

При обработке заданий планировщиком возможна ситуация, когда задание не может быть решено посредством имеющихся виртуальных ресурсов, но объединение вычислитель-

ных возможностей нескольких виртуальных ресурсов, находящихся на базе одного физического ресурса, позволит обеспечить решение данного задания. В данном случае планировщик определит задание в очередь *waitQueue*. На рис. 2 приведены очереди к вычислительным ресурсам.

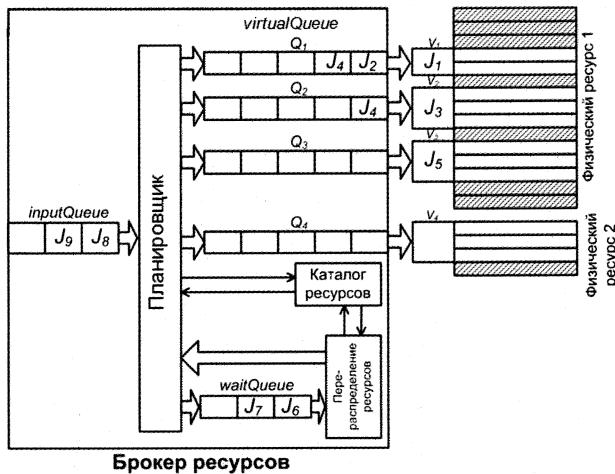


Рис. 2. Очереди к вычислительным ресурсам

Кроме того, планировщик осуществляет поиск подмножества виртуальных ресурсов, которые в объединении дают один большой ресурс для решения задания. Данная задача является обратной к известной «задаче о рюкзаке». Ведется поиск оптимального варианта: требуется отобрать некоторое подмножество виртуальных ресурсов с минимальным суммарным числом узлов, достаточным для решения задания. Искомое подмножество должно удовлетворять всем требованиям задания, включая программные. После нахождения такого подмножества производится маркировка всех виртуальных ресурсов, входящих в него. При дальнейшей обработке планировщиком заданий из очереди *inputQueue* распределение будет проводиться по всем ресурсам, кроме маркированных. При появлении следующего «большого» задания новой маркировки производиться не будет, чтобы предотвратить блокировку ресурсов. Планировщик ограничится помещением задания в очередь *waitQueue*.

Таким образом, после окончания вычислений на всех маркированных виртуальных ресурсах можно произвести объединение. Планировщик извлекает из очереди *waitQueue* задания и распределяет их заново по виртуальным ресурсам, включая задание, для которого выполнено объединение. Если очередь *waitQueue* содержит задания, требующие нового объединения ресурсов, то производится новый процесс маркировки. При этом задание остается в очереди ожидания. Процесс перераспределения ресурсов с помощью механизма маркировки носит динамический характер.

Если всех физических ресурсов, имеющихся в наличие у CAEBeans Broker, не достаточно для выполнения некоторого задания, то компоненту CAEBeans Server отправляется соответствующая информация.

## 2. Реализация очередей брокера ресурсов

В многопроцессорных системах часто возникает проблема, связанная с возникновением блокировок. Проявляется она в ситуации, когда параллельные потоки конкурируют за доступ к некоторому синхронизированному ресурсу. Если доступ к ресурсу реализован с помощью обычной взаимоисключающей блокировки (*mutex*), то доступ к нему получает только

один поток, а остальные ждут своей очереди. Если таких потоков несколько, то суммарное время ожидания всех потоков может существенно превысить время, которое требуется на непосредственное выполнение работы.

Решить проблему можно отказавшись от использования блокировок. Часто в роли общего ресурса является некоторая коллекция. Традиционный подход заключается в том, что коллекция оборачивается в синхронизирующую обертку, например, с помощью метода `Collections.synchronizedCollection()`. Это означает, что любой доступ к этой коллекции автоматически устанавливает блокировку, а следовательно, порождает возникновение блокировки.

