



ВЕСТНИК

ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО № 37 (170)
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА 2009

ISSN 2071-0216

СЕРИЯ

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ»

Выпуск 4

Редакционная коллегия

к.ф.-м.н., проф. **Заляпин В. И.**, к.ф.-м.н., доц. **Манакова Н. А.** (*отв. секретарь*), д.ф.-м.н., проф. **Менихес Л. Д.**, д.ф.-м.н., проф. **Свиридюк Г. А.** (*отв. редактор*), д.ф.-м.н., проф. **Соколинский Л. Б.**

Редакционный совет

д.ф.-м.н., проф., чл.-кор. РАН **Абрамов С. М.**, д.ф.-м.н., проф., акад. РАН **Васильев С. Н.**, д.ф.-м.н., проф., чл.-кор. РАН **Воеводин В. В.**, д.ф.-м.н., проф., акад. РАН **Еремин И. И.** (*председатель*), д.ф.-м.н., проф. **Кадченко С. И.**, д.ф.-м.н., проф. **Кожанов А. И.**, д.ф.-м.н., проф. **Лакеев А. В.**, д.ф.-м.н., проф. **Панюков А. В.**, д.ф.-м.н., проф. **Танана В. П.**, д.ф.-м.н., проф. **Ухоботов В. И.**, д.ф.-м.н., проф. **Федоров В. Е.**, д.ф.-м.н., проф., чл.-кор. РАН **Ченцов А. Г.**, д.т.н., проф. **Ширяев В. И.**

Содержание

МЕТОД РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СЛЕДОВ С. И. Кадченко	4
О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА С ГРАНИЧНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С. Абдурахманов, В. В. Карачик, Б. Х. Турметов	24
ПОИСК ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ПО ПОЛЮ ВЫСОТ С. Н. Васильев, Я. В. Малыгин, А. В. Мироненко	34
ДЕКОМПОЗИЦИЯ ДАННЫХ ДЛЯ РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЯ МЕТОДИКИ ТИМ-2D И КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ЕЕ КАЧЕСТВА А. А. Воропинов	40
ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ЖИДКОМ ПОЛУПРОВОДНИКЕ А. Ф. Гильмутдинова	51
СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ СМЕНЫ УСТОЙЧИВОСТИ Е. А. Деркунова	57
ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЛОЯ В КРУГЛОМ СТЕРЖНЕ В. Л. Дильман, Т. В. Ерощкина	65
РАЗРАБОТКА ВИРТУАЛЬНОГО ИСПЫТАТЕЛЬНОГО ГРИД-СТЕНДА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭФФЕКТА ОВАЛИЗАЦИИ ТРУБ ПРИ ТЕРМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ В. А. Дорохов	78
О ФАКТОРАХ РИСКА В ПРОЦЕССЕ РАЗРАБОТКИ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ Д. А. Макаров, М. Я. Розенберг, А. Б. Шильников	85
О РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ СОСТАВНОГО ВИДА В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ Р. Р. Сафиуллова	93
ОЦЕНКА НЕСУЩЕЙ ЧАСТОТЫ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИМПУЛЬСОВ МЕТОДОМ ПРОНИ А. Л. Шестаков, А. С. Семенов, О. Л. Ибряева	106
ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО НЕКЛАССИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ А. С. Шипилов	116

Contents

METHOD OF REGULARIZED TRACES S. I. Kadchenko	4
ON SOLVABILITY OF SOME BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE POISSON EQUATION WITH FRACTIONAL DIFFERENTIAL OPERATORS C. Abdurakhmanov, V. V. Karachik, B. Kh. Turmetov	24
UNMANNED AIRBORNE VEHICLE TRAJECTORY SEARCH USING ELEVATION FIELD S. N. Vasilyev, Y. V. Malygin, A. V. Mironenko	34
DATA DECOMPOSITION FOR TIM-2D CODE PARALLELIZING METHOD AND ITS QUALITY EVALUATION CRITERIA A. A. Voropinov	40
NUMERAL COMPUTATION OF PROCESSES IN LIQUID SEMI-CONDUCTOR A. F. Gilmutdinova	51
SINGULAR PERTURBED PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF FIRST ORDER IN A CASE OF STABILITY CHANGE E. A. Derkunova	57
RESEARCH OF MATHEMATICAL MODELS OF THE STRESS CONDITION OF A NON-HOMOGENEOUS CROSS LAYER IN A ROUND ROD V. L. Dil'man, T. V. Eroshkina	65
DEVELOPMENT OF VIRTUAL GRID TEST DESK FOR RESEARCH OF PIPES OVALIZATION EFFECT AT THERMAL PROCESSING V. A. Dorokhov	78
RISKS IN SOFTWARE DEVELOPMENT PROCESS D. A. Makarov, M. Y. Rozenberg, A. B. Shilnikov	85
ON SOLVABILITY OF THE LINEAR INVERSE PROBLEM WITH UNKNOWN COMPOSITE RIGHT-HAND SIDE IN HYPERBOLIC EQUATION R. R. Safiullova	93
CARRIER FREQUENCY ESTIMATION FOR RANDOM PULSE TRAIN USING PRONY'S METHOD A. L. Shestakov, A. S. Semenov, O. L. Ibryaeva	106
ON STABILTY OF SOLUTIONS FOR A NONCLASSICAL EQUATIONS A. S. Shipilov	116

МЕТОД РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СЛЕДОВ

С. И. Кадченко

METHOD OF REGULARIZED TRACES

S. I. Kadchenko

Разработан новый метод вычисления первых собственных значений дискретных операторов (метод регуляризованных следов (РС)). Проведенная апробация метода РС на задаче гидродинамической теории устойчивости показала его высокую эффективность.

Ключевые слова: регуляризованный след, собственные значения, дискретный самосопряженный оператор, задача Orr – Зоммерфельда

A new method of calculation of first eigenvalues of discrete operators (a method of regularized traces (RT)) is developed. The approbation of RT method on a problem of the hydrodynamic stability theory has shown its high efficiency.

Keywords: regularized trace, eigenvalues, discrete selfadjoint operator, the Orr – Zommerfelds problem

Введение

Рассмотрим дискретный полуограниченный снизу оператор T и ограниченный оператор P , заданные в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные числа оператора T , занумерованные в порядке возрастания их величин с учетом кратности, а $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ – его ортонормированные собственные функции, соответствующие этим собственным числам. Допустим, что кратность собственного числа μ_n оператора T равна ν_n . Обозначим через n_0 количество всех неравных друг другу собственных чисел μ_n оператора T , которые лежат внутри окружности T_{n_0} радиуса $\rho_{n_0} = \frac{|\mu_{n_0+1} + \mu_{n_0}|}{2}$ с центром в начале координат комплексной плоскости. Пусть $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные числа оператора $T + P$, занумерованные в порядке возрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности. Если для всех $n \geq n_0$ выполняются неравенства $\frac{2\|P\|}{|\mu_{n+\nu_n} - \mu_n|} < 1$, то первые $m_0 = \sum_{n=1}^{n_0} \nu_n$ собственные числа $\{\beta_n\}_{n=1}^{m_0}$ оператора $T + P$ являются решениями системы нелинейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{m_0} \beta_k^p = \sum_{k=1}^{m_0} \mu_k^p + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0), \quad p = \overline{1, m_0}. \quad (1)$$

Здесь $\alpha_k^{(p)}(m_0) = \frac{(-1)^k p}{2\pi k i} Sp \int_{T_{n_0}} \mu^{p-1} [PR_{\mu}(T)]^k d\mu$ – k -е поправки теории возмущений оператора $T + P$ целого порядка p , $R_{\mu}(T)$ – резольвента оператора T . В дальнейшем будем предполагать, что в круге T_{n_0} находится m_0 собственных чисел оператора T .

Форма записи уравнений (1) по сравнению с первыми работами [1 – 18] видоизменена. Это связано с желанием явно выделить случаи кратности собственных чисел μ_n оператора T . Хотя и в предыдущих работах их кратность предполагалась.

Система алгебраических уравнений (1) позволила разработать новый численный метод нахождения собственных чисел дискретных операторов, идея которого впервые была высказана В. А. Садовничим и В. В. Дубровским в работе [1], которая состоит в следующем. Составим систему нелинейных уравнений (1) относительно m_0 первых собственных чисел $\{\beta_n\}_{n=1}^{m_0}$ оператора $T + P$ и выразим симметрические многочлены $\sum_{k=1}^{m_0} \beta_k^p$, $p = \overline{1, m_0}$ от m_0 переменных через правые части системы уравнений (1). Используя теорему Виета, получим многочлен степени m_0 со старшим коэффициентом, равным единице (остальные коэффициенты могут быть найдены со сколь угодно большой точностью по формулам Ньютона), корнями которого будут первые m_0 собственные числа $\{\beta_n\}_{n=1}^{m_0}$ оператора $T + P$. Известно, что комплексные корни многочлена со старшим коэффициентом, равным единице, непрерывно зависят от его коэффициентов. Поэтому, решая приближенно уравнение, можно найти его корни $\{\beta_n\}_{n=1}^{m_0}$ с необходимой точностью.

В работе [2] получена формула для вычисления k -й поправки теории возмущений p -того порядка $\alpha_k^{(p)}(m_0)$ для любых $k, m_0, p \in N$

$$\alpha_k^{(p)}(m_0) = \frac{p}{k} \sum_{j=1}^{m_0} \sum_{j_1, j_2, \dots, j_k=1}^{\infty} \left(\prod_{r=1}^k V_{j_r, j_s} \right) \operatorname{res}_{\mu_j} \left(\frac{\mu^{p-1}}{\prod_{r=1}^k (\mu - \mu_{j_r})} \right), \quad (2)$$

где $V_{j_r, j_s} = (P\omega_{j_r}, \omega_{j_s})$, $s = \begin{cases} r + 1, & r < k, \\ 1, & r = k. \end{cases}$

Предельные абсолютные погрешности найденных первых собственных чисел оператора $T + P$ зависят от того, как точно вычислены суммы числовых рядов Релея – Шредингера $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0)$ поправок теории возмущения оператора $T + P$. В статье [3] найдены аналитические формулы вычисления первых четырех поправок $\alpha_k^{(p)}(m_0)$ для случая однократного спектра оператора $T + P$, а в работе [4] формулы вычисления первых трех поправок для случая кратного спектра оператора $T + P$.

По мере возрастания количества m_0 собственных чисел оператора $T + P$, которые необходимо найти, величины сумм $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0)$ и их необходимая точность вычисления резко возрастают. Поэтому нахождение сумм Релея – Шредингера путем суммирования его членов является бесперспективным способом, так как для вычисления k -й поправки необходимо находить суммы k кратных рядов. В связи этим был разработан новый численный метод приближенного вычисления сумм Релея – Шредингера, позволяющий находить их без почленного суммирования [2].

1. Теоретические положения метода регуляризованных следов

Обоснование метода РС, в основном было сделано в работах Дубровского В. В., Кадченко С. И., Кравченко В. Ф. и Садовничего В. А. [1 – 18]. Приведем основные положения этого обоснования.

Прежде всего отметим, что при выполнении условий теоремы 1 линейный оператор $T + P$ является дискретным, и при этом внутри окружности T_{n_0} находится одинаковое количество собственных чисел операторов T и $T + P$ [19].

Теорема 1. Пусть T дискретный самосопряженный полуограниченный снизу оператор, а P – линейный ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Если существует натуральное число n_0 такое, что для всех $n \geq n_0$ выполняются неравенства $\frac{2\|P\|}{|\mu_{n+\nu_n} - \mu_n|} < 1$, то $m_0 = \sum_{n=1}^{n_0} \nu_n$ собственные числа $\{\beta_n\}_{n=1}^{m_0}$ оператора $T + P$ являются решениями системы m_0 нелинейных алгебраических уравнений (1).

Лемма 1. Если T дискретный самосопряженный полуограниченный снизу оператор, а P – линейный ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H , то оператор $\int_{T_{n_0}} \mu^{p-1} [PR_\mu(T)]^k d\mu$ не более чем $n_0 k$ -мерен.

Теорема 2. Пусть T – дискретный самосопряженный полуограниченный снизу оператор, а P – линейный ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Если существует натуральное число n_0 такое, что для всех $n \geq n_0$ выполняются неравенства $\frac{2\|P\|}{|\mu_{n+\nu_n} - \mu_n|} < 1$, то для поправок теории возмущений $\alpha_k^{(p)}(m_0)$ оператора $T + P$ справедливы оценки

$$|\alpha_k^{(p)}(m_0)| \leq n_0 p \rho_{n_0}^p q^k, \quad q = \min_{n \geq n_0} |\mu_{n+\nu_n} - \mu_n|, \quad \forall k, p \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3. Пусть T – дискретный самосопряженный полуограниченный снизу оператор, а P – линейный ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Если существует натуральное число n_0 такое, что для всех $n \geq n_0$ выполняются неравенства $\frac{2\|P\|}{|\mu_{n+\nu_n} - \mu_n|} < 1$, то числовые ряды $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0)$ поправок теории возмущений оператора $T + P$ абсолютно сходятся.

Теорема 4. Пусть T – дискретный самосопряженный полуограниченный снизу оператор, P – линейный ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Если оператор $T + P$ положительно определен в H , и система координатных функций $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ является базисом H , тогда метод Бубнова – Галеркина в применении к задаче об отыскании собственных чисел спектральной задачи

$$(T + P)\varphi = \beta\varphi, \tag{3}$$

построенный на этой системе функций, сходится.

Доказательство. Запишем уравнение (2) в виде

$$(T + P - \lambda E)\varphi = (\beta - \lambda)\varphi. \tag{4}$$

Для дискретного оператора $T + P$ существует резольвентный оператор $R_\lambda(T + P) = (T + P - \lambda E)^{-1}$, который вполне непрерывен в H [19]. Действуя слева на обе части уравнения (4) оператором $R_\lambda(T + P)$, получим

$$\varphi = (\beta - \lambda)R_\lambda(T + P)\varphi. \tag{5}$$

На основании [20], метод Бубнова – Галеркина в применении к задаче об отыскании собственных чисел уравнения (5), а, следовательно, и уравнения (3), сходится. \square

Допустим, что система собственных функций $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора T является базисом H . Приближенное решение спектральной задачи (3), следуя методу Бубнова – Галеркина,

будем искать в виде [20]

$$\varphi_m = \sum_{k=1}^m a_k \omega_k. \quad (6)$$

Подставляя (6) в уравнение (3), получим

$$\sum_{k=1}^m a_k (T + P) \omega_k = \tilde{\beta}(m) \sum_{k=1}^m a_k \omega_k.$$

Здесь $\tilde{\beta}(m)$ – m -е приближения по Бубнову – Галеркину к соответствующим собственным числам β оператора $T + P$. Так как $T\omega_k = \mu_k \omega_k$, то

$$\sum_{k=1}^m a_k (\mu_k + P) \omega_k = \tilde{\beta}(m) \sum_{k=1}^m a_k \omega_k.$$

Коэффициенты $\{a_k\}_{k=1}^m$ определяются из требования, чтобы левая часть последнего уравнения была ортогональна к функциям $\{\omega_k\}_{k=1}^m$. В результате получаем систему линейных уравнений для нахождения коэффициентов $\{a_k\}_{k=1}^m$

$$\sum_{k=1}^m a_k \left\{ [\tilde{\beta}(m) - \mu_k] \delta_{kn} - (P\omega_k, \omega_n) \right\} = 0, \quad n = \overline{1, m}. \quad (7)$$

Приравняв определитель системы (7) к нулю, приходим к уравнению

$$\det \|\tilde{\beta}(m)\mathbf{E} - \mathbf{A}\| = 0,$$

определяющему приближенные значения первых m собственных чисел $\{\tilde{\beta}_k(m)\}_{k=1}^m$ оператора $T + P$. Здесь \mathbf{E} – единичная матрица размера $m \times m$, $\mathbf{A} = \|a_{kn}\|_{k,n=1}^m$, $a_{kn} = \mu_k \delta_{kn} + (P\omega_k, \omega_n)$, δ_{kn} – символ Кронекера. Известно [21], что для собственных чисел $\{\tilde{\beta}_k(m)\}_{k=1}^m$ матрицы \mathbf{A} справедливы равенства

$$\sum_{k=1}^m \tilde{\beta}_k^p(m) - Sp \mathbf{A}^p = 0, \quad p = \overline{1, m}, \quad (8)$$

где $Sp \mathbf{A}^p$ – след p -й степени матрицы \mathbf{A} . Обозначим

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_{kp}(m) &= \beta_k^p - \tilde{\beta}_k^p(m), \quad k, p = \overline{1, m}, \\ \Delta_p(m) &= \sum_{k=1}^m \tilde{\Delta}_{kp}(m). \end{aligned} \quad (9)$$