В Java 5 был существенно расширен набор инструментов для разработки параллельных приложений за счет стандартных классов пакета `java.util.concurrent`. Например, есть специальные параллельные разновидности стандартных коллекций JCF, которые не требуют блокировок, что позволяет в большинстве случаев избежать их возникновения при одновременном обращении к ним из нескольких потоков [19].

Для реализации очередей `inputQueue`, `waitQueue` и очередей к виртуальным ресурсам `virtualQueue` используется библиотека классов `java.util.concurrent.ConcurrentLinkedQueue`, в которой есть реализация интерфейса `java.util.Queue`, обеспечивающая возможность одновременного добавления и извлечения элементов нескольким потокам без необходимости использовать блокировки. Подобная структура данных для организации очереди заданий наилучшим образом подходит для входной очереди планировщика, в которую могут с одной стороны добавляться задания многими потоками, а с другой – также извлекаться и обрабатываться многими потоками пула.

## 2.1. Модели организации поточной обработки

Работа многих серверных приложений связана с выполнением большого количества коротких задач, поступающих от какого-либо удаленного источника. Запрос поступает на сервер посредством сетевых протоколов, через очередь JMS, путем опроса базы данных и др. Часто возникает ситуация, когда обработка отдельной задачи кратковременна, а количество запросов велико.

Одной из наиболее простых моделей является создание нового потока для каждого поступившего на сервер запроса. Данный подход носит название «поток-на-запрос» и подходит для разработки прототипа серверного приложения. Однако он имеет значительные недостатки, наиболее значимым из которых является то, что системные издержки по созданию и удалению нового потока для каждого запроса перекрывают по времени непосредственную обработку запросов.

В дополнение к издержкам создания и разрушения потоков активные потоки потребляют системные ресурсы. Создание слишком большого количества потоков в одной JVM может привести к нехватке системной памяти или замедлению из-за чрезмерного потребления памяти. Следовательно, серверным приложениям необходимы ограничения на количество запросов, обрабатываемых в заданное время.

Решение проблемы издержек жизненного цикла потока предполагает использование потока пулов. При многократном использовании потоков издержки по их созданию распределяются на несколько задач, устраняется задержка по времени, которая ранее была необходима для создания потока. Таким образом, запрос обрабатывается немедленно, это делает приложение более эффективным. Правильно настроив количество потоков в пуле потоков, можно предотвратить пробуксовку ресурсов, заставив любые запросы, если их количество выходит за определенные пределы, ждать до тех пор, пока поток не станет доступным, чтобы его обработать [20].

Пулы потока – не единственный способ использовать множественные потоки в серверном приложении. Иногда довольно разумно генерировать новый поток для каждой новой задачи. Однако, если частота создания задач высока, а их средняя продолжительность низка, порождение нового потока для каждой задачи приведет к проблемам с производительностью.

Другая распространенная модель организации поточной обработки – наличие единого фонового потока и очереди задач для задач определенного типа. Набор инструментальных средств для абстрактных окон AWT и Swing используют эту модель, в которой есть специальный поток событий GUI, выполняющий работу по изменению пользовательского интерфейса. Однако, поскольку существует только один AWT-поток, нежелательно выполнять задачи в нем. Это означает, что в приложениях Swing часто требуются дополнительные потоки «исполнителя» для решения долгосрочных, связанных с пользовательским интерфейсом задач.

Подходы «поток-на-задачу» и «единий фоновый поток» могут довольно хорошо функционировать в определенных ситуациях. Например, подход «поток-на-задачу» хорошо работает с небольшим количеством долгосрочных задач. Подход «единий фоновый поток» функционирует эффективно при условии, что не важна предсказуемость распределения, как в случае низкоприоритетных фоновых задач. Однако большая часть серверных приложений ориентирована на обработку большого количества краткосрочных задач, и им необходим механизм для эффективного выполнения задач с небольшими издержками, а также мера управления ресурсами и предсказуемостью времени выполнения.

Пул потоков является мощным механизмом для структурирования многопоточных приложений, однако приложения, построенные с его помощью, подвержены ошибкам синхронизации и взаимоблокировок, имеют зависимую от пулов взаимоблокировку, пробуксовку ресурсов и рассеяние потока.

Исходя из вышесказанного, при реализации архитектуры брокера ресурсов подсистема планировщика была выделена в отдельный фоновый поток, который выполняется в бесконечном цикле. Это позволило отделить основную работу брокера ресурсов от вспомогательной работы планировщика по извлечению заданий из входной очереди *inputQueue* и постановку их в очереди *virtualQueue* и *waitQueue*. В основном потоке грид-сервиса CAEBeans Broker производится перераспределение виртуальных ресурсов и работа сервиса в соответствующем контексте.

## 2.2. Создание масштабируемых приложений с использованием Jetty

Контейнер WSRFLite включает в себя в качестве веб-сервера Jetty. Последний предоставляет средства для параллельного выполнения нескольких запросов к грид-сервисам, что позволяет наряду с использованием поточной обработки в реализации грид-сервиса улучшить эффективность работы грид-сервиса и сократить время обработки запросов.

Веб-сервер Jetty 6 поддерживает большое количество одновременных соединений. В нем используются не блокирующие библиотеки ввода/вывода языка программирования Java (*java.nio*) и оптимизированная архитектура выходного буфера. Кроме того, веб-сервер Jetty работает с долговременными соединениями – функциональная возможность, известная под названием Continuations [21]. Для использования Continuations, веб-сервер Jetty необходимо настроить на обработку запросов с использованием коннектора *SelectChannelConnector*, который позволяет сохранять соединения открытыми. Это дает возможность использовать один поток для обслуживания нескольких запросов.

## Заключение

В данной статье рассмотрены архитектура и аспекты реализации компонента CAEBeans Broker. Приведено описание логической структуры, архитектуры очередей и алгоритма планирования CAEBeans Broker. Предложен подход к реализации очередей и организации потоков грид-сервиса CAEBeans Broker, а также созданию масштабируемых приложений в контейнере WSRFLite.

В качестве дальнейших направлений работы можно выделить следующие: проведение вычислительных экспериментов для оценки эффективности алгоритма планирования, основанного на очередях брокера ресурсов; реализация грид-сервиса CAEBeans Broker с использованием функциональной возможности Continuations и проведение исследования масштабируемости приложения CAEBeans Broker.

*Работа выполняется при финансовой поддержке программы СКИФ-ГРИД (договор с 2009-СГ-03) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России»(контракт №П2036).*

## Литература

1. Дорохов, В.А. Разработка виртуального испытательного грид-стенда для исследования эффекта овализации труб при термической обработке / В.А. Дорохов // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2009): тр. Междунар. науч. конф. (Нижний Новгород, 30 марта. – 3 апр. 2009 г.). – Челябинск, 2009. – С. 457 – 462.
2. Радченко, Г.И. Технология построения проблемно-ориентированных иерархических оболочек над инженерными пакетами в грид-средах / Г.И. Радченко // Системы управления и информационные технологии. – 2008. – № 4(34). – С. 57 – 61.
3. Радченко, Г.И. Технология построения виртуальных испытательных стендов в распределенных вычислительных средах / Г.И. Радченко, Л.Б. Соколинский // Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. – 2008. – № 54. – С. 134 – 139.
4. Дорошенко, А.Е. Системы Grid-вычислений - перспектива для научных исследований / А.Е. Дорошенко, О.В. Алистратов, Ю.М. Тырчак, А.П. Розенблат, К.А. Рухлис // Проблемы программирования. – 2005. – № 1. – С. 14 – 38.
5. Проект Condor: [<http://www.cs.wisc.edu/condor/>], 19 Jun 2010.
6. Portable Batch System: [<http://www.openpbs.org/>], 7 Feb 2010.
7. Sun Grid Engine: [<http://www.sun.com/software/gridware/>], 5 Feb 2010.
8. Platform Computing: [<http://www.platform.com/>], 25 Jun 2010.
9. Baker, B.S. Orthogonal packings in two dimensions / B.S. Baker, E.J. Coffman, R.L. Rivest // SIAM Journal on Computing. –1980. – № 9. – P. 846 – 855.
10. Performance bounds for level-oriented two-dimensional packing algorithms / E.J. Coffman, M.R. Garey, D.S. Johnson, R.E. Tarjan // SIAM J. on Computing. –1980. – № 9. – P. 808 – 826.
11. The Global Grid Forum: [<http://www.gridforum.org/>], 19 Feb 2010.
12. Foster, I. The Grid: Blueprint for a future computing infrastructure / I. Foster, C. Kesselman. – San Francisco: Morgan Kaufmann, 1999.
13. Grid Information Services for Distributed Resource Sharing / K. Czajkowski, S. Fitzgerald, I. Foster, C. Kesselman. – 10th IEEE International Symposium on High-Performance Distributed Computing, 2001.