Очевидно, что если операторы T и P удовлетворяют требованиям теоремы 1, то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |\tilde{\Delta}_{kp}(m)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |\beta_k^p - \tilde{\beta}_k^p(m)| = 0, \quad \forall k, p \in N,$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |\Delta_p(m)| = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m |\tilde{\Delta}_{kp}(m)| = 0.$$

Теорема 5. Пусть T – дискретный самосопряженный полуограниченный снизу оператор, а P – линейный ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом

пространстве H . Допустим, что система собственных функций $\{\omega_k\}_{k=1}^\infty$ оператора T является базисом H . Если существует $n_0 \in N$ такое, что для всех $n \geq n_0$ выполняются неравенства $\frac{2\|P\|}{|\mu_{n+\nu_n} - \mu_n|} < 1$, тогда

$$\sum_{k=1}^\infty \alpha_k^{(p)}(m_0) = \sum_{k=1}^{m_0} \sum_{m=0}^{p-1} C_p^m \mu_k^m V_{kk}^{p-m} + \sum_{\substack{j_1, \dots, j_p=1 \\ \bigcap_{n=1}^p \{j_n\} = \emptyset}}^{m_0} \prod_{s=1}^p a_{j_s j_r} + \Delta_p(m_0),$$

$$|\Delta_1(m_0)| \leq \left| \sum_{k=2}^{t_1} \alpha_k^{(1)}(m_0) \right| + n_0 \rho_{n_0} \frac{q^{t_1+1}}{1-q}, \quad q = \min_{n \geq n_0} |\mu_{n+\nu_n} - \mu_n|, \quad t_1 \in N, \quad (10)$$

$$|\Delta_p(m_0)| \leq \left| \sum_{k=2}^{t_p} \alpha_k^{(p)}(m_0) - \sum_{j_1=1}^{m_0} \left(\sum_{m=0}^{p-2} C_p^m \mu_{j_1}^m V_{j_1 j_1}^{p-m} + \prod_{s=1}^p a_{j_s j_r} \right) \right| + p n_0 \rho_{n_0}^p \frac{q^{t_p+1}}{1-q}, \quad p = \overline{2, m_0}, \quad t_p \in N.$$

Здесь $\{\mu_k\}_{k=1}^{m_0}$ – собственные числа оператора T , занумерованные в порядке возрастания их величин с учетом кратности, а $\{\omega_k\}_{k=1}^{m_0}$ – его ортонормированные собственные функции, соответствующие этим собственным числам, $m_0 = \sum_{n=1}^{n_0} \nu_n$, ν_n – кратность собственного

числа μ_n оператора T , $\Delta_p(m_0) = \sum_{k=1}^{m_0} \tilde{\Delta}_{kp}(m_0)$, $\tilde{\Delta}_{kp}(m_0) = \beta_k^p - \tilde{\beta}_k^p(m_0)$, $\{\beta_k\}_{k=1}^{m_0}$ – собственные числа оператора $T + P$, занумерованные в порядке возрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности, $\{\tilde{\beta}_k(m_0)\}_{k=1}^{m_0}$ – приближенные значения по Бубнову – Галеркину соответствующих собственных чисел $\{\beta_k\}_{k=1}^{m_0}$ оператора $T + P$, $a_{km} = \mu_k \delta_{km} + V_{km}$, $V_{km} = (P\omega_k, \omega_m)$, $\rho_{n_0} = \frac{|\mu_{n_0+1} + \mu_{n_0}|}{2}$, $r = \begin{cases} s+1, & s \neq p, \\ 1, & s = p. \end{cases}$

Доказательство. Если выполнены условия теоремы, то для первых m_0 собственных чисел $\{\beta_k\}_{k=1}^{m_0}$ оператора $T + P$ справедливы уравнения (1)

$$\sum_{k=1}^{m_0} \beta_k^p = \sum_{k=1}^{m_0} \mu_k^p + \sum_{k=1}^\infty \alpha_k^{(p)}(m_0). \quad (11)$$

Тогда из (11), (8) и (9) при $m = m_0$ получим

$$\sum_{k=1}^\infty \alpha_k^{(p)}(m_0) = Sp \mathbf{A}^p - \sum_{k=1}^{m_0} \mu_k^p + \Delta_p(m_0), \quad p = \overline{1, m_0}. \quad (12)$$

Вычисляя следы матриц \mathbf{A}^p , $p = \overline{1, m_0}$,

$$Sp \mathbf{A}^p = \sum_{j_1, \dots, j_p=1}^{m_0} \prod_{s=1}^p a_{j_s j_r} = \sum_{k=1}^{m_0} a_{kk}^p + \sum_{\substack{j_1, \dots, j_p=1 \\ \bigcap_{n=1}^p \{j_n\} = \emptyset}}^{m_0} \prod_{s=1}^p a_{j_s j_r} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^{m_0} (\mu_k + V_{kk})^p + \sum_{\substack{j_1, \dots, j_p=1 \\ \bigcap_{n=1}^p \{j_n\} = \emptyset}}^{m_0} \prod_{s=1}^p a_{j_s j_r} = \\
 &= \sum_{k=1}^{m_0} \left(\mu_k^p + \sum_{m=0}^{p-1} C_p^m \mu_k^m V_{kk}^{p-m} \right) + \sum_{\substack{j_1, \dots, j_p=1 \\ \bigcap_{n=1}^p \{j_n\} = \emptyset}}^{m_0} \prod_{s=1}^p a_{j_s j_r},
 \end{aligned}$$

равенства (11) запишем в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0) = \sum_{k=1}^{m_0} \sum_{m=0}^{p-1} C_p^m \mu_k^m V_{kk}^{p-m} + \sum_{\substack{j_1, \dots, j_p=1 \\ \bigcap_{n=1}^p \{j_n\} = \emptyset}}^{m_0} \prod_{s=1}^p a_{j_s j_r} + \Delta_p(m_0), \quad (13)$$

где $C_p^m = \frac{p!}{m!(p-m)!}$ — число сочетаний из p различных элементов по m . Воспользовавшись (12), найдем

$$\begin{aligned}
 \alpha_1^{(1)}(m_0) + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k^{(1)}(m_0) &= \sum_{k=1}^{m_0} V_{kk} + \Delta_1(m_0), \\
 \alpha_1^{(p)}(m_0) + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0) &= p \sum_{k=1}^{m_0} \mu_k^{p-1} V_{kk} + \\
 &+ \sum_{k=1}^{m_0} \sum_{m=0}^{p-2} C_p^m \mu_k^m V_{kk}^{p-m} + \sum_{\substack{j_1, \dots, j_p=1 \\ \bigcap_{n=1}^p \{j_n\} = \emptyset}}^{m_0} \prod_{s=1}^p a_{j_s j_r} + \Delta_p(m_0), \quad p = \overline{2, m_0}.
 \end{aligned}$$

Используя явную запись первой поправки теории возмущений $\alpha_1^{(1)}(m_0)$, получим

$$\begin{aligned}
 \Delta_1(m_0) &= \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k^{(1)}(m_0), \\
 \Delta_p(m_0) &= \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0) - \sum_{j_1=1}^{m_0} \left(\sum_{m=0}^{p-2} C_p^m \mu_{j_1}^m V_{j_1 j_1}^{p-m} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\substack{j_2, \dots, j_p=1 \\ \bigcap_{n=1}^p \{j_n\} = \emptyset}}^{m_0} \prod_{s=1}^p a_{j_s j_r} \right), \quad p = \overline{2, m_0}.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 |\Delta_1(m_0)| &\leq \left| \sum_{k=2}^{t_1} \alpha_k^{(1)}(m_0) \right| + \sum_{k=t_1+1}^{\infty} \left| \alpha_k^{(1)}(m_0) \right|, \\
 |\Delta_p(m_0)| &\leq \left| \sum_{k=2}^{t_p} \alpha_k^{(p)}(m_0) - \sum_{j_1=1}^{m_0} \left(\sum_{m=0}^{p-2} C_p^m \mu_{j_1}^m V_{j_1 j_1}^{p-m} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{\substack{j_2, \dots, j_p=1 \\ \bigcap_{n=1}^p \{j_n\} = \emptyset}}^{m_0} \prod_{s=1}^p a_{j_s j_r} \right) \right|, \quad (14)
 \end{aligned}$$

$$+ \left| \sum_{\substack{j_2, \dots, j_p=1 \\ \bigcap_{n=1}^p \{j_n\} = \emptyset}}^{m_0} \prod_{s=1}^p a_{j_s j_r} \right| + \sum_{k=t_p+1}^{\infty} \left| \alpha_k^{(p)}(m_0) \right|, \quad p = \overline{2, m_0}, \quad t_p \in N.$$

Применяя оценки поправок теории возмущений, имеем

$$\sum_{k=t_p+1}^{\infty} \left| \alpha_k^{(p)}(m_0) \right| \leq p n_0 \rho_{n_0}^p \frac{q^{t_p+1}}{1-q}, \quad p, t_p \in N. \quad (15)$$

Окончательно из (14) и (15) имеем

$$\begin{aligned} |\Delta_1(m_0)| &\leq \left| \sum_{k=2}^{t_1} \alpha_k^{(1)}(m_0) \right| + n_0 \rho_{n_0} \frac{q^{t_1+1}}{1-q}, \quad t_1 \in N, \\ |\Delta_p(m_0)| &\leq \left| \sum_{k=2}^{t_p} \alpha_k^{(p)}(m_0) - \sum_{j_1=1}^{m_0} \left(\sum_{m=0}^{p-2} C_p^m \mu_{j_1}^m V_{j_1 j_1}^{p-m} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{\substack{j_2, \dots, j_p=1 \\ \bigcap_{n=1}^p \{j_n\} = \emptyset}}^{m_0} \prod_{s=1}^p a_{j_s j_r} \right) \right| + p n_0 \rho_{n_0}^p \frac{q^{t_p+1}}{1-q}, \quad p = \overline{2, n_0}, \quad t_p \in N. \end{aligned}$$

□

Замечание 1. Если поправки $\alpha_k^{(p)}(m_0)$ в оценках (10) не вычислять, то их необходимо ослабить, положив $t_p = 1$. В этом случае

$$\begin{aligned} |\Delta_1(m_0)| &\leq m_0 \rho_{n_0} \frac{q^2}{1-q}, \\ |\Delta_p(m_0)| &\leq \left| \sum_{j_1=1}^{m_0} \left(\sum_{m=0}^{p-2} C_p^m \mu_{j_1}^m V_{j_1 j_1}^{p-m} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{\substack{j_2, \dots, j_p=1 \\ \bigcap_{n=1}^p \{j_n\} = \emptyset}}^{m_0} \prod_{s=1}^p a_{j_s j_r} \right) \right| + p n_0 \rho_{n_0}^p \frac{q^2}{1-q}, \quad p = \overline{2, m_0}. \end{aligned}$$

Известно, что сложности, возникающие в линейной теории устойчивости течения вязкой жидкости, в значительной мере связаны с математической проблемой нахождения собственных чисел несамосопряженных операторов. Кроме того, нахождение приближенных значений первых собственных чисел спектральной задачи Орра – Зоммерфельда является трудной задачей вычислительной математики, поэтому проверку нового метода РС приближенного вычисления первых собственных чисел дискретных операторов мы провели на этой задаче.

2. Спектральная задача Орра – Зоммерфельда

Рассмотрим плоскопараллельное течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя бесконечными параллельными плоскостями, которые могут двигаться параллельно друг другу с постоянными скоростями, а могут быть неподвижными. В последнем случае течение жидкости осуществляется за счет градиента гидродинамического давления. Возьмем декартову систему координат с осью Oy , направленной перпендикулярно плоскостям, уравнения которых есть $y = 0$ и $y = 2b$. Предположим, что наблюдатель движется вместе с нижней плоскостью. Обозначим через U_s скорость верхней плоскости относительно нижней, а через U_c – скорость в середине промежутка между плоскостями ($y = b$), когда последние неподвижны. Введем характерные величины

$$U_* = \frac{1}{2}U_s + U_c, \quad L_* = 2b.$$

Тогда скорость $\bar{u}(y)$ основного течения вязкой жидкости в безразмерной форме можно записать в виде [22]

$$U(y) = 4\frac{U_c}{U_*}y(1-y) + \frac{U_s}{U_*}y, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

В случае двумерного возмущения получаем спектральную задачу Орра – Зоммерфельда [22]

$$(T_o^2 + U_o - \beta T_o)\varphi = 0, \quad (16)$$

$$\varphi(y)\Big|_{y=0,1} = \frac{d\varphi(y)}{dy}\Big|_{y=0,1} = 0, \quad (17)$$

где $T_o = -\frac{d^2}{dy^2} + \alpha^2$; $U_o = i\alpha R\left(UT_o + \frac{d^2U}{dy^2}\right)$; $\beta = i\alpha Rc$ – комплексный спектральный параметр; $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число; λ – длина волны возмущения.

Введем оператор G_o :

$$G_o = T_o^2 + U_o - \beta T_o, \quad (18)$$

заданный в сепарабельном гильбертовом пространстве $L_2[0, 1]$. К области определения D_{G_o} оператора G_o отнесем все функции φ класса $C^4(0, 1) \cap C^1[0, 1]$, $\frac{d^4\varphi}{dy^4} \in L_2[0, 1]$, удовлетворяющие граничным условиям (18):

$$D_{G_o} = \left\{ \varphi \mid \varphi \in C^4(0, 1) \cap C^1[0, 1], \frac{d^4\varphi}{dy^4} \in L_2[0, 1], \right.$$

$$\left. \varphi(y)\Big|_{y=0,1} = \frac{d\varphi(y)}{dy}\Big|_{y=0,1} = 0 \right\}.$$

Рассмотрим дифференциальный оператор T_{o1} , положив

$$T_{o1}\varphi = \left(-\frac{d^2}{dy^2} + \alpha^2 \right)\varphi$$

с областью определения

$$D_{T_{o1}} = \left\{ \varphi \mid \varphi \in C^4(0, 1) \cap C^1[0, 1], \frac{d^4\varphi}{dy^4} \in L_2[0, 1], \varphi(y)\Big|_{y=0,1} = 0 \right\}$$

и неоднородную краевую задачу

$$\begin{aligned} T_{o_1}\varphi &= f(y), \quad 0 < y < 1, \\ \varphi(0) &= \varphi(1) = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Теорема 6. *Решение задачи (19) в области $D_{T_{o_1}}$ единственно и выражается формулой*

$$\varphi(y) = \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{\text{sh}(\alpha y)}{\text{sh}(\alpha)} \int_0^1 \text{sh}[\alpha(1-\xi)]f(\xi)d\xi - \int_0^y \text{sh}[\alpha(y-\xi)]f(\xi)d\xi \right\}.$$

Замечание 2. Так как задача (19) имеет единственное решение в области $D_{T_{o_1}}$, то оператор T_{o_1} , обратим и его обратный оператор $T_{o_1}^{-1}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} T_{o_1}^{-1}f &= \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{\text{sh}(\alpha y)}{\text{sh}(\alpha)} \int_0^1 \text{sh}[\alpha(1-\xi)]f(\xi)d\xi - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^y \text{sh}[\alpha(y-\xi)]f(\xi)d\xi \right\}. \end{aligned} \tag{20}$$

Непосредственно применять наш метод к нахождению первых собственных чисел спектральной задачи (16), (17) нельзя, так как оператор $U_o = i\alpha R \left(UT_o + \frac{d^2U}{dy^2} \right)$ не является ограниченным на $L_2[0, 1]$. Но можно построить вспомогательную задачу, у которой множество собственных чисел совпадает с множеством собственных чисел спектральной задачи (16), (17) и к которой применим разработанный метод. Для этого сделаем замену $\varphi = T_{o_1}^{-1}f$, тогда

$$G_o\varphi = (T_o^2 + U_o - \beta T_o)T_{o_1}^{-1}f.$$

Лемма 2. *На множестве функций D_{T_o}*

$$D_{T_o} = \left\{ f \mid f \in C^2(0, 1), \frac{d^2f}{dy^2} \in L_2[0, 1] : \frac{dT_{o_1}^{-1}f(y)}{dy} \Big|_{y=0,1} = 0 \right\}$$

выполняются равенства

$$T_o T_{o_1}^{-1}f = f, \tag{21}$$

$$T_{o_1}^{-1}T_o f(y) = f(y) - \frac{\text{sh}(\alpha y)}{\text{sh} \alpha} f(1) - \left[\text{ch}(\alpha y) - \text{cth} \alpha \text{sh}(\alpha y) \right] f(0). \tag{22}$$

Лемма 3. *Так как $T_o T_{o_1}^{-1}f = f$ и $T_{o_1}^{-1}T_o f \neq f$, то на множестве D_{T_o} оператор $T_{o_1}^{-1}$ является «правым» обратным оператором для оператора T_o .*

Используя лемму 2, имеем

$$G_o\varphi = (T_o^2 + U_o - \beta T_o)T_{o_1}^{-1}f = (T_o + U_o T_{o_1}^{-1} - \beta) f.$$

Следовательно уравнение (16) можно записать в виде

$$(T_o + P_o) f = \beta f.$$

Здесь $f = T_{o_1}\varphi$, $P_o = i\alpha R \left(U + \frac{d^2U}{dy^2} T_{o_1}^{-1} \right)$, $\beta = i\alpha R c$. При этом граничные условия

$\varphi(y) \Big|_{y=0,1} = 0$ удовлетворяются тождественно, а граничные условия $\frac{d\varphi(y)}{dy} \Big|_{y=0,1} = 0$ примут вид $\frac{dT_{o_1}^{-1}f(y)}{dy} \Big|_{y=0,1} = 0$. Очевидно, что множества собственных чисел спектральной

задачи

$$(T_o + P_o)f = \beta f, \quad f \in D_{T_o}, \quad (23)$$

где $D_{T_o} = \left\{ f \mid f \in C^2(0, 1), \frac{d^2 f}{dy^2} \in L_2[0, 1], \frac{dT_{o_1}^{-1} f(y)}{dy} \Big|_{y=0,1} = 0 \right\}$ и задачи (16), (17) совпадают, а их собственные функции связаны соотношениями $\varphi = T_{o_1}^{-1} f$, и $f = T_{o_1} \varphi$.