14. Drozdowski, M. Scheduling multiprocessor tasks - an overview / M. Drozdowski // European J. of Oper. Research. –1996. – № 94. – P. 215–230.
15. Scheduling high performance data mining tasks on a data Grid environment / S. Orlando, P. Palmerini, R. Perego, F. Silvestri // Euro-Par 2002, LNCS 2400, Springer-Ferlag Berlin Heidelberg. –2002. – P. 375 – 384.
16. Радченко, Г.И. Грид-система CAEBeans: интеграция ресурсов инженерных пакетов в распределенные вычислительные среды / Г.И. Радченко // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2009): тр. Междунар. науч. конф. (Нижний Новгород, 30 марта. – 3 апр. 2009 г.). – Челябинск, 2009. – С. 281 – 292.
17. Шамакина, А.В. Организация брокера ресурсов в системе CAEBeans / А.В. Шамакина // Вестн. ЮУрГУ. Сер. «Математическое моделирование и программирование». – 2008. – № 27(127), вып. 2. – С. 110 – 116.
18. Шамакина, А.В. Протокол взаимодействия с брокером ресурсов в системе CAEBeans / А.В. Шамакина // Научный сервис в сети Интернет: масштабируемость, параллельность, эффективность: тр. Всероссийск. науч. конф. (Новороссийск, 21–26 сент. 2009 г.). – Москва, 2009. – С. 400 – 402.
19. Лобанов, И. Concurrent Data Types: [<http://javatoday.ru/2009/05/concurrent-data-types/#more-221/>], 27 Jun 2010.
20. Брайан, Г. Теория и практика Java: Пулы потоков и очередь действий: [<http://www.interface.ru/home.asp?artId=9759/>], 1 Dec 2009.
21. McCarthy, P. Ajax для Java-разработчиков: Создание масштабируемых Comet-приложений с использованием Jetty и Direct Web Remoting: [<http://www.ibm.com/developerworks/ru/library/j-jettydwr/>], 15 Dec 2009.

Кафедра системного программирования,  
Южно-Уральский государственный университет  
sham2004@bk.ru

*Поступила в редакцию 17 марта 2010 г.*

# НОВЫЙ ПОДХОД К ИЗМЕРЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКИ ИСКАЖЕННЫХ СИГНАЛОВ

*А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридык*

## A NEW APPROACH TO MEASUREMENT OF DYNAMICALLY PERTURBED SIGNALS

*A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk*

Предложен новый подход к измерению динамически искаженных сигналов, основанный на теории уравнений леонтьевского типа.

*Ключевые слова:* динамические измерения, уравнения леонтьевского типа

A new approach to the actual measurement of dynamically perturbed signals based on the theory of the Leontieff type equations is offered.

*Keywords:* dynamically measurement, Leontieff type equations

### Введение

Теория динамических измерений возникла и первоначально развивалась как ответвление теории некорректных задач (см. прекрасный обзор в [1]). Между тем развитие техники, в особенности – космонавтики, потребовало создания иных подходов, дающих более точные решения задач динамических измерений, чем теория некорректных задач. Одним из таких подходов, базирующихся на теории автоматического управления (см. например, [2, 3]), был предложен в [4] и развит в [5, 6].

Суть нового метода заключается в следующем. В качестве модели измерительного устройства (ИУ) предлагается взять модель автоматического управления

$$\dot{x} = Ax + Du, \quad y = Cx \quad (0.1)$$

со следующей трактовкой:  $x = x(t)$  – вектор-функция состояний ИУ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $u = u(t)$ ,  $y = y(t)$  – вектор-функции входа и выхода соответственно,  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$  и  $y = (y_1, y_2, \dots, y_l)$ , причем матрицы ИУ  $A$ , датчика  $D$  и выхода  $C$  имеют соответственно размеры  $n \times n$ ,  $n \times m$  и  $l \times n$ . Модель ИУ (0.1) оказалась чрезвычайно удобной при измерении кратковременных импульсов, для которых от микро- до наносекунд, т.к. хорошо моделирует инерционность ИУ, из-за которой не удается точно измерить пикообразные изменения входного входного сигнала. Эта модель учениками А.Л. Шестакова изучалась в различных аспектах [7 – 9], что показало ее адекватность широкому кругу измеряемых явлений.

Естественно, при исследовании модели (0.1) использовались понятия и методы теории автоматического управления. Между тем, имеется хорошо разработанная теория [10], апробированная в различных приложениях [11, 12], позволяющая делать более детальный анализ модели (0.1). В данной статье впервые теория уравнений соболевского типа и вырожденных полугрупп операторов [10] применяется для изучения модели (0.1).

Статья кроме введения содержит две части и список литературы. В первой части дана краткая сводка результатов теории [10], почерпнутая из [13]. Во второй части дается приложение этой теории к конкретной модели (0.1), взятой из [9]. Список литературы отражает только личные вкусы и пристрастия авторов и не претендует на полноту.

## 1. Уравнения леонтьевского типа

Пусть  $L$  и  $M$  – квадратные матрицы порядка  $r$ . Матрица  $M$  называется *регулярной относительно матрицы  $L$*  (коротко,  *$L$ -регулярной*), если существует число  $\alpha \in \mathbb{C}$  такое, что  $\det(\alpha L - M) \neq 0$ . Пусть матрица  $M$   $L$ -регулярна, тогда существует не более  $s$  точек  $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s\} \subset \mathbb{C}$ ,  $s \leq r$  таких, что  $\det(\mu_k L - M) = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, s$ . Следуя [13], будем называть множество  $\sigma^L(M) = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s\}$   *$L$ -спектром* матрицы  $M$ . Заметим, что если  $\det L \neq 0$ , то  $L$ -спектр матрицы  $M$  совпадает со спектром как матрицы  $L^{-1}M$ , так и матрицы  $ML^{-1}$ . Пусть теперь матрица  $M$   $L$ -регулярна, выберем контур  $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r\}$ , где  $r > \max\{|\mu_1|, |\mu_2|, \dots, |\mu_s|\}$ , и построим матрицы

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu L - M)^{-1} L d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} L (\mu L - M)^{-1} d\mu.$$

**Лемма 1.1.** *Пусть матрица  $M$   $L$ -регулярна, тогда*

- (i)  $P^2 = P$ ,  $Q^2 = Q$ ;
- (ii)  $LP = QL$ ,  $MP = QM$ .

Из леммы 1.1. непосредственно вытекает

**Теорема 1.1.** *Пусть матрица  $M$   $L$ -регулярна. Тогда существуют матрицы  $L^{-1}$  и  $M^{-1}$  такие, что  $L^{-1}L = P$ ,  $LL^{-1} = Q$ ,  $M^{-1}M = \mathbb{I}_r - P$ ,  $MM^{-1} = \mathbb{I}_r - Q$ .*

Однородную линейную вырожденную (если  $\det L = 0$ ) систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$L\dot{z} = Mz \tag{1.1}$$

будем называть системой уравнений *леонтьевского типа*, имея в виду ее прообраз – знаменитую балансовую модель Леонтьева с учетом запасов (подробности см. [13]). Вектор-функцию  $z = (z_1, z_2, \dots, z_r)$ ,  $z_k = z_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, r$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , назовем *решением* системы (1.1), если при подстановке (1.1) обращается в тождество. Решение  $z = z(t)$  системы (1.1) называется *решением задачи Коши* для (1.1), если

$$z(0) = z_0 \tag{1.2}$$

для некоторого  $z_0 \in \mathbb{R}^r$ . В дальнейшем решение задачи (1.1), (1.2) будем обозначать следующим образом:  $z = z(t, z_0)$ .