Теорема 7. Для нормы оператора P_o , заданного в сепарабельном гильбертовом пространстве $L_2[0, 1]$, справедлива оценка

$$\|P_o\| \leq \alpha R \left[\max_{0 \leq y \leq 1} |U(y)| + \frac{1}{\alpha^2} \max_{0 \leq y \leq 1} \left| \frac{d^2 U(y)}{dy^2} \right| \right]. \quad (24)$$

Замечание 3. Из оценки (23) следует, что оператор P_o является ограниченным в $L_2[0, 1]$.

Найдем собственные числа и собственные функции следующей краевой задачи:

$$T_o \omega = \mu \omega, \quad 0 < y < 1, \quad (25)$$

$$\frac{dT_{o_1}^{-1} \omega(y)}{dy} \Big|_{y=0,1} = 0. \quad (26)$$

Теорема 8. Спектральная задача (25), (26) имеет множество собственных чисел:

$$\{\alpha^2 + q_n^2\}_{n=1}^{\infty} \quad (27)$$

и множество собственных функций:

$$\left\{ C_{2n} \left[\frac{\alpha (\cos q_n - \operatorname{ch} \alpha)}{q_n \operatorname{sh} \alpha - \alpha \sin q_n} \sin(q_n y) + \cos(q_n y) \right] \right\}_{n=1}^{\infty}, \quad (28)$$

где числа q_n являются корнями трансцендентного уравнения

$$4\alpha e^{-\alpha} q - 2\alpha (1 + e^{-2\alpha}) q \cos q + (1 - e^{-2\alpha}) (\alpha^2 - q^2) \sin q = 0. \quad (29)$$

Замечание 4. Множество собственных чисел $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ задачи (25), (26) не имеет конечных предельных точек. При этом все собственные числа вещественные, неотрицательные и простые.

Замечание 5. Собственные функции задачи (25), (26) всегда можно выбрать вещественными.

Теорема 9. Собственные функции (28) оператора T_o , соответствующие различным собственным числам, ортогональны.

Доказательство. Пусть μ_n и μ_k ($n \neq k$) собственные числа, а $\omega_n(y)$ и $\omega_k(y)$ соответствующие им собственные функции задачи (25), (26). Запишем уравнение (25) в виде

$$\frac{d^2 \omega(y)}{dy^2} + q^2 \omega(y) = 0,$$

где $q^2 = \mu - \alpha^2$, $\mu > \alpha^2$, q – корень трансцендентного уравнения (29). Тогда функции $\omega_n(y)$ и $\omega_k(y)$ являются решениями соответствующих уравнений

$$\frac{d^2 \omega_n(y)}{dy^2} + q_n^2 \omega_n(y) = 0,$$

$$\frac{d^2\omega_k(y)}{dy^2} + q_k^2\omega_k(y) = 0.$$

Первое из этих уравнений умножим на $\omega_k(y)$, а второе – на $\omega_n(y)$, затем вычтем почленно одно из другого и проинтегрируем на отрезке $[0, 1]$. В результате получим

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left[\omega_k(y) \frac{d^2\omega_n(y)}{dy^2} - \omega_n(y) \frac{d^2\omega_k(y)}{dy^2} + (q_n^2 - q_k^2)\omega_n(y)\omega_k(y) \right] dy = \\ & = \int_0^1 \left\{ \frac{d}{dy} \left[\omega_k(y) \frac{d\omega_n(y)}{dy} - \omega_n(y) \frac{d\omega_k(y)}{dy} \right] + (q_n^2 - q_k^2)\omega_n(y)\omega_k(y) \right\} dy = \\ & = \left[\omega_k(y) \frac{d\omega_n(y)}{dy} - \omega_n(y) \frac{d\omega_k(y)}{dy} \right] \Big|_0^1 + (q_n^2 - q_k^2) \int_0^1 \omega_n(y)\omega_k(y) dy = 0. \end{aligned}$$

Используя лемму 2, имеем равенство

$$\omega_n(y) = T_{o_1}^{-1}T_o\omega_n(y) + \frac{\text{sh}(\alpha y)}{\text{sh} \alpha} \omega_n(1) + \left[\text{ch}(\alpha y) - \text{cth} \alpha \text{sh}(\alpha y) \right] \omega_n(0).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \left[\omega_k(y) \frac{d\omega_n(y)}{dy} - \omega_n(y) \frac{d\omega_k(y)}{dy} \right] \Big|_0^1 = \left[\omega_k(y) \frac{dT_{o_1}^{-1}T_o\omega_n(y)}{dy} - \right. \\ & \left. - \omega_n(y) \frac{dT_{o_1}^{-1}T_o\omega_k(y)}{dy} \right] \Big|_0^1 + \alpha \left\{ \omega_k(y) \left\langle \frac{\text{ch}(\alpha y)}{\text{sh} \alpha} \omega_n(1) + \left[\text{sh}(\alpha y) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \text{cth} \alpha \text{ch}(\alpha y) \right] \omega_n(0) \right\rangle - \omega_n(y) \left\langle \frac{\text{ch}(\alpha y)}{\text{sh} \alpha} \omega_k(1) + \left[\text{sh}(\alpha y) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \text{cth} \alpha \text{ch}(\alpha y) \right] \omega_k(0) \right\rangle \right\} \Big|_0^1 = \left[\omega_k(y) \frac{dT_{o_1}^{-1}T_o\omega_n(y)}{dy} - \right. \\ & \left. - \omega_n(y) \frac{dT_{o_1}^{-1}T_o\omega_k(y)}{dy} \right] \Big|_0^1. \end{aligned}$$

Так как ω_k и ω_n являются решением (25), то

$$\frac{dT_{o_1}^{-1}T_o\omega_n(y)}{dy} \Big|_{y=0,1} = \mu_n \frac{dT_{o_1}^{-1}\omega_n(y)}{dy} \Big|_{y=0,1} = 0.$$

Поэтому

$$\left[\omega_k(y) \frac{d\omega_n(y)}{dy} - \omega_n(y) \frac{d\omega_k(y)}{dy} \right] \Big|_0^1 = 0.$$

Значит,

$$(q_n^2 - q_k^2) \int_0^1 \omega_n(y)\omega_k(y) dy = 0,$$

а так как $q_n \neq q_k$, то

$$\int_0^1 \omega_n(y)\omega_k(y) dy = 0, \quad n \neq k.$$

□

Замечание 6. Числа $\{C_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$, входящие в (28), находятся из условий нормировки $\int_0^1 \omega_n(y)\omega_k(y)dy = \delta_{nk}$ (δ_{nk} - символ Кронекера) собственных функций задачи (25), (26).

Теорема 10. Оператор T_o с областью определения D_{T_o} является дискретным в $L_2[0, 1]$.

Обозначим через L_{T_o} подпространство $L_2[0, 1]$ элементами которого являются собственные функции спектральной задачи (25), (26).

Замечание 7. Поскольку все собственные числа μ задачи (25), (26) положительные, то для всех $\omega \in L_{T_o}$, $L_{T_o} \subset L_2[0, 1]$ имеем

$$(T_o\omega, \omega) = \mu(\omega, \omega) > 0.$$

Следовательно, оператор T_o положительный на L_{T_o} , а значит он полуограниченный снизу.

Разделив уравнение (29) на q^2

$$\frac{4\alpha e^{-\alpha}}{q} - 2\alpha\left(1 + e^{-2\alpha}\right)\frac{\cos q}{q} + \left(1 - e^{-2\alpha}\right)\left(\frac{\alpha^2}{q^2} - 1\right)\sin q = 0$$

и переходя к пределу при $q \rightarrow \infty$, имеем

$$\sin q = 0.$$

Следовательно, при $q \gg 1$ корни q_n трансцендентного уравнения (29) приближенно равны $n\pi$, то есть

$$q_n \approx n\pi, \quad n \gg 1.$$

Поэтому собственные числа μ_n спектральной задачи (25), (26) при $n \gg 1$ приближенно равны

$$\mu_n \approx \alpha^2 + n^2\pi^2. \quad (30)$$

Так как $\mu_n \approx \alpha^2 + q_n^2$, то

$$\rho_n = \frac{|\mu_{n+1} + \mu_n|}{2} \approx \frac{q_{n+1}^2 + q_n^2 + \alpha^2}{2}. \quad (31)$$

При $n \gg 1$

$$\rho_n \approx \pi^2 n^2 + \alpha^2. \quad (32)$$

Для нахождения приближенных значений первых m_0 собственных чисел $\{\tilde{\beta}_n(t_p)\}_{n=1}^{m_0}$ задачи (23) воспользуемся приближенным аналогом нелинейной системы m_0 уравнений (1)

$$\sum_{k=1}^{m_0} [\tilde{\beta}_k(t_p)]^p = \tilde{s}_p(t_p), \quad t_p \in N, \quad p = \overline{1, m_0}, \quad (33)$$

где

$$\tilde{s}_p(t_p) = \sum_{k=1}^{m_0} \mu_k^p + \sum_{k=1}^{t_p} \alpha_k^{(p)}(m_0).$$

Предельные абсолютные погрешности $\delta_{\tilde{s}_p}$, с которыми записаны уравнения в системе (33) оцениваются неравенствами

$$\delta_{\tilde{s}_1} \leq \sum_{k=2}^t |\alpha_k^{(1)}(m_0)| + n_0 \rho_{n_0} \frac{q^{t+1}}{1-q}, \quad t \in N,$$

$$\delta_{\tilde{s}_p} \leq \left| \sum_{k=2}^t \alpha_k^{(p)}(m_0) - \sum_{j_1=1}^{m_0} \left(\sum_{m=1}^{p-2} C_p^m \mu_{j_1}^m V_{j_1 j_1}^{p-m} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{j_2, \dots, j_p=1}^{m_0} \prod_{s=1}^p V_{j_s j_s} \right) \right| + p n_0 \rho_{n_0}^p \frac{q^{t+1}}{1-q}, \quad p = \overline{2, m_0}, \quad t \in N.$$

Скалярные произведения $V_{km} = (P_o \omega_k, \omega_m)$ для $\forall k, m \in N$ вычисляются по формулам

$$V_{km} = i\alpha R \left\{ \int_0^1 U(y) \omega_k(y) \omega_m(y) dy + \frac{U''}{\alpha^2 + q_k^2} \left[\delta_{km} - \frac{1}{\alpha^2 + q_m^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left\langle \omega_k(1) \left(\alpha \operatorname{cth} \alpha \omega_m(1) + q_m (C_{2m} \sin q_m - C_{1m} \cos q_m) \right) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} \left(C_{2m} \omega_m(1) + C_{2k} \omega_m(1) \right) + q_m C_{1m} C_{2k} + \alpha C_{2m} C_{2k} \operatorname{cth} \alpha \right\rangle \right] \right\}. \quad (34)$$

Здесь $C_{2n} = \frac{q_n \operatorname{sh} \alpha - \alpha \sin q_n}{\alpha (\cos q_n - \operatorname{ch} \alpha)} C_{1n}$. Обозначим $W_{km} = \frac{V_{km}}{i\alpha R}$. Из формул, по которым вычисляются поправки теории возмущений $\alpha_k^{(p)}(m_0)$, имеем

$$\alpha_k^{(p)}(m_0) = (i\alpha R)^k \frac{p}{k} \sum_{n=1}^{m_0} \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^{\infty} \left(\prod_{m=1}^k W_{j_m j_m} \right) \times \\ \times \operatorname{res}_{\mu_n} \left(\frac{\mu^{p-1}}{\prod_{m=1}^k (\mu - \mu_{j_m})} \right)$$

или

$$\alpha_k^{(p)}(m_0) = (i\alpha R)^k \gamma_k^{(p)}(m_0), \quad (35)$$

где

$$\gamma_k^{(p)}(m_0) = \frac{p}{k} \sum_{n=1}^{m_0} \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^{\infty} \left(\prod_{m=1}^k W_{j_m j_m} \right) \operatorname{res}_{\mu_n} \left(\frac{\mu^{p-1}}{\prod_{m=1}^k (\mu - \mu_{j_m})} \right).$$

Тогда систему уравнений (33) для нахождения приближенных значений первых m_0 собственных чисел $\{\tilde{c}_n(t_p)\}_{n=1}^{m_0}$ спектральной задачи (23) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{m_0} \tilde{c}_k^p(t_p) = \frac{1}{(i\alpha R)^p} \left[\sum_{k=1}^{m_0} \mu_k^p + \sum_{k=1}^{t_p} (i\alpha R)^k \gamma_k^{(p)}(m_0) \right], \quad p = \overline{1, m_0}. \quad (36)$$

Величины $\gamma_k^{(p)}(m_0)$ не зависят от числа Рейнольдса R для $\forall m_0, k, p \in N$, поэтому их значения можно использовать при вычислении собственных чисел $\{\tilde{c}_n(t_p)\}_{n=1}^{m_0}$ задачи Орра – Зоммерфельда для различных R . При этом должно выполняться неравенство

$$\frac{2\|P_o\|}{\mu_{m_0+1} - \mu_{m_0}} = \frac{2\|P_o\|}{q_{m_0+1}^2 - q_{m_0}^2} < 1.$$

По лемме 3, получим

$$\frac{2\|P_o\|}{q_{m_0+1}^2 - q_{m_0}^2} \leq \frac{2\alpha R \left[\max_{0 \leq y \leq 1} |\bar{u}(y)| + \frac{1}{\alpha^2} \max_{0 \leq y \leq 1} |\bar{u}''(y)| \right]}{q_{m_0+1}^2 - q_{m_0}^2} < 1.$$

Отсюда

$$R < \frac{q_{m_0+1}^2 - q_{m_0}^2}{2\alpha \left[\max_{0 \leq y \leq 1} |\bar{u}(y)| + \frac{1}{\alpha^2} \max_{0 \leq y \leq 1} |\bar{u}''(y)| \right]}.$$

При $m_0 \gg 1$, имеем

$$R < \frac{\pi^2(m_0 + 1)}{\alpha \left[\max_{0 \leq y \leq 1} |\bar{u}(y)| + \frac{1}{\alpha^2} \max_{0 \leq y \leq 1} |\bar{u}''(y)| \right]}$$

или

$$m_0 > \frac{\alpha R}{\pi^2} \left[\max_{0 \leq y \leq 1} |\bar{u}(y)| + \frac{1}{\alpha^2} \max_{0 \leq y \leq 1} |\bar{u}''(y)| \right]. \quad (37)$$

Неравенство (37) позволяет оценить количество первых собственных чисел $\{\tilde{c}_n(t_p)\}_{n=1}^{m_0}$ задачи Орра – Зоммерфельда, которые необходимо вычислять, чтобы удовлетворялась система уравнений (33).