**Определение 1.1.** Множество  $\mathfrak{P} \subset \mathbb{R}^r$  называется *фазовым пространством* системы (1.1), если

- (i) любое решение  $z = z(t)$  лежит в  $\mathfrak{P}$  поточечно, т.е.  $z(t) \in \mathfrak{P}$  при любом  $t \in \mathbb{R}$ ;
- (ii) при любом  $z_0 \in \mathfrak{P}$  существует единственное решение  $z = z(t, z_0)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  задачи (1.2) для системы (1.1).

Как нетрудно видеть, если  $\det L \neq 0$ , то фазовым пространством системы (1.1) служит все пространство  $\mathbb{R}^r$ .

**Определение 1.2.** Однопараметрическое семейство матриц  $Z^t = \{Z^t : t \in \mathbb{R}\}$  называется *разрешающей группой* системы (1.1), если

- (i)  $Z^t Z^s = Z^{t+s}$  при всех  $s, t \in \mathbb{R}$ ;
- (ii) при любом  $z_0 \in \mathbb{R}^n$  вектор-функция  $z(t) = Z^t z_0$  есть решение системы (1.1);
- (iii) образ матрицы  $Z^0$  совпадает с фазовым пространством системы (1.1).

**Теорема 1.2.** *Пусть матрица  $M$   $L$ -регулярна, тогда существует единственная разрешающая группа системы (1.1).*

Искомая группа задается формулой  $Z^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu L - M)^{-1} L e^{\mu t} d\mu$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , где контур  $\gamma$  такой же, как при построении матриц  $P$  и  $Q$ .

Теперь возьмем некоторую вектор-функцию  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^r$ ,  $T \in \mathbb{R}_+$ , и рассмотрим линейную неоднородную систему леонтьевского типа

$$L\dot{z} = Mz + f. \tag{1.3}$$

Считая, что матрица  $M$   $L$ -регулярна, для системы (1.3) поставим следующую задачу

$$P(z(0) - z_0) = 0. \quad (1.4)$$

**Теорема 1.3.** Пусть матрица  $M$   $L$ -регулярна, тогда для любого вектора  $z_0 \in \mathbb{R}^r$  и любой вектор-функции  $f \in C^{r+1}((0, T); \mathbb{R}^r) \cap C^r([0, T]; \mathbb{R}^r)$  существует единственное решение  $z = z(t, z_0)$ ,  $t \in [0, T]$  задачи (1.3), (1.4), которое к тому же имеет вид

$$z(t, z_0) = -\sum_{k=0}^r H^k M^{-1}(\mathbb{I} - Q)f^{(k)}(t) + Z^t z_0 + \int_0^t R^{t-s} Q f(s) ds. \quad (1.5)$$

Здесь  $H = M^{-1}(\mathbb{I} - Q)L(\mathbb{I} - P)$  – нильпотентная в силу теоремы 1.1 матрица,  $p$  – ее степень нильпотентности,  $p \leq rp$ ,  $R^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu$ .

## 2. Модель измерительного устройства

Сначала редуцируем уравнения (0.1) к уравнениям (1.3). Для этого положим

$$L = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O}_l \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} A & \mathbb{O} \\ C & \mathbb{I}_l \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$(\mu L - M)^{-1} = \begin{pmatrix} (\mu \mathbb{I} - A)^{-1} & \mathbb{O} \\ -C(\mu \mathbb{I} - A)^{-1} & \mathbb{I}_l \end{pmatrix}.$$

Значит,  $L$ -спектр матрицы  $M$  совпадает со спектром матрицы  $A$ , т.е.  $\sigma^L(M) = \sigma(A)$ , поэтому матрица  $M$   $L$ -регулярна.

В силу леммы 1.1 существуют матрицы

$$P = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & \mathbb{O} \\ -C & \mathbb{O}_l \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O}_l \end{pmatrix},$$

а в силу теоремы 1.1 существуют матрицы

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & \mathbb{O} \\ -C & \mathbb{O}_l \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_l & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I}_n \end{pmatrix}.$$

(Факт совпадения матриц  $L^{-1} = P$ ,  $L = Q$  случаен, и в случаях общего положения таких совпадений нет). Аналогично строится разрешающая группа системы (1.1), которая в нашем случае имеет вид

$$Z^t = \begin{pmatrix} e^{tA} & \mathbb{O} \\ -Ce^{tA} & \mathbb{O}_l \end{pmatrix}, \quad e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

По теореме 1.4 существует единственное решение задачи

$$x(0) = x_0 \quad (2.1)$$

для системы уравнений

$$L\dot{z} = Mz + D_M v, \quad (2.2)$$

которое к тому же имеет вид

$$z(t, z_0) = Z^t z_0 + \int_0^t R^{t-s} Q D_M v(s) ds. \quad (2.3)$$

Матрица  $D_M$  имеет следующий вид:  $D_M = \begin{pmatrix} D & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$ , поэтому  $(\mathbb{I} - Q)D_M = \mathbb{O}$ , и, значит, первое слагаемое из формулы (1.5) в формуле (2.3) отсутствует. Вектор-функции  $z = z(t)$  и  $v = v(t)$  строятся следующим образом:  $z = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$ ,  $v = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ , поэтому (2.1) то же самое, что и (1.4).

*Пример модели ИУ.* Рассмотрим модель ИУ, приведенную в [9]. Здесь матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -44 & 0 \\ -\alpha & -16 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -0,594 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (0 \ 1).$$

По ним построим матрицы

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -44 & 0 & 0 \\ -\alpha & -16 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -0,594 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

затем вектор  $v = (u, 0, 0)$ . Система (1.3) приобретет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{z} = \begin{pmatrix} -44 & 0 & 0 \\ -\alpha & -16 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} -0,594 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v,$$

где вектор  $z = (x_1, x_2, y)$ . Методами п.1 решаем задачу (2.1), (2.2), где  $x_0 = 0$ , и получаем

$$y(t) = \frac{\alpha}{28} \left( \frac{16}{16^2 + 4\omega^2} \sin^2 \omega t - \frac{1}{16^2 + 4\omega^2} \sin 2\omega t + \frac{1 - e^{-16t}}{32} - \frac{8(1 - e^{-16t})}{16^2 + 4\omega^2} - \frac{44}{44^2 + 4\omega^2} \sin^2 \omega t + \frac{1}{44^2 + 4\omega^2} \sin 2\omega t - \frac{1 - e^{-44t}}{88} - \frac{22(1 - e^{-44t})}{44^2 + 4\omega^2} \right). \quad (2.4)$$

В качестве измеряемого сигнала взят пикообразный импульс  $u(t) = A \sin^2 \omega t$ . Заметим, что на выходе (2.4) отмечается « затухание » импульса, т.е. уменьшение его амплитуды  $A$ , что согласуется с данными эксперимента.

## Литература

1. Грановский, В.А. Динамические измерения / В.А. Грановский. – Л.: Энергоиздат, 1984.
2. Деруссо, П. Пространство состояний в теории управления / П. Деруссо, Р. Рой, Ч. Клоуз. – М.: Наука, 1970.
3. Кузовков, Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства / Н.Т. Кузовков. – М.: Машиностроение, 1976.
4. Шестаков, А.Л. Динамическая точность измерительного преобразователя с корректирующим устройством в виде модели датчика / А.Л. Шестаков // Метрология. – 1987. – № 2. – С. 26 – 34.
5. Шестаков, А.Л. Коррекция динамической погрешности измерительного преобразователя линейным фильтром на основе модели датчика / А.Л. Шестаков // Изв. Вузов. Приборостроение. – 1991. – Т. 34, № 4. – С. 8 – 13.
6. Шестаков, А.Л. Модальный синтез измерительного преобразователя / А.Л. Шестаков // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1995. – № 4. – С. 67 – 75.
7. Солдаткина, Е.В. Алгоритмы адаптации параметров измерительной системы к минимуму оценки динамической погрешности: дис. ... канд. техн. наук / Е.В. Солдаткина. – Челябинск, 2000.