3. Численные эксперименты

Нами было показано, что множества собственных чисел спектральных задач (16), (17) и (23) совпадают. Проиллюстрируем это, вычислив несколько первых собственных чисел задач (16), (17) и (23) для некоторых значений числа Рейнольдса R и α , используя метод Бубнова – Галеркина. Доказательство сходимости метода Бубнова – Галеркина, построенного на системе функций (38), при нахождении собственных чисел задачи Орра – Зоммерфельда (16), (17) впервые было дано в работе Г. И. Петрова [23] и позднее приводилось многими авторами в различных формах [24]. Приближенные значения собственных чисел (16), (17) будем обозначать \hat{c} , а задачи (23) \tilde{c} . Рассмотрим систему функций $\{\varphi_s(y)\}_{s=1}^{\infty}$

$$\varphi_s(y) = b_{1s} \sin(q_s y) + b_{2s} \cos(q_s y) + b_{3s} e^y + b_{4s} e^{-y}, \quad y \in [0, 1], \quad (38)$$

которую впервые предложил Г. И. Петров [23]. Здесь

$$b_{1s} = \frac{\alpha(\operatorname{ch} \alpha - \cos q_s)}{\alpha \sin q_s - q_s \sin \alpha} b_{2s}, \quad b_{3s} = -\frac{\alpha \sin q_s + q_s(e^{-\alpha} - \cos q_s)}{2(\alpha \sin q_s - q_s \sin \alpha)} b_{2s},$$

$$b_{4s} = -\frac{\alpha \sin q_s - q_s(e^{\alpha} - \cos q_s)}{2(\alpha \sin q_s - q_s \sin \alpha)} b_{2s}, \quad q_s - \text{корни уравнения (28)}.$$

Коэффициенты b_{2s} находятся из условий нормировки. Эти функции являются решениями краевой задачи

$$\varphi^{IV} - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi + \mu(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) = 0,$$

$$\varphi(y) \Big|_{y=0,1} = \frac{d\varphi(y)}{dy} \Big|_{y=0,1} = 0.$$

Введем две последовательности конечномерных пространств

$$D_{G_o}^{(n)} \subset D_{G_o}, \quad D_{T_o}^{(n)} \subset D_{T_o}$$

с базисами $\{\varphi_s\}_{s=1}^n$ и $\{\omega_s\}_{s=1}^n$, соответственно, где

$$D_{G_o} = \left\{ \varphi \mid \varphi \in C^4(0, 1) \cap C^1[0, 1], \frac{d^4 \varphi}{dy^4} \in L_2[0, 1], \right.$$

$$\left. \varphi(y) \Big|_{y=0,1} = \frac{d\varphi(y)}{dy} \Big|_{y=0,1} = 0 \right\},$$

$$D_{T_o} = \left\{ f \mid f \in C^2(0, 1), \frac{d^2 f}{dy^2} \in L_2[0, 1], \frac{dT_{o1}^{-1} f(y)}{dy} \Big|_{y=0,1} = 0 \right\},$$

ω_s – собственные функции (25), (26). Тогда приближения по Бубнову – Галеркину спектральной задачи Орра – Зоммерфельда (16), (17) ищутся в виде

$$\varphi^{(n)} = \sum_{s=1}^n b_s^{(n)} \varphi_s,$$

а (23) в виде

$$f^{(n)} = \sum_{s=1}^n a_s^{(n)} \omega_s.$$

Причем коэффициенты $b_s^{(n)}$ выбираются так, чтобы невязка $G_o \varphi^{(n)}$ была ортогональна всем элементам из $D_{G_o}^{(n)}$, а коэффициенты $a_s^{(n)}$ выбираются так, чтобы невязка $(T_o + P_o - \beta) f^{(n)}$ была ортогональна всем элементам из $D_{T_o}^{(n)}$, то есть

$$\begin{aligned} (G_o \varphi^{(n)}, \varphi_m) &= \sum_{k=1}^n b_k^{(n)} \int_0^1 \left\{ T_o^2[\varphi_k(y)] + i\alpha R \langle [U(y) - \hat{c}] T_o[\varphi_k(y)] + \right. \\ &\quad \left. + U''(y) \varphi_k(y) \rangle \right\} \varphi_m(y) dy = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((T_o + P_o - \beta) f^{(n)}, \omega_m) &= \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} \int_0^1 \left\{ T_o[\omega_k(y)] + i\alpha R \langle [U(y) - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{c}] \omega_k(y) + U''(y) T_{o1}^{-1}[\omega_k(y)] \rangle \right\} \omega_m(y) dy = 0, \quad m = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Отсюда приходим к следующим системам линейных уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n b_k^{(n)} \left\{ \frac{\mu_k}{i\alpha R} \delta_{km} + \int_0^1 \left[\mu_k U(y) \phi_k(y) + U''(y) \varphi_k(y) \right] \times \right. \\ \left. \times \varphi_m(y) dy - \hat{c} \delta_{km} \right\} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} \left\{ \frac{\mu_k}{i\alpha R} \delta_{km} + \int_0^1 \left\langle \mu_k U(y) \omega_k(y) + U''(y) T_{o1}^{-1}[\omega_k(y)] \right\rangle \times \right. \\ \left. \times \omega_m(y) dy - \tilde{c} \delta_{km} \right\} = 0, \end{aligned}$$

где $\phi_k = \frac{1}{\mu_k} T_o(\varphi_k)$, $\int_0^1 \phi_k(y) \varphi_m(y) dy = \frac{\delta_{km}}{\mu_k}$, δ_{km} – символ Кронекера, $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ – собственные числа спектральной задачи (25), (26), занумерованные в порядке возрастания их величин. Приравняв к нулю определители этих систем, получим уравнения, определяющие приближенные значения собственных чисел задач (16), (17) и (23)

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \hat{c} \mathbf{E}) &= 0, \\ \det(\mathbf{B} - \tilde{c} \mathbf{E}) &= 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Здесь $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{C}^{n \times n}$, $\mathbf{A} = \|a_{km}\|_{k,m=1}^n$, $\mathbf{B} = \|b_{km}\|_{k,m=1}^n$,

$$a_{km} = \frac{\mu_k}{i\alpha R} \delta_{km} + \int_0^1 [\mu_k U(y) \phi_k(y) + U''(y) \varphi_k(y)] \varphi_m(y) dy,$$

$$b_{km} = \frac{\mu_k}{i\alpha R} \delta_{km} + \int_0^1 \left\{ \mu_k U(y) \omega_k(y) + U''(y) T_{o_1}^{-1}[\omega_k(y)] \right\} \omega_m(y) dy,$$

$\mathbf{E} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ – единичная матрица.

Используя уравнения (39), были вычислены собственные числа задач (16), (17) и (23), при $\alpha = 1$ для плоской задачи Куэтта ($U_s = 0$, $U_c = 1$, табл. 1) и плоской задачи Пуазейля ($U_s = 1$, $U_c = 0$, табл. 2). Через $n_{\tilde{c}}$ обозначена размерность пространства $D_{G_o}^{(n)}$, а через $n_{\tilde{c}}$ – размерность пространства $D_{T_o}^{(n)}$. Для нахождения приближенных значений \hat{c} и \tilde{c} с необходимой точностью, размерность пространств $D_{G_o}^{(n)}$ и $D_{T_o}^{(n)}$ все время увеличивалась. Процесс счета продолжался до тех пор, пока $\max_{1 \leq j \leq n} |\hat{c}_j^{(n+1)} - \hat{c}_j^{(n)}|$ и $\max_{1 \leq j \leq n} |\tilde{c}_j^{(n+1)} - \tilde{c}_j^{(n)}|$ были больше заданной точности. При помощи переменной среды Digits увеличивалась длина мантисы для операций с плавающей запятой, которая определялась числами $\varepsilon_{\hat{c}}$, $\varepsilon_{\tilde{c}}$.

Таблица 1

R	j	$n_{\tilde{c}}$	$\varepsilon_{\tilde{c}}$	\hat{c}_j	$n_{\tilde{c}}$	$\varepsilon_{\tilde{c}}$	\tilde{c}_j	$ \hat{c}_j - \tilde{c}_j $
10	1	7	65	0,5000 – 3,8607i	27	45	0,5000 – 3,8613i	0,0006
	2			0,5000 – 8,1155i			0,5000 – 8,1085i	0,0070
	3			0,5000 – 15,7051i			0,5000 – 15,7048i	0,0003
	4			0,5000 – 23,9062i			0,5000 – 23,9054i	0,0008
	5			0,5000 – 35,4450i			0,5000 – 35,4449i	0,0001
1000	1	41	65	0,3835 – 0,1216i	41	65	0,3922 – 0,1251i	0,0093
	2			0,6166 – 0,1216i			0,6078 – 0,1258i	0,0098
	3			0,3380 – 0,2964i			0,3387 – 0,2941i	0,0024
	4			0,6520 – 0,2964i			0,6510 – 0,2941i	0,0025
	5			0,5000 – 0,3169i			0,5000 – 0,3202i	0,0033
40000	1	45	75	0,0981 – 0,0324i	45	75	0,0971 – 0,0326i	0,0010
	2			0,0487 – 0,0337i			0,0491 – 0,0344i	0,0008
	3			0,1030 – 0,0658i			0,1036 – 0,0652i	0,0009
	4			0,8960 – 0,0658i			0,8964 – 0,0652i	0,0007
	5			0,8505 – 0,0861i			0,8511 – 0,0868i	0,0009

Таблица 2

R	j	$n_{\tilde{c}}$	$\varepsilon_{\tilde{c}}$	\hat{c}_j	$n_{\tilde{c}}$	$\varepsilon_{\tilde{c}}$	\tilde{c}_j	$ \hat{c}_j - \tilde{c}_j $
100	1	35	45	0,4103 – 0,4219i	35	45	0,4158 – 0,4294i	0,0093
	2			0,5768 – 0,8376i			0,5790 – 0,8386i	0,0022
	3			0,6131 – 1,5562i			0,6111 – 1,5517i	0,0049
	4			0,6324 – 2,3853i			0,6368 – 2,3821i	0,0054
	5			0,6467 – 3,5387i			0,6408 – 3,5370i	0,0061
	6			0,6542 – 4,7590i			0,6519 – 4,7547i	0,0049
	7			0,6554 – 6,3047i			0,6519 – 6,3041i	0,0036
4000	1	61	75	0,1516 – 0,0097i	61	75	0,1517 – 0,0091i	0,0006
	2			0,8956 – 0,1161i			0,8882 – 0,1114i	0,0088
	3			0,8874 – 0,1105i			0,8889 – 0,1133i	0,0032
	4			0,2481 – 0,1514i			0,2410 – 0,1564i	0,0087
	5			0,7943 – 0,1957i			0,7988 – 0,2003i	0,0064
	6			0,7988 – 0,2004i			0,8005 – 0,2051i	0,0050
	7			0,4327 – 0,2351i			0,4351 – 0,2293i	0,0063

Результаты численных расчетов, приведенные в таблицах 1 и 2, показывают, что в рамках заданной точности первые собственные числа спектральных задач (16), (17) и (23) совпадают.

Формула (2) позволяет вычислять k -е поправки теории возмущений $\alpha_k^{(p)}(m_0)$ любого порядка $p \in N$. По мере возрастания порядка k *вычислительная эффективность CE* алгоритма нахождения поправок теории возмущения $\alpha_k^{(p)}(m_0)$, которую можно определить по формуле $CE = \frac{1}{\varepsilon t}$ (ε – ошибка приближенного решения, а t – время исполнения алгоритма), резко уменьшается. Это связано с тем, что формулы (2) содержат k -е числовые ряды. Поэтому для создания эффективных алгоритмов вычисления сумм рядов $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0)$ был разработан новый метод (теорема 5), который прост в численной реализации. Рассмотрим два способа вычисления числовых рядов Релея – Шредингера. Первый способ связан с нахождением соответствующей поправки $\alpha_k^{(p)}(m_0)$ по формуле (2) и получении k -й частичной суммы. Второй способ основан на теореме 5. Сравним эти методы, на примере задачи Орра – Зоммерфельда. Для этого воспользуемся системой уравнений (36).

$$\text{Обозначим } S_p(m_0) = \frac{1}{(i\alpha R)^p} \sum_{k=1}^{\infty} (i\alpha R)^k \tilde{\alpha}_k^{(p)}(m_0), \tilde{\alpha}_k^{(p)}(m_0) = \frac{\alpha_k^{(p)}(m_0)}{i\alpha R}, \text{ а через } \hat{S}_p(m_0)$$

и $\tilde{S}_p(m_0)$, приближенные значения $S_p(m_0)$, найденные первым методом и вторым соответственно. В таблицах 3 и 4 приведены результаты вычислений $\hat{S}_p(m_0)$ и $\tilde{S}_p(m_0)$ для плоского течения Куэтта ($U_s = 1, U_c = 0$) и плоского течения Пуазейля ($U_s = 0, U_c = 1$) соответственно при $\alpha = 1$. Сравнение результатов вычисления частичных сумм числовых рядов $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0)$ по двум методикам проведено при небольших числах Рейнольдса R . Это связано с тем, что при больших R первая методика мало эффективна.

Таблица 3

R	m_0	p	$\hat{S}_p(m_0)$	$\tilde{S}_p(m_0)$	$ \hat{S}_p(m_0) - \tilde{S}_p(m_0) $
50	5	1	2,5000 – 0,1892i	2,5000	0,0189
		2	1,3982 – 17,4733i	1,5725 – 17,4060i	0,1868
		3	–128,4493 – 14,1255i	–128,2074 – 16,4061i	2,2935
		4	–143,1619 + 992,0460i	–158,2618 + 987,1761i	15,8658
		5	7714,1731 + 1465,3043i	7700,5554 + 1492,7429i	30,6319
100	4	1	2,00000 + 0,0287i	2,0000	0,0287
		2	1,53352 – 5,2584i	1,2335 – 5,1584i	0,0355
		3	–12,73298 – 4,5588i	–12,6330 – 4,7588i	0,0689
		4	–15,44513 + 31,8955i	–15,5998 + 31,8971i	0,1546

Расчеты показывают, что в рамках принятой точности результаты вычислений по двум методикам хорошо согласуются.

Сравним результаты вычисления собственных чисел задачи Орра – Зоммерфельда, найденные методом РС, с полученными ранее. При этом необходимо учитывать, что при рассмотрении плоского течения Куэтта, большинство авторов считали, что профиль скорости основного течения $U(y)$ имеет вид $U(y) = y$ ($-1 \leq y \leq 1$). В качестве масштаба скорости они брали полуразность скоростей пластин, а в качестве масштаба длины – половину зазора между ними. Поэтому в таких задачах число Рейнольдса R_* в четыре раза меньше, чем число Рейнольдса R в нашей работе.

Таблица 4

R	m_0	p	$\widehat{S}_p(m_0)$	$\widetilde{S}_p(m_0)$	$ \widehat{S}_p(m_0) - \widetilde{S}_p(m_0) $
50	5	1	$2,8849 + 0,0198i$	2,8839	0,0198
		2	$1,9118 - 21,4958i$	$1,9734 - 21,5080i$	0,0628
		3	$-162,080 - 21,5336i$	$-162,0070 - 22,8619i$	1,3304
		4	$-215,2717 + 1256,3154i$	$-229,1901 + 1253,4464i$	14,2113
		5	$9718,7045 + 2172,2163i$	$9777,6327 + 2196,4840i$	63,7296
100	4	1	$2,2463 + 0,0093i$	2,2438	0,0097
		2	$1,4680 - 6,2158i$	$1,4448 - 6,1892i$	0,0354
		3	$-15,6159 - 6,2290i$	$-15,6879 - 6,3538i$	0,1441
		4	$-22,2070 + 39,2121i$	$-22,0645 + 39,3310i$	0,1851

В таблице 5 приведены значения мнимых частей c_1^* и \widetilde{c}_1 – первых собственных чисел плоской задачи Куэтта, взятые из работы [25] и вычисленные методом РС соответственно при $\alpha = 1$ и различных числах Рейнольдса R .

Таблица 5

R_*	$-Imc_1^*$	$-Im\widetilde{c}_1$	$ Imc_1^* - Im\widetilde{c}_1 $
1	9,306	9,656	0,350
9,85	0,956	1,013	0,057
49,9	0,288	0,359	0,071
60,3	0,312	0,319	0,007
66,3	0,384	0,304	0,080
103	0,286	0,249	0,037
314	0,184	0,149	0,035
900	0,124	0,104	0,020
3140	0,0786	0,0753	0,0033
8950	0,0542	0,0560	0,0018
34000	0,0340	0,0378	0,0038

Из таблицы 5 видно, что в рамках допустимых погрешностей результаты расчетов хорошо согласуются.

Отметим, что первые собственные числа задачи Орра – Зоммерфельда, найденные методом РС, также сравнивались с результатами вычислений методом Бубнова – Галеркина. Во всех случаях результаты хорошо согласуются.

Проведенные численные эксперименты по нахождению первых собственных чисел плоских задач Куэтта и Пуазейля показали высокую эффективность, разработанного нового метода.

Литература

1. Садовничий, В. А. Замечание об одном новом методе вычисления собственных значений и собственных функций дискретных операторов / В. А. Садовничий, В. В. Дубровский // Тр. семинара И. Г. Петровского. – М., 1994. – Вып. 17. – С. 244 – 248.
2. Кадченко, С. И. Вычисление сумм рядов Рэлея – Шредингера возмущенных самосопряженных операторов / С. И. Кадченко // Журн. числит. математики и мат. физики. – 2007. – Т. 47, № 9. – С. 1494 – 1505.
3. Кадченко, С. И. Новый метод вычисления первых собственных чисел дискретных несамопряженных операторов / С. И. Кадченко // Уравнения соболевского типа: сб. науч. работ. – Челябинск, 2002. – С. 42 – 59.

4. Кинзина, И. И. Нахождение собственных чисел возмущенных дискретных операторов / И. И. Кинзина // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Математика, Механика, Информатика. – 2008. – Вып. 10, № 6(107) – С. 34 – 43.
5. Вычисление первых собственных чисел краевой задачи гидродинамической устойчивости течения между параллельными плоскостями при малых числах Рейнольдса / В. А. Садовничий, В. В. Дубровский, С. И. Кадченко, В. Ф. Кравченко // ДАН России. – 1997. – Т. 335, № 5. – С. 600 – 604.
6. Вычисление первых собственных чисел краевой задачи Орра – Зоммерфельда с помощью теории регуляризованных следов / В. В. Дубровский, С. И. Кадченко, В. Ф. Кравченко, В. А. Садовничий // Электромагнит. волны и электрон. системы. – 1997. – Т. 2, № 6. – С. 13 – 19.
7. Вычисление первых собственных чисел дискретного оператора / В. В. Дубровский, С. И. Кадченко, В. Ф. Кравченко, В. А. Садовничий // Электромагнит. волны и электрон. системы. – 1998. – Т. 3, № 2. – С. 6 – 8.
8. Вычисление первых собственных чисел краевой задачи гидродинамической устойчивости течения Пуазейля в круглой трубе / В. А. Садовничий, В. В. Дубровский, С. И. Кадченко, В. Ф. Кравченко // Дифференц. уравнения. – 1998. – № 1. – С. 50 – 53.
9. Вычисление собственных чисел задачи гидродинамической устойчивости течения вязкой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами при небольших числах Рейнольдса / В. А. Садовничий, В. В. Дубровский, С. И. Кадченко, В. Ф. Кравченко // ДАН России. – 1998. – Т. 363, № 6. – С. 748 – 750.
10. Первые собственные числа задачи Орра – Зоммерфельда из теории гидродинамической устойчивости / В. А. Садовничий, В. В. Дубровский, С. И. Кадченко, В. Ф. Кравченко // УМН. – 1998. – Т. 53, в. 4 (322). – С. 138.
11. Дубровский, В. В. Вычисление первых собственных чисел задачи гидродинамической устойчивости течения вязкой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами / В. В. Дубровский // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 6. – С. 742 – 746.
12. Кадченко, С. И. Новый метод вычисления собственных чисел спектральной задачи Орра – Зоммерфельда / С. И. Кадченко // Электромагнит. волны и электрон. системы – 2000. – Т. 5, № 6, – С. 4 – 10.
13. Кадченко, С. И. Новый метод вычисления собственных чисел спектральной задачи Орра – Зоммерфельда / С. И. Кадченко // Электромагнит. волны и электрон. системы. – 2000. – Т. 5, № 6. – С. 4 – 10.
14. Новый метод приближенного вычисления первых собственных чисел спектральной задачи Орра – Зоммерфельда / В. В. Дубровский, С. И. Кадченко, В. Ф. Кравченко, В. А. Садовничий // ДАН России. – 2001. – Т. 378, № 4. – С. 443 – 446.
15. Новый метод приближенного вычисления первых собственных чисел спектральной задачи гидродинамической устойчивости течения Пуазейля в круглой трубе / В. В. Дубровский, С. И. Кадченко, В. Ф. Кравченко, В. А. Садовничий // ДАН России. – 2001. – Т. 380, № 2. – С. 160 – 163.
16. Новый метод вычисления первых собственных чисел спектральной задачи гидродинамической теории устойчивости течения вязкой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами / В. В. Дубровский, С. И. Кадченко, В. Ф. Кравченко, В. А. Садовничий // ДАН России. – 2001. – Т. 381, № 3. – С. 320 – 324.
17. Новый метод вычисления первых собственных чисел дискретных несамосопряженных операторов / С. И. Кадченко // Уравнения соболевского типа: сб. науч. работ. – Челябинск, 2002. – С. 42 – 59.

18. Кадченко, С. И. Вычисление собственных значений возмущенных дискретных полуограниченных операторов / С. И. Кадченко, И. И. Кинзина // Журн. числит. математики и мат. физики. – 2006. – Т. 46, № 7. – С. 1265 – 1272.
19. Садовничий, В. А. Теория операторов / В. А. Садовничий. – М.: Дрофа, 2004.
20. Михлин, С. Г. Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. – М.: Гостехтеориздат, 1957.
21. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988.
22. Линь Цая-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости / Линь Цая-цзяо. – М.: ИЛ, 1958.
23. Петров, Г. И. Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости / И. Г. Петров // ПММ. – 1940. – Т. 4, вып. 3. – С. 3 – 11.
24. Нейман-Заде, М. И. О вычислении собственных значений задачи Орра – Зоммерфельда / М. И. Нейман-Заде, Ф. Ф. Шкаликов // Фундаментальная и прикладная математика. – 2002. – Т. 8, № 1. – С. 301 – 305.
25. Штерн, В. Н. Устойчивость плоского течения Куэтта: дис. ... канд. физ.-мат. наук / В. Н. Штерн. – Новосибирск: Сибирское отделение АН СССР, 1970.

Кафедра прикладной математики и вычислительной техники,
Магнитогорский государственный университет
kadchenko@masu.ru

Поступила в редакцию 10 сентября 2009 г.

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА С ГРАНИЧНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

С. Абдурахманов, В. В. Карачик, Б. Х. Турметов

ON SOLVABILITY OF SOME BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE POISSON EQUATION WITH FRACTIONAL DIFFERENTIAL OPERATORS

C. Abdurakhmanov, V. V. Karachik, B. Kh. Turmetov

Исследуются две краевые задачи для уравнения Пуассона с граничными операторами дробного порядка в смысле Римана – Лиувилля и Капуто.

Ключевые слова: операторы дробного порядка, уравнение Пуассона, краевые задачи

Two problems for the Poisson equation with boundary fractional operators in the Riemann-Liouville and Kaputo are under investigation.

Keywords: fractional differential operator, the Poisson equation, boundary value problem

1. Введение

В настоящей работе изучаются вопросы разрешимости краевых задач для уравнения Пуассона с граничными операторами дробного порядка.

Определение 1. *Оператором дробного дифференцирования в смысле Римана – Лиувилля порядка α от функции $f(t)$ на интервале $(0, l)$ называется выражение, определяемое формулой*

$$D^\alpha[f](t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t (t - s)^{m-1-\alpha} f(s) ds, \quad t \in (0, l).$$

Если функция $f(t)$ m -раз дифференцируема на интервале $(0, l)$, то выражение

$$D_*^\alpha[f](t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^t (t - s)^{m-1-\alpha} f^{(m)}(s) ds$$

называется оператором дробного дифференцирования в смысле Капуто.

Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ – единичный шар в \mathbb{R}^n , $\partial\Omega = \{|x| = 1\}$ – единичная сфера, а ω_n – ее площадь. Рассмотрим в Ω следующую краевую задачу:

$$\Delta u(x) = g(x), \quad x \in \Omega \tag{1}$$

$$B^\alpha u(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

где B^α – один из операторов дробного дифференцирования в смысле Римана – Лиувилля D^α или Капуто D_*^α , действующий по направлению вектора x .

Отметим, что аналогичные задачи для уравнения Лапласа с граничными операторами целого порядка рассматривались в работах [1, 2], а для операторов дробного порядка в [4, 5, 6]. В зависимости от свойств решений мы будем изучать задачу (1), (2) в следующих постановках.

Задача 1. Найти функцию $u(x)$ такую, что $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $r^\alpha D^\alpha u(x) \in C(\bar{\Omega})$ и удовлетворяющую условиям (1), (2) в классическом смысле.

Задача 2. Найти функцию $u(x)$ такую, что $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $r^\alpha D_*^\alpha u(x) \in C(\bar{\Omega})$ и удовлетворяющую условиям (1), (2) в классическом смысле.

Справедливы следующие основные утверждения.

Теорема 1. Пусть $0 < \lambda < 1$, $0 < \alpha < 1$ и $\lambda + \alpha$ – нецелое. Тогда для любого $g(x) \in C^\lambda(\bar{\Omega})$ и $f(x) \in C^{\lambda+1}(\partial\Omega)$ решение задачи 1 существует и принадлежит классу $C^{\lambda+\alpha+1}(\bar{\Omega})$.

Теорема 2. Пусть $0 < \lambda < 1$, $m - 1 < \alpha < m$, $m = 2, 3, \dots$ и $\lambda + \alpha$ – нецелое. Тогда, для любых функций $g(x) \in C^{m-2+\lambda}(\bar{\Omega})$ и $f(x) \in C^\lambda(\partial\Omega)$ решение задачи 1 существует и принадлежит классу $C^{\lambda+\alpha}(\bar{\Omega})$.

Замечание 1. Нетрудно показать, что оператор D_*^α можно представить в виде

$$D_*^\alpha[f](t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-1-\alpha} \frac{1}{\tau^m} \prod_{i=0}^{m-1} \left(\tau \frac{d}{d\tau} - i \right) f(\tau) d\tau.$$

По аналогии с этим оператором введем следующий оператор

$$D_*^{\alpha,j}[f](t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1-\alpha}}{\tau^{m-2}} \prod_{i=0, i \neq j}^{m-1} \left(\tau \frac{d}{d\tau} - i + 2 \right) f(\tau) d\tau.$$

Теорема 3. Пусть $f(x) \in C(\partial\Omega)$, $g(x)$ – полином произвольной степени. Тогда, для разрешимости задачи 2 необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_{\partial\Omega} H_j(x) f(x) ds_x = \int_{\Omega} H_j(x) |x|^\alpha D_*^{\alpha,j} [g](x) dx, \quad (3)$$

где $H_j(x)$ – однородный гармонический полином степени j и $j = 0, 1, \dots, m - 1$.

2. Вспомогательные утверждения

Для доказательств основных теорем нам необходимы некоторые вспомогательные утверждения. В дальнейшем будем считать, что $0 < \lambda < 1$, $k = 0, 1, \dots$ и символ C будет обозначать положительную постоянную, значение которой нас не интересует.

Лемма 1. Пусть $v(x)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} \Delta v(x) &= g(x), \quad x \in \Omega \\ v(x)|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Если $g(x) \in C^{k+\lambda}(\bar{\Omega})$, то $v(x) \in C^{k+\lambda+2}(\bar{\Omega})$.

Доказательство этой леммы приведено в работе [7, с. 113].

Лемма 2. Пусть $\mu > -1$ и $v(x) \in C^{k+\lambda}(\bar{\Omega})$. Тогда, функция

$$h(x) = \int_0^1 (1-\tau)^\mu v(\tau x) d\tau$$

принадлежит классу $C^{k+\lambda}(\bar{\Omega})$.

Доказательство. Пусть $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ – мультииндекс с $|\beta| \leq k$. Очевидно, что

$$D^\beta h(x) = \int_0^1 (1-\tau)^\mu D^\beta v(\tau x) d\tau = \int_0^1 (1-\tau)^\mu \tau^\beta D_y^\beta v(y) d\tau.$$

Следовательно, для любых $x, x_0 \in \bar{\Omega}$ имеем

$$|D^\beta h(x) - D^\beta h(x_0)| \leq \int_0^1 (1-\tau)^\mu |D^\beta v(\tau x) - D^\beta v(\tau x_0)| d\tau \leq C|x - x_0|^\lambda.$$

Таким образом, $D^\beta h(x) \in C^\lambda(\bar{\Omega})$ для любого мультииндекса β такого, что $|\beta| \leq k$. Отсюда следует, что $h(x) \in C^{\lambda+k}(\bar{\Omega})$. \square

Лемма 3. Пусть $v(x) \in C^{m+\lambda+k}(\bar{\Omega})$. Тогда,

$$r^\alpha D^\alpha v(x) \in C^{\lambda+k}(\bar{\Omega}).$$

Доказательство. По определению

$$r^\alpha D^\alpha v(x) = \frac{r^\alpha}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dr^m} \int_0^r (r-\tau)^{m-1-\alpha} v(\tau\theta) d\tau,$$

где $r = |x|$, $\theta = \frac{x}{|x|}$. Рассмотрим функцию

$$h_1(x) = \int_0^r (r-\tau)^{m-1-\alpha} v(\tau\theta) d\tau.$$

После замены переменных $t = r\tau$ функция $h_1(x)$ записывается в виде

$$h_1(x) = r^{m-\alpha} \int_0^1 (1-t)^{m-1-\alpha} v(tx) dt = r^{m-\alpha} h_2(x).$$

По лемме 2 имеем

$$h_2(x) \in C^{\lambda+m+k}(\bar{\Omega}).$$

Тогда

$$r^\alpha \frac{d^m h_1(x)}{dr^m} = r^\alpha \frac{d^m}{dr^m} [r^{m-\alpha} h_2(x)] = r^\alpha \sum_{i=0}^m C_{i,\alpha} r^{m-\alpha-i} \frac{d^{m-i} h_2(x)}{dr^{m-i}} =$$

$$= \sum_{i=0}^m C_{i,\alpha} r^{m-i} \frac{d^{m-i} h_2(x)}{dr^{m-i}}.$$

Так как при $i = 0$ справедливо включение

$$\frac{d^m h_2(x)}{dr^m} \in C^{\lambda+k}(\bar{\Omega}),$$

то функция

$$r^\alpha \frac{d^m h_1(x)}{dr^m}$$

принадлежит классу $C^{\lambda+k}(\bar{\Omega})$. Следовательно,

$$r^\alpha D^\alpha v(x) \in C^{\lambda+k}(\bar{\Omega}).$$

Лемма 3 доказана. □

Рассмотрим функцию

$$E(x, y) = \frac{1}{n-2} |x-y|^{2-n},$$

которая является фундаментальным решением оператора Лапласа.

Лемма 4. Если $|y| < |x|$, то справедливо разложение

$$E(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+n-2} \frac{|y|^k}{|x|^{k+n-2}} \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)} \left(\frac{x}{|x|} \right) H_k^{(i)} \left(\frac{y}{|y|} \right), \quad (5)$$

где $H_k^{(i)}$ – ортогональная система однородных гармонических полиномов степени k , обладающих свойством $\|H_k^{(i)}\|_{L_2(\partial\Omega)} = \sqrt{\omega_n}$.

Доказательство. Пусть $|y| < |x|$. Тогда

$$|x-y|^{2-n} = \left| \frac{x}{|x|} |x| - \frac{y}{|y|} |y| \right|^{2-n} = |x|^{2-n} \left| \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} \right|^{2-n} = |x|^{2-n} |\xi - \eta|^{2-n},$$

где

$$\xi = \frac{x}{|x|}, \quad \eta = \frac{y}{|y|}, \quad |\xi| = 1, \quad |\eta| < 1.$$

Далее,

$$\begin{aligned} |\xi - \eta|^{2-n} &= \left[1 - 2 \left(\frac{x}{|x|}, \frac{y}{|y|} \right) + \frac{|y|^2}{|x|^2} \right]^{1-\frac{n}{2}} = \left[1 - 2 \frac{|y|}{|x|} \left(\frac{x}{|x|}, \frac{y}{|y|} \right) + \frac{|y|^2}{|x|^2} \right]^{1-\frac{n}{2}} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{\frac{n}{2}-1} \left[\left(\frac{x}{|x|}, \frac{y}{|y|} \right) \right] \frac{|y|^k}{|x|^k}, \end{aligned}$$

где $C_k^{\frac{n}{2}-1}(t)$ многочлены Гегенбауэра (см. [8]). Известно (см. [8]), что для многочленов Гегенбауэра имеют место соотношения

$$\begin{aligned} C_k^{\frac{n}{2}-1}(1) &= \frac{(k+n-3)!}{k!(n-3)!}, \\ h_k &= \frac{2k+n-2}{n-2} C_k^{\frac{n}{2}-1}(1). \end{aligned}$$

Кроме того, если $S_k^{(i)}(\xi)$ – произвольная ортонормированная система сферических гармоник степени k , то

$$\frac{C_k^{\frac{n}{2}-1}[(\xi, \eta)]}{C_k^{\frac{n}{2}-1}(1)} = \frac{\omega_n}{h_k} \sum_{i=1}^{h_k} S_k^{(i)}(\xi) S_k^{(i)}(\eta),$$

где $|\xi| = 1, |\eta| = 1$. Тогда, функция $|x - y|^{2-n}$ представляется в виде

$$|x - y|^{2-n} = |x|^{2-n} \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{\frac{n}{2}-1}[1] \left(\frac{\omega_n}{h_k} \sum_{i=1}^{h_k} S_k^{(i)}(\xi) S_k^{(i)}(\eta) \right) \frac{|y|^k}{|x|^k}.$$

Положим

$$S_k^{(i)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\omega_n}} H_k^{(i)}(\xi), \quad S_k^{(i)}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\omega_n}} H_k^{(i)}(\eta),$$

т.е.

$$S_k^{(i)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\omega_n}} H_k^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right), \quad S_k^{(i)}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\omega_n}} H_k^{(i)}\left(\frac{y}{|y|}\right).$$

Отсюда, для функции $E(x, y)$ получаем представление (5). Лемма 4 доказана. \square

Замечание 2. Похожий результат был получен также в [3] (лемма 3, с. 3517).

Следствие 1. Если выполняется неравенство $|x| < |y|$, то справедливо представление

$$E(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k + n - 2} \frac{|x|^k}{|y|^{k+n-2}} \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right) H_k^{(i)}\left(\frac{y}{|y|}\right).$$

Пусть $g(x)$ – полином произвольной степени. Предположим что, $P_m(x)$ – однородный полином степени m . Тогда известно (см. [9], с. 159), что существуют однородные гармонические полиномы $Y_{m-2k}(x)$ степени $m - 2k$ такие, что

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{[m/2]} |x|^{2k} Y_{m-2k}(x).$$

Далее, так как любой полином можно выразить через однородные полиномы, то $g(x)$ можно представить в виде

$$g(x) = \sum_{k,s} |x|^{2k} Y_s^{(k)}(x),$$

где $Y_s^{(k)}(x)$ – однородные гармонические полиномы степени s . Рассмотрим объемный потенциал $V(x)$ с плотностью $g(x)$, т.е.

$$V(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} E(x, y) g(y) dy.$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. Если

$$g(x) = \sum_{k,s} |x|^{2k} Y_s^{(k)}(x),$$

то для любого $x \in \bar{\Omega}$ имеем

$$V(x) = \sum_{k,s} \frac{|x|^{2k+2} Y_s^{(k)}(x)}{(2k+2)(2k+2s+n)} - \sum_{k,s} \frac{Y_s^{(k)}(x)}{(2k+2)(2s+n-2)}. \quad (6)$$

Доказательство. Пусть $\rho = |y|$, $\xi = \frac{y}{|y|}$. Тогда

$$V(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} E(x, \rho\xi) g(\rho\xi) dS_{\xi} d\rho. \quad (7)$$

Обозначим $f(x) = |x|^{2k} Y_s^{(k)}(x)$. Представим интеграл в правой части (7) в виде

$$V(x) = \int_0^{|x|} + \int_{|x|}^1 = I_1 + I_2.$$

Рассмотрим интеграл I_1 для функции $f(\rho\xi)$. Используя разложение (5), имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{\omega_n} \int_0^{|x|} \rho^{n-1} \int_{|\xi|=1} E(x, \rho\xi) f(\rho\xi) dS_{\xi} d\rho = \\ &= -\frac{1}{\omega_n} \int_0^{|x|} \rho^{n-1} \int_{|\xi|=1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho^m |x|^{-(m+n-2)}}{2m+n-2} \sum_{i=1}^{h_k} H_m^{(i)} \left(\frac{x}{|x|} \right) H_m^{(i)} \left(\frac{y}{|y|} \right) f(\rho\xi) dS_{\xi} d\rho = \\ &= -\frac{1}{\omega_n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(m+n-2)}}{2m+n-2} \int_0^{|x|} \rho^{n-1+m+2k+s} \sum_{i=1}^{h_k} H_m^{(i)} \left(\frac{x}{|x|} \right) \int_{|\xi|=1} H_m^{(i)}(\xi) Y_s^{(k)}(\xi) dS_{\xi} d\rho. \end{aligned}$$

Далее, учитывая ортогональность сферических гармоник различной степени и равенство

$$Y_s^{(k)} \left(\frac{x}{|x|} \right) = \sum_{i=1}^{h_s} \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} H_s^{(i)}(\xi) Y_s^{(k)}(\xi) dS_{\xi} H_s^{(k)} \left(\frac{x}{|x|} \right),$$

получаем

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{|x|^{-(s+n-2)}}{2s+n-2} \int_0^{|x|} \rho^{2s+2k+n-2} d\rho Y_s^{(k)} \left(\frac{x}{|x|} \right) = -\frac{|x|^{s+2k+2}}{(2s+n-2)(2s+2k+n)} Y_s^{(k)} \left(\frac{x}{|x|} \right) = \\ &= -\frac{|x|^{2k+2}}{(2s+n-2)(2s+2k+n)} Y_s^{(k)}(x). \end{aligned}$$

Преобразуем второй интеграл I_2

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{\omega_n} \int_{|x|}^1 \rho^{n-1} \int_{|\xi|=1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho^m |x|^{-(m+n-2)}}{2m+n-2} \sum_{i=1}^{h_k} H_m^{(i)} \left(\frac{x}{|x|} \right) H_m^{(i)} \left(\frac{y}{|y|} \right) \rho^{2k+s} Y_s^{(k)}(\xi) dS_{\xi} d\rho = \\ &= -\frac{|x|^s}{2s+n-2} \int_{|x|}^1 \rho^{2k+1} d\rho Y_s^{(k)} \left(\frac{x}{|x|} \right) = -\frac{1-|x|^{2k+2}}{(2s+n-2)(2k+2)} Y_s^{(k)}(x). \end{aligned}$$

Таким образом, будем иметь

$$\begin{aligned}
 V(x) &= -\frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} E(x, y)g(y)dy = -\sum_{k,s} \frac{|x|^{2k+2}}{(2s+n-2)(2s+2k+n)} Y_s^{(k)}(x) + \\
 &+ \sum_{k,s} \frac{|x|^{2k+2} - 1}{(2s+n-2)(2k+2)} Y_s^{(k)}(x) = \sum_{k,s} \frac{|x|^{2k+2} Y_s^{(k)}(x)}{(2k+2)(2s+2k+n)} - \\
 &- \sum_{k,s} \frac{Y_s^{(k)}(x)}{(2k+2)(2s+n-2)}.
 \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Замечание 3. Похожий результат был получен также в [2] (лемма 1, с. 416) для задачи (1), (2) с операторами целого порядка.

Лемма 6. Пусть

$$g(x) = \sum_{k,s} |x|^{2k} Y_s^{(k)}(x).$$

Тогда для $2k + s + 2 > \alpha$ справедливо равенство

$$r^\alpha D_*^{\alpha,j} [g](x) = \sum_{k,s} \prod_{i=0, i \neq j}^{m-1} (2k + s - i + 2) \frac{\Gamma(2k + s + 3 - m)}{\Gamma(2k + s + 3 - \alpha)} |x|^{2k+2} Y_s^{(k)}(x).$$

Доказательство. По определению оператора $D_*^{\alpha,j} [g](x)$ запишем

$$\begin{aligned}
 r^\alpha D_*^{\alpha,j} [g](x) &= \frac{r^\alpha}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^r \frac{(r-\tau)^{m-1-\alpha}}{\tau^{m-2}} \prod_{i=0, i \neq j}^{m-1} \left(\tau \frac{d}{d\tau} - i + 2 \right) g(\tau\theta) d\tau = \\
 &= \frac{r^2}{\Gamma(m-\alpha)} \sum_{k,s} \prod_{i=0, i \neq j}^{m-1} (2k + s - i + 2) |x|^{2k} Y_s^{(k)}(x) \int_0^1 (1-t)^{m-1-\alpha} t^{2k+s+2-m} dt = \\
 &= \sum_{k,s} \prod_{i=0, i \neq j}^{m-1} (2k + s - i + 2) \frac{\Gamma(2k + s + 3 - m)}{\Gamma(2k + s + 3 - \alpha)} |x|^{2k+2} Y_s^{(k)}(x).
 \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

3. Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы 1. Представим решение задачи 1 в виде $u(x) = v(x) + w(x)$, где $v(x)$ решение задачи (4), а $w(x)$ решение следующей задачи

$$\begin{aligned}
 \Delta w(x) &= 0, \quad x \in \Omega \\
 D^\alpha w(x)|_{\partial\Omega} &= f(x) - r^\alpha D^\alpha v(x) \equiv f_1(x).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Известно (см. [6]), что для любого $f_1(x) \in C(\partial\Omega)$ решение задачи (8) существует. Далее, из результатов разделов 1 и 2 следует, что если $f_1(x) \in C^{\lambda+k}(\partial\Omega)$, то решение задачи (8) принадлежит классу $C^{\lambda+k+\alpha}(\bar{\Omega})$. Остается изучить гладкость решения задачи (4). Так как $g(x) \in C^\lambda(\bar{\Omega})$, то в силу утверждения леммы 1 имеем $v(x) \in C^{\lambda+2}(\bar{\Omega})$. Тогда из леммы 3 следует, что $r^\alpha D^\alpha v(x) \in C^{\lambda+1}(\bar{\Omega})$, и, следовательно, получим $f_1(x) \in C^{\lambda+1}(\partial\Omega)$. Теорема 1 доказана. □

Используя результаты работы [10] гладкость решения задачи 1 в теореме 1 можно уточнить в следующем виде.

Лемма 7. Пусть для функции $g(x)$ имеет место оценка

$$|g(x)| \leq C(1 - |x|)^{\lambda-1}$$

и для этой функции решение задачи (4) существует. Тогда для любого $\mu < \lambda$ функция $v(x)$ принадлежит классу $C^{1+\mu}(\bar{\Omega})$.

Теорема 4. Пусть $0 < \lambda < 1$, $0 < \alpha < \lambda$ и $\lambda + \alpha$ – нецелое. Если функция $g(x)$ удовлетворяет условиям леммы 6, то для любого $f(x) \in C^\lambda(\partial\Omega)$ решение задачи 1 существует и принадлежит классу $C^{\lambda+\alpha}(\bar{\Omega})$.

Доказательства теорем 2 и 4 проводится повторением доказательства теоремы 1 с небольшими изменениями.

Доказательство теоремы 3. Осуществим в задаче 1 замену переменных по формуле $u(x) = V(x) + w(x)$, где функция $V(x)$ находится из (5). Тогда она перейдет в однородную задачу (1), (2) с функцией $\psi(x)$ вида

$$\psi(x) = f(x) - D^\alpha V(x)|_{\partial\Omega}.$$

Очевидно, что $D_*^\alpha V(x) \in C(\partial\Omega)$. Поэтому, применяя результат работы [4], найдем

$$0 = \int_{\partial\Omega} H_j(x)\psi(x)ds_x = \int_{\partial\Omega} H_j(x)f(x)ds_x - \int_{\partial\Omega} H_j(x)r^\alpha D_*^\alpha V(x) ds_x,$$

т.е. условием разрешимости задачи 2 является равенство

$$\int_{\partial\Omega} H_j(x)f(x)ds_x = \int_{\partial\Omega} H_j(x)r^\alpha D_*^\alpha V(x) ds_x.$$

Вычислим $r^\alpha D_*^\alpha V(x)$. Используя представление (6), имеем

$$\begin{aligned} r^\alpha D_*^\alpha [V](x) &= \frac{r^\alpha}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^r (r-\tau)^{m-1-\alpha} \frac{1}{\tau^m} \prod_{i=0}^{m-1} \left(\tau \frac{d}{d\tau} - i \right) V(r\theta) d\tau = \\ &= \sum_{k,s} \prod_{i=0}^{m-1} \frac{(2k+s-i+2)}{(2k+2)(2k+2s+n)} \frac{\Gamma(2k+s+3-m)}{\Gamma(2k+s+3-\alpha)} |x|^{2k+2} Y_s^{(k)}(x) - \\ & \quad - \sum_{k,s} \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+1-\alpha)} Y_s^{(k)}(x). \end{aligned}$$

Заметим, что если $2k+s+2 < \alpha$, то $D_*^\alpha [V](x) = 0$.

Преобразуем интеграл

$$\int_{\partial\Omega} H_j(x)r^\alpha D_*^\alpha V(x)ds_x.$$

Так как для любого $j \neq s$ справедливо равенство

$$\int_{\partial\Omega} H_j(x)Y_s^{(k)}(x) ds_x = 0, \tag{9}$$

то

$$\sum_{k,s} \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+1-\alpha)} \int_{\partial\Omega} H_j(x) Y_s^{(k)}(x) ds_x = 0$$

для любых j, s . Поэтому, достаточно изучить интеграл

$$I = \int_{\partial\Omega} H_j(x) \sum_{k,s} \prod_{i=0}^{m-1} \frac{(2k+s-i+2)}{(2k+2)(2k+2s+n)} \frac{\Gamma(2k+s+3-m)}{\Gamma(2k+s+3-\alpha)} |x|^{2k+2} Y_s^{(k)}(x) ds_x.$$

Пусть

$$g_1(x) = |x|^{2k+2} Y_s^{(k)}(x).$$

Тогда в силу (9) будем иметь

$$\int_{\partial\Omega} H_j(x) g_1(x) ds_x = \int_{\partial\Omega} H_j(x) Y_j^{(k)}(x) ds_x.$$

Следовательно,

$$I = \sum_k \prod_{i=0}^{m-1} \frac{(2k+j-i+2)}{(2k+2)(2k+2j+n)} \frac{\Gamma(2k+j+3-m)}{\Gamma(2k+j+3-\alpha)} \int_{\partial\Omega} H_j(x) Y_j^{(k)}(x) ds_x.$$

Далее, учитывая, что j принимает значения $j = 0, 1, \dots, m-1$ имеем

$$I = \sum_k \prod_{i=0, i \neq j}^{m-1} \frac{(2k+j-i+2)}{(2k+2j+n)} \frac{\Gamma(2k+j+3-m)}{\Gamma(2k+j+3-\alpha)} \int_{\partial\Omega} H_j(x) Y_j^{(k)}(x) ds_x.$$

Известно (см. [2], лемма 3, с. 417), что выполняется равенство

$$\frac{1}{2k+s+j+n} \int_{\partial\Omega} H_j(x) Y_s^{(k)}(x) ds_x = \int_{\Omega} H_j(x) |x|^{2k} Y_s^{(k)}(x) dx. \quad (10)$$

Тогда, используя (9) и (10), интеграл I можно записать в виде

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k,s} \prod_{i=0, i \neq j}^{m-1} \frac{(2k+s-i+2)}{(2k+j+s+n)} \frac{\Gamma(2k+s+3-m)}{\Gamma(2k+s+3-\alpha)} \int_{\partial\Omega} H_j(x) Y_s^{(k)}(x) ds_x = \\ &= \sum_{k,s} \prod_{i=0, i \neq j}^{m-1} (2k+s-i+2) \frac{\Gamma(2k+s+3-m)}{\Gamma(2k+s+3-\alpha)} \int_{\Omega} H_j(x) |x|^{2k} Y_s^{(k)}(x) ds_x = \\ &= \int_{\Omega} H_j(x) \sum_{k,s} \prod_{i=0, i \neq j}^{m-1} (2k+s-i+2) \frac{\Gamma(2k+s+3-m)}{\Gamma(2k+s+3-\alpha)} |x|^{2k} Y_s^{(k)}(x) dx. \end{aligned}$$

И, наконец, из леммы 6 следует, что

$$I = \int_{\Omega} H_j(x) r^\alpha D_*^{\alpha, j} [g](x) dx.$$

Таким образом, верно равенство

$$\int_{\partial\Omega} H_j(x) r^\alpha D_*^\alpha V(x) ds_x = \int_{\Omega} H_j(x) r^\alpha D_*^{\alpha, j} [g](x) dx.$$

Отсюда вытекают равенства (3). Теорема 3 доказана. \square

Литература

1. Карачик, В. В. О разрешимости одной задачи для уравнения Пуассона в шаре / В. В. Карачик // Вопросы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент. – 1993. – Вып. 95. – С.77 – 88.
2. Карачик, В. В. Об одной задаче для уравнения Пуассона с нормальными производными на границе / В. В. Карачик // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т.32, № 3. – С. 416 – 418.
3. Karachik, V. V. On one set of orthogonal harmonic polynomials / V. V. Karachik// Proceedings of American Mathematical Society. – 1998. – V. 126, №. 12. – P. 3513 – 3519.
4. Турметов, Б.Х. Об одной краевой задаче для гармонического уравнения / Б. Х. Турметов // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т.32, № 8. – С. 1089 – 1092.
5. Турметов, Б.Х. О гладкости решения одной краевой задачи с граничным оператором дробного порядка / Б. Х. Турметов // Математические труды. – Новосибирск. – 2004. – Т.7, № 1. – С.189 – 199.
6. Абдурахманов, С. О гладкости решения краевых задач с операторами дробного дифференцирования / С. Абдурахманов // Узбек. мат. журн. – 2006. – № 2. – С. 3 – 8.
7. Гильбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гильбарг, Н. Трудингер. – М.: Наука, 1989. – 463 с.
8. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – Т.2. – М.: Наука, 1966. – 295 с.
9. Стейн, И. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах / И. Стейн, Г. Вейс. – М.: Мир, 1974. – 333 с.
10. Алимов, Ш. А. Об одной задаче с наклонной производной / Ш. А. Алимов // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т.17, № 10. – С. 1738 – 1751.

Ташкентский государственный технический университет
имени А. Беруни, г. Ташкент, Республика Узбекистан;
Южно-Уральский государственный университет;
Международный казахско-турецкий университет
имени Х. А. Ясави, г. Туркестан, Республика Казахстан
karachik@susu.ru

Поступила в редакцию 4 сентября 2009 г.

ПОИСК ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ПО ПОЛЮ ВЫСОТ

С. Н. Васильев, Я. В. Малыгин, А. В. Мироненко

UNMANNED AIRBORNE VEHICLE TRAJECTORY SEARCH USING ELEVATION FIELD

S. N. Vasilyev, Y. V. Malygin, A. V. Mironenko

Рассматривается задача поиска траектории движения летательного аппарата, проходящей через области с минимальной ошибкой навигации. Навигация осуществляется по информации о поле высот в целом и фрагменту поля, снятому при движении аппарата. Описывается параллельный алгоритм поиска и полученные результаты.

Ключевые слова: навигация летательного аппарата, поиск траектории движения, параллельный алгоритм

The problem of unmanned airborne vehicle trajectory search is considered. The target trajectory must pass over the regions with small navigation error. The navigation is performed using the entire elevation field and its fragments measured by the vehicle in flight. Parallel algorithm of trajectory search and obtained results are described.

Keywords: navigation of an airborne vehicle, trajectory search, parallel algorithm

Введение

Задача навигации состоит в определении местоположения летательного аппарата (ЛА): координат центра масс t и ориентации a по информации о геофизическом поле в целом и по фрагменту поля, снятому ЛА при движении. В качестве геофизического поля рассматривается поле высот F , заданное на области $Q \subset \mathbf{R}^2$. Рельеф определяется графиком $\text{graph } F$.

Пусть ЛА находится в точке $v = (t, a) \in \mathbf{R}^6$. Фрагмент поля снимается ЛА посредством сканирующего луча $l \in \Delta$, где $\Delta = \{l\}$ – заданный конус сканирования. Через $\rho(t, a, l, F)$ обозначим наклонную дальность между точкой t и $\text{graph } F$ вдоль луча $a(l)$ (см. рис. 1). Набор наклонных дальностей при $l \in \Delta$ назовем фрагментом поля и обозначим его $\varphi_{t,a}(l, F)$. Для функций, заданных на Δ , определим норму, например

$$\|\varphi(l)\|_{\Delta} = \left(\int_{\Delta} |\rho(t, a, l, F)|^2 dl \right)^{1/2}.$$

Задача навигации сводится к поиску минимального уклонения между фрагментами

$$d(v, F) = \inf_{(T,A) \in V} \|\varphi_{t,a}(l, F) - \varphi_{T,A}(l, F)\|_{\Delta}$$

по множеству положений (T, A) из некоторой ограниченной области V . Эта задача решается на бортовом компьютере [1, 2].

Пусть $v^*(v, F)$ – один из аргументов, при котором достигается этот инфимум. Будем считать его вычисленным местоположением ЛА. Расстояние между истинным положением ЛА и вычисленным назовем ошибкой навигации в точке v : $D(v) = \rho(v, v^*(v))$.

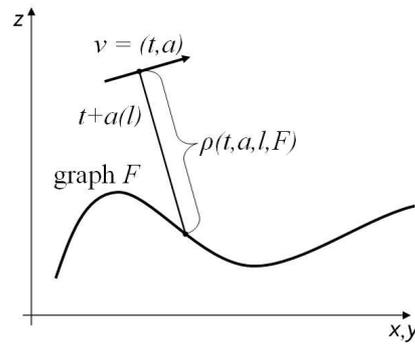


Рис. 1. Местоположение ЛА над рельефом

1. Построение алгоритма

Расчетная траектория движения (ЛА) состоит из чередующихся участков двух типов:

- 1) участок коррекции, на котором ЛА осуществляет сканирование поля высот и определение координат с последующей корректировкой курса.
- 2) участок «слепого» полета, на котором движение ЛА определяется заданной траекторией с учетом последней корректировки; накапливаемое на этом участке отклонение от курса определяется техническими параметрами ЛА и должно быть скомпенсировано в следующей зоне коррекции.

Оптимальная с точки зрения навигации траектория движения ЛА должна быть выбрана так, чтобы ее участки коррекции находились в районах с ошибкой навигации не больше некоторой наперед заданной величины D_{\max} . Нахождение траектории движения осуществляется до запуска ЛА и, в связи со значительным объемом вычислений, может выполняться на многопроцессорном вычислительном комплексе [2].

Для упрощения расчетов предполагаем, что высота полета ЛА постоянна, т.е. его положение определяется двумя пространственными координатами (x, y) и азимутом α : $v = (x, y, \alpha) \in \mathbf{R}^3$. Сама же траектория представляет собой ломаную, в ее вершинах производится коррекция, а отрезки являются участками «слепого» полета.

Для задачи поиска траектории используются следующие ограничения:

- допустимая величина ошибки навигации D_{\max} ;
- функция ошибки навигации для поля высот в точке в зонах коррекции $D(v) \leq D_{\max}$;
- начальная и конечная точка траектории v_0 и v_n ;
- расстояние между соседними зонами коррекции удовлетворяет условию: $r_{\min} \leq \rho((x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})) \leq r_{\max}$;
- изменение угла азимута между соседними зонами коррекции $|\alpha_i - \alpha_{i+1}| \leq \alpha_{\min}$, (рис. 2).

В нашем алгоритме мы предполагаем, что поле высот F задано на сетке $N_1 \times N_2$, а допустимые значения азимута α дискретизированы. Для поиска кратчайшей расчетной траектории, которая удовлетворяет указанным выше условиям, была использована модификация алгоритма Дейкстры поиска кратчайшего пути на графе [3]. Вершинами этого графа являются все узлы $v(x_i, y_j, \alpha_k)$ исходной сетки или ее прореженной версии, а дуги есть только между вершинами, удовлетворяющими набору ограничений (см. рис. 2). Вес дуги равен расстоянию $\rho((x_i, y_i), (x_j, y_j))$. При переходе к следующему шагу алгоритма Дейкстры к текущей найденной величине длины пути добавляется небольшой штраф, что дает преимущество тем траекториям, которые состоят из как можно меньшего числа отрезков.

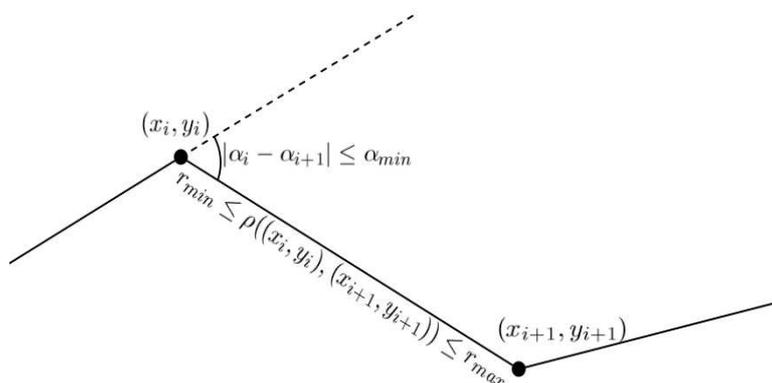


Рис. 2. Ограничения на траекторию

Для вычислительных экспериментов в качестве поля высот были использованы данные нескольких географических областей. В качестве конуса сканирования Δ взят симметричный набор из 5 лучей, лежащих в одной плоскости, с угловым расстоянием между соседними лучами в 5° . Данные полей высот были взяты в Интернете: <http://srtm.csi.cgiar.org/SELECTION/inputCoord.asp>.

Результат работы алгоритма поиска оптимальной траектории представлен на рис. 3. Здесь поле высот задано на сетке размером 430×161 с шагом 30 м.

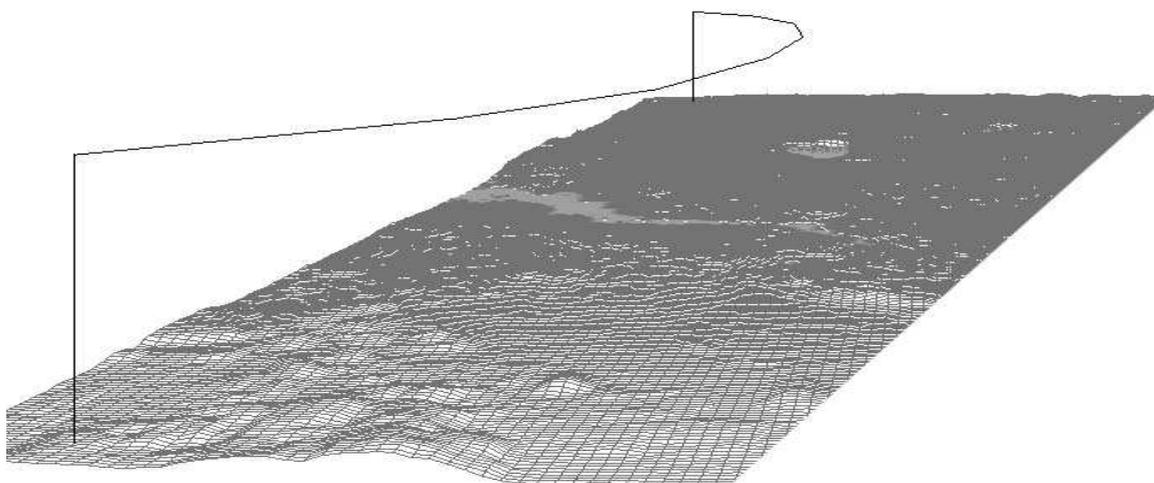


Рис. 3. Вычисленная траектория

На рис. 4 в плоскости XOY изображены найденные траектории при разных ограничениях на D_{\max} и α_{\max} .

2. Распараллеливание алгоритма

Ошибку навигации можно просчитать заранее для всего региона, подробнее см. в [2]. Как показывают эксперименты, в реальных задачах вычисление ошибок навигации требуются не во всех узлах региона, а лишь для 5 – 10% от их общего количества. Между

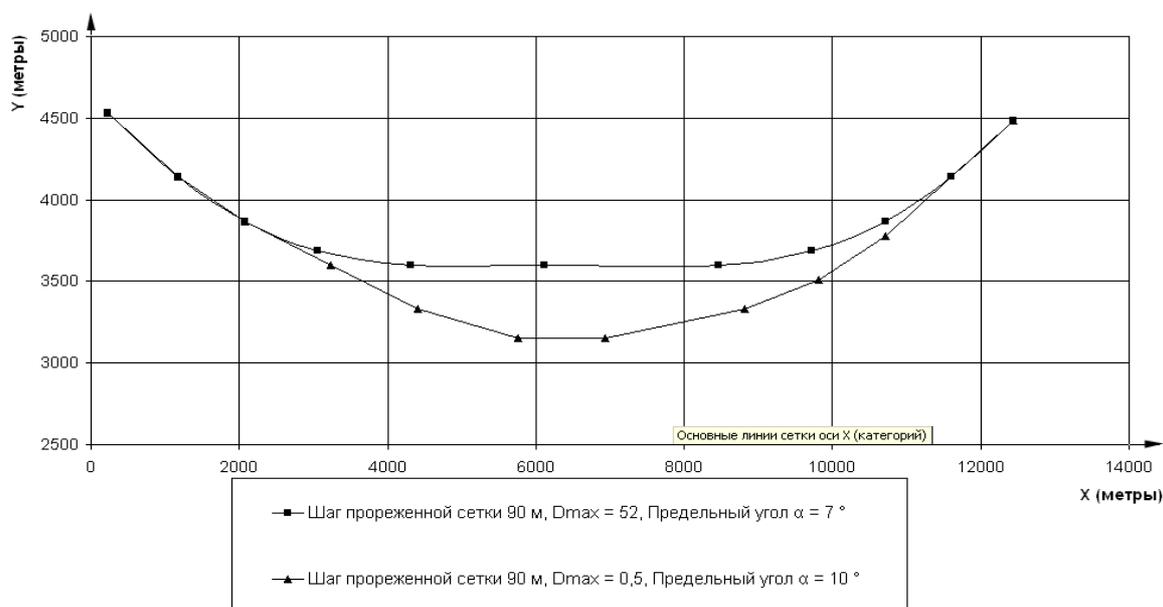


Рис. 4. Сравнительные схемы траекторий

тем, такие вычисления требуют больших вычислительных затрат. Поэтому была разработана модификация алгоритма, в которой ошибка навигации вычисляется непосредственно при проходе алгоритма Дейкстры, т.е. лишь для некоторых узлов сетки. Чтобы исключить повторные вычисления $D(v)$ в уже посчитанных узлах, значения этих вычислений необходимо сохранять в оперативной памяти. Узлы с уже посчитанными значениями могут быть достаточно сильно разбросаны по сетке, и для их хранения предложено использовать механизм квадродеревьев [4], который позволяет осуществлять поиск и добавление элементов за время, примерно пропорциональное глубине дерева.

Вся область Q (как правило, прямоугольная), на котором задано поле высот F , разбивается на 4 потомка, с каждым из которых связан список вычисляемых значений ошибок навигации для v , пространственные координаты (x, y) которого принадлежат данному потоку. Вновь вычисляемое значение ошибки добавляется в соответствующий список. Если для какого-либо потомка длина списка становится слишком большой, то этот потомок делится на четыре части, и его список элементов также распределяется между этими частями. Такое заполнение и деление квадродерева продолжается до завершения процедуры поиска (рис. 5).

Параллельный алгоритм поиска траектории движения ЛА действует следующим образом: один из вычислительных узлов (ВУ) комплекса назначается ведущим. На нем выполняется алгоритм Дейкстры, а также хранится квадродерево вычисленных значений ошибок навигации. При выполнении очередного шага алгоритма Дейкстры ведущий ВУ определяет список вершин графа, для которых необходимо вычислить $D(v)$, и назначает свободным ведомым вычислительным узлам соответствующие задания. Ведомые ВУ передают результаты счета ведущему ВУ, который записывает их в квадродерево (рис. 6).

На рис. 7 изображена зависимость скорости решения задачи поиска от количества вычислительных узлов. При относительно малом количестве узлов зависимость близка к линейной. Однако скорость выполнения алгоритма Дейкстры на ведущем узле является примерно постоянной, что сказывается на скорости решения всей задачи при увеличении количества узлов.

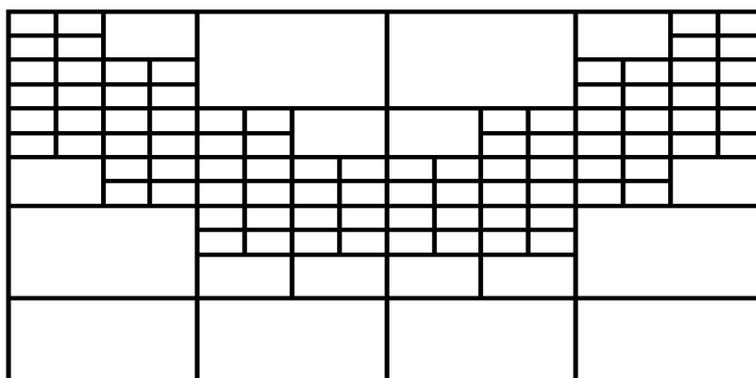


Рис. 5. Квадродерево вычисленных значений



Рис. 6. Схема параллельного алгоритма

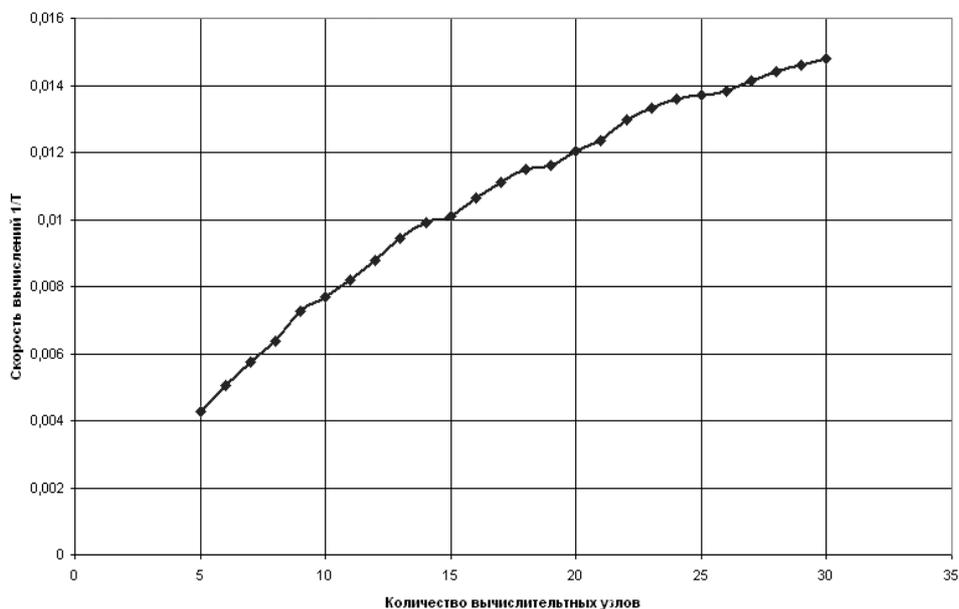


Рис. 7. Зависимость скорости вычисления от количества вычислительных узлов

3. Заключение

Планируется продолжить работу по поиску траектории движения ЛА с различными критериями оптимальности, проходящей через области с минимальной ошибкой навигации.

Статья рекомендована к печати программным комитетом международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии 2009» <http://agora.guru.ru/pavt>.

Работа поддержана программой 14 Президиума РАН, раздел 1 и программой 29 Президиума РАН, раздел 7.

Литература

1. Бердышев, В.И. Экстремальные задачи и модели навигации по геофизическим полям / В. И. Бердышев, В. Б. Костоусов // Научное издание. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. – 270 с.
2. Бердышев, В.И. Задача навигации. Аппроксимация поля высот / / В. И. Бердышев, Я. В. Малыгин // Параллельные вычислительные технологии (ПАВТ' 2007): тр. Международ. науч. конф. (Челябинск, 29 января – 2 февраля 2007г.). – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – Т. 1. – С. 28 – 30.
3. Ахо А. Построение и анализ вычислительных алгоритмов / А. Ахо, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман. – М.: Мир, 1979. – 536 с.
4. Препарата, Ф. Вычислительная геометрия: введение / Ф. Препарата, М. Шеймос. – М.: Мир, 1989. – 478 с.

Отдел теории приближения функций,
Институт Математики и Механики УрО РАН
malygin@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 16 августа 2009 г.

ДЕКОМПОЗИЦИЯ ДАННЫХ ДЛЯ РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЯ МЕТОДИКИ ТИМ-2D И КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ЕЕ КАЧЕСТВА

А. А. Воропинов

DATA DECOMPOSITION FOR TIM-2D CODE PARALLELIZING METHOD AND ITS QUALITY EVALUATION CRITERIA

A. A. Voropinov

Методика ТИМ-2D предназначена для решения задач механики сплошной среды на нерегулярных многоугольных сетках произвольной структуры. Описывается алгоритм декомпозиции данных для мелкозернистого распараллеливания методики ТИМ-2D, учитывающих разбиение на математические области. Вводится ряд критериев для оценки качества декомпозиции, используемые при мелкозернистом распараллеливании методики ТИМ-2D. Представленные критерии и алгоритмы проверяются на ряде тестовых декомпозиций.

Ключевые слова: нерегулярные многоугольные сетки, мелкозернистое распараллеливание, декомпозиция данных

TIM-2D is a continuum mechanics code that uses irregular polygonal grids of arbitrary structure. Several data decomposition algorithms for fine-grain paralleling of TIM-2D are described. A number of decomposition quality assessment criteria for fine-grain paralleling of TIM-2D are introduced. These criteria and algorithms are verified by means of a number of test decompositions.

Keywords: irregular polygonal meshes, fine-grain parallelism, data decomposition

1. Введение

Методика ТИМ-2D [1] предназначена для расчета нестационарных задач механики сплошной среды на нерегулярных лагранжевых сетках произвольной структуры. Ячейками сетки являются произвольные многоугольники, в узлах сходится произвольное количество ребер.

Для повышения точности проводимых расчетов и более адекватного моделирования сложных задач необходимо производить численное моделирование на сетках с большим количеством ячеек (счетных точек). Проведение расчетов с большим количеством счетных точек требует значительного календарного времени. Один из путей сокращения сроков – проведение расчетов в параллельном режиме счета.

Для методики ТИМ-2D реализуется трехуровневое распараллеливание [2]. На первом (верхнем) уровне осуществляется распараллеливание счета по математическим областям в модели распределенной памяти с использованием интерфейса передачи сообщений MPI. На втором уровне распараллеливается счет внутри математической области по параобластям

(математическая область разбивается на фрагменты с наложением в один слой ячеек), также с использованием MPI. На третьем (нижнем) уровне осуществляется распараллеливание итераций счетных циклов в модели общей памяти с использованием интерфейса OpenMP. Эти подходы могут использовать как вместе в различных сочетаниях, так и отдельно при расчете одной задачи. Разнообразие методов и их сочетаний определяет сложность задачи выполнения декомпозиции таким образом, чтобы она подходила для использования в методике ТИМ-2D.

Эффективное исполнение счетных программ методик на параллельных машинах с распределенной памятью требует декомпозиции данных по процессам таким образом, чтобы распределение вычислительной нагрузки по процессам было равномерным, а количество межпроцессорных обменов минимальным.

Для методик, использующих регулярные сетки, задача декомпозиции данных по процессам, как правило, решается с помощью разбиения сетки по столбцам или строкам (в трехмерном случае, также может использоваться и разбиение по листам), или с помощью матричного метода. Разбиение сетки по строкам или столбцам осуществляется путем «разрезания» сетки вдоль выделенного сеточного направления. В матричном методе «разрезание» осуществляется сразу по двум сеточным направлениям (в трехмерном случае может осуществляться и по трем сеточным направлениям). Эти методы хорошо себя зарекомендовали, так как достаточно просты для реализации, и в случае, когда расчет различных точек в задаче требует примерно одинакового количества вычислений, позволяют получить хорошую сбалансированность вычислительной нагрузки между процессами. Однако в случае, если в разных фрагментах задачи объем вычислений для расчета точек существенно различается, то добиться хорошей сбалансированности загрузки такими методами достаточно сложно.

Использование декомпозиции по строкам, столбцам или матричной декомпозиции для методик, использующие нерегулярные сетки невозможно, поскольку в нерегулярной сетке структурно не имеется выделенных сеточных направлений. Поэтому для методик, основанных на нерегулярных сетках, используются геометрические методы декомпозиции данных и методы декомпозиции, основанные на разбиении графов, отображающих структуру счетной сетки. Необходимо отметить, что методы, которые применимы для декомпозиции данных для методик на нерегулярных сетках, могут применяться и для методик на регулярных сетках.

Геометрические методы выполняют разбиение сетки, основываясь на координатной информации об ее элементах. Эти методы не всегда позволяют равномерно распределить нагрузку между процессами.

Недостатками геометрических методов являются: ограничения на форму геометрии; сложности при организации многообластного счета, так как трудно добиться особой обработки точек вдоль границ; также возникают проблемы в случае, если ячейки сетки имеют существенно различный размер в разных частях области. Также к недостаткам этих методов относится то, что они не учитывают информацию о соседстве элементов сетки, поэтому геометрические методы не могут явно привести к минимизации передаваемых между процессами данных. Все это приводит к тому, что использование геометрических методов для декомпозиции данных на достаточно большое количество процессов затруднительно.

Задача разбиения графа на подграфы оптимальным образом относится к классу NP -полных. Поэтому для ее решения, как правило, используют приближенные алгоритмы двух классов: геометрические и эвристические методы. Эвристические методы обеспечивают более сбалансированное разбиение, и передаваемых между процессами данных обычно меньше, чем при применении геометрических методов.

Существует большое количество эвристических методов: уровневое ячейное разбиение,

алгоритмы Kernighan-Lin и Fiduccia-Mattheyses, алгоритм спектральной бисекции, многоуровневые методы разбиения графов и другие.

Основой многоуровневых методов разбиения графов является следующая последовательность действий:

- огрубление графа: построение последовательности уменьшающихся в размере вложенных графов путем многократного стягивания ребер;
- начальная декомпозиция: вершины огрубленных графов распределяются на заданное число подграфов;
- восстановление графа и локальное уточнение декомпозиции: вершины всех графов сформированной последовательности, начиная с имеющих наименьший размер, распределяются по подграфам.

Многоуровневые алгоритмы эффективны по двум причинам: во-первых, алгоритм позволяет скрыть большое количество ребер в огрубленном графе, что уменьшает количество передаваемых между процессами данных; во-вторых, эти алгоритмы работают эффективнее, так как перемещение одной вершины в огрубленном графе эквивалентно перемещению большого числа вершин исходного графа.

Недостатком эвристических алгоритмов является то, что они не учитывают геометрические особенности сетки. Это может приводить к тому, что геометрически граница между подсетками может иметь очень сложный вид, что может осложнять работу алгоритмов, работающих с сеткой (в методике ТИМ-2D – дифференцируемые связи и локальные перестройки).

Одними из известных и общедоступных являются библиотеки семейства MeTiS [3]. Реализованные в библиотеке алгоритмы дают качественную декомпозицию по количеству передаваемых между процессами данных, и возможность балансировки загрузки процессов. Декомпозиция может выполняться как в последовательном, так и в параллельном режиме счета. В настоящее время пакет MeTiS используется в качестве базового при декомпозиции данных для мелкозернистого распараллеливания в методике ТИМ-2D.

Необходимо отметить, что любой метод декомпозиции можно рассматривать как разбиение графа, отображающего структуру сетки, на подграфы. Поэтому рассмотрение декомпозиции как разбиение графа является наиболее универсальным и позволяет единым образом описывать любой из способов декомпозиции (как геометрические, так и эвристические).

Общим недостатком всех приведенных методов декомпозиции является то, что они учитывают ограниченное число критериев. В то же время методика может накладывать дополнительные ограничения на получаемые подграфы (точнее на соответствующие им параобласти). В результате разбиение на подграфы, полученное каким-либо методом, может оказаться неудачным для использования в конкретной методике.

Так, в методике ТИМ-2D для поддержания качественной расчетной сетки используются два базовых метода. Первый – коррекция лагранжевой сетки путем наложения дифференцируемых связей [4], выполняемая без изменения структуры сетки. Второй – локальные перестройки сетки, при котором меняется как структура сетки, так и количество элементов сетки (ячеек, ребер и узлов). Использование этих алгоритмов приводит к наложению ряда дополнительных требований на декомпозицию. В случае, если эти требования не учитывать, то сетка может обрабатываться не корректно и, как следствие, качество сетки может значительно ухудшиться. Такими ограничениями являются, например, минимизация количества особых точек, в которых сходится более двух компактов, «оторванные ячейки» и ряд других.

2. Декомпозиция данных в методике ТИМ-2D

В методике ТИМ-2D используется трехуровневое распараллеливание в модели смешанной памяти. Эти три уровня могут использоваться по отдельности, попарно в различных сочетаниях и все вместе, таким образом, возможно 7 различных режимов распараллеливания. Конкретный режим определяется параметрами вычислительной системы, используемыми приближениями и параметрами задачи.

Учитывая возможность использования различных режимов распараллеливания, вопрос о корректной декомпозиции данных встает особенно остро. Сначала рассмотрим вопрос о декомпозиции данных для каждого из уровней отдельно, а затем для смешанных режимов.

2.1. Декомпозиция для распараллеливания по математическим областям

При распараллеливании по областям максимальное количество узлов, которые можно задействовать равно количеству областей. Разбиение задачи на математические области выполняется на этапе расчета начальных данных, исходя из геометрии задачи и начальных данных. В результирующей сетке может очень существенно различаться объем вычислений, приходящихся на каждую область из-за различного количества точек, веществ, используемых приближений и счетных алгоритмов. Это приводит к невысокой эффективности распараллеливания при расчете на максимальном количестве узлов. Для того, чтобы обойти эту проблему, в рамках методики ТИМ-2D реализована возможность отнесения нескольких математических областей к одному MPI процессу. То есть, одним процессом может обсчитываться не одна математическая область, а несколько. Благодаря этой возможности, как правило, удается сбалансировать вычислительную нагрузку, при этом уменьшается количество задействованных процессов, но ускорение остается на том же уровне, что и с использованием максимального количества.

Декомпозиция для распараллеливания по математическим областям производится в автоматическом режиме. Первоначальная декомпозиция выполняется на основе информации о количестве точек в областях. Недостатком такой декомпозиции является то, что она не учитывает реальную вычислительную нагрузку, связанную с областью, так как в разных областях используются различные вещества, используются различные приближения, по-разному работают алгоритмы контроля за качеством счётной сетки (коррекция и локальные перестройки). Это приводит к тому что хорошо сбалансированная задача с дисбалансом по количеству точек, например, в 5% может считаться с эффективностью 60 – 70%. Для того, чтобы преодолеть эти недостатки в процессе счета используются алгоритмы автоматической передекомпозиции, формирующие новую декомпозицию на основе реально затраченного времени на расчёт каждой математической области.

Сложностью при разработке таких алгоритмов стала «плавающая вычислительная нагрузка». Связано это с тем, что во время расчета вычислительная нагрузка меняется от шага к шагу главным образом в алгоритмах, работающих со счетной сеткой (коррекция и перестройки). При этом на соседних шагах время расчета области может различаться на 30 – 40% и более. С другой стороны, в процессе вычислений в математических областях, в результате работы алгоритмов локальных перестроек сетки постепенно изменяется количество счетных точек, что также изменяет время расчета области (на последующих шагах). Чтобы преодолеть эти трудности, декомпозиция выполняется на основе не общего времени счета с самого старта задачи и не на основе времени счета одного шага, а на основе времени счета последних 100 шагов. Такой подход позволяет, с одной стороны, сгладить влияние времени выполнения одного шага, с другой стороны, учитывает реальное количество точек в расчете на момент выполнения декомпозиции (за 100 шагов количество точек меняется не значительно).

При сохранении разреза вызывается процедура, формирующая наилучшую декомпозицию для текущего количества процессов. В случае, если сформированная декомпозиция оказывается лучше текущей и дает выигрыш в эффективности более чем на 10%, то производится передекомпозиция. При этом полностью освобождается вся память и зачитывается только что сохраненный разрез. Кроме этого, формируются декомпозиции на количество процессов от 2 до N , где N – количество областей в задаче. При этом выдаются декомпозиции, дающие ускорение выше, чем текущая. В случае необходимости пользователю рекомендуется изменить количество задействованных процессов для ускорения расчета.

2.2. Распределение вычислительной нагрузки между процессами при распараллеливании в модели общей памяти

При распараллеливании в модели общей памяти каждый счетный блок ТИМ-2D распараллеливается независимо. Всего в настоящее время для расчета задач газовой динамики и упругопластичности выделено 4 счетных блока: расчет узловых величин, расчет ячеечных величин, коррекция счетной сетки, локальные перестройки сетки. В каждом счетном блоке организована одна параллельная область OpenMP.

При распараллеливании в модели общей памяти понятие декомпозиции не вполне корректно, так как все данные являются общими для нитей (вычислительных ядер одного узла). При этом между нитями разделяются не данные, а итерации счетных циклов, каждая из которых может выполняться независимо. Такая организация возможна благодаря использованию в методике ТИМ-2D нерегулярных сеток и как следствие организация всех счетных алгоритмов без привязки к структуре счетной сетки. То