8. Бизяев, М.Н. Динамические модели и алгоритмы восстановления динамически искаженных сигналов измерительных систем в скользящем режиме: дис. ... канд. техн. наук / М.Н. Бизяев. – Челябинск, 2004.
9. Иосифов, Д.Ю. Динамические модели и алгоритмы восстановления сигналов измерительных систем с наблюдаемым вектором координат состояния: дис. ... канд. техн. наук / Д.Ю. Иосифов. – Челябинск, 2007.
10. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degener-ate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.
11. Замышляева, А.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка / А.А. Замышляева // Вычислите. технологии. – 2003. – Т. 8, №4. – С. 45 – 54.
12. Загребина, С.А. О задаче Шоуолтера – Сидорова / С.А. Загребина // Изв. вузов. Математика. – 2007. – №3. – С. 22 – 28.
13. Свиридов, Г.А. Численное решение систем уравнений леонтьевского типа / Г.А. Свиридов, С.В. Брычев // Изв. вузов. Математика. – 2003. – №8. – С. 46 – 52.

Кафедра «Информационно-измерительная техника»,  
Южно-Уральский государственный университет  
[admin@susu.ac.ru](mailto:admin@susu.ac.ru)

Кафедра «Уравнения математической физики»,  
Южно-Уральский государственный университет  
[ridyu@susu.ac.ru](mailto:ridyu@susu.ac.ru)

*Поступила в редакцию 25 сентября 2009 г.*

## **СВЕДЕНИЯ ОБ ИЗДАНИИ**

*Серия «Математическое моделирование и программирование» основана в 2008 году.*

*Основной целью издания является пропаганда союза качественных и количественных исследований математических моделей. Предпочтение при публикации будут иметь статьи, посвященные либо изучению новых математических моделей, либо обсуждению теоретических основ программирования с приложениями к математическим моделям.*

*Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации от 19 февраля 2010 г. №6/б журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук».*

*Свидетельство о регистрации ПИ №ФС77-26455 выдано 13 декабря 2006 г. Федеральной службой по надзору законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия.*

*Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международной справочной системе по периодическим и продолжающимся изданиям «Zentralblatt MATH», «Mathematical Reviews».*

## **ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ**

1. Правила подготовки рукописей и пример оформления статей можно загрузить с сайта ЮУрГУ (<http://www.susu.ac.ru>) следуя ссылкам: «Научные исследования»⇒ «Издательская деятельность»⇒ «Вестник ЮУрГУ»⇒ «Серии». **Статьи, оформленные без соблюдения правил, к рассмотрению не принимаются и назад авторам не возвращаются.**

2. Адрес редакции Вестника ЮУрГУ, серия «Математическое моделирование и программирование»

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, механико-математический факультет, кафедра УМФ, ответственно-му секретарю доценту Манаковой Наталье Александровне.

3. Адрес электронной почты редакции: [vestnikmmp@gmail.com](mailto:vestnikmmp@gmail.com)

4. **Плата с авторов за публикацию рукописей не взимается, и гонорары авторам не выплачиваются.**

5. Подписной индекс Вестника ЮУрГУ, серия «Математическое моделирование и программирование»: 29126, каталог «Пресса России». Периодичность выхода – 2 номера в год (май и ноябрь).

**ВЕСТНИК  
ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА  
№ 16 (192) 2010**

**Серия  
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И ПРОГРАММИРОВАНИЕ»**

**Выпуск 5**

---

**Издательский центр Южно-Уральского государственного университета**

---

Подписано в печать 22.04.2010. Формат 60×84 1/8. Печать трафаретная.  
Усл. печ. л. 14,18. Уч.-изд. л. 11. Тираж 500 экз. Заказ 83/211.

---

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ. 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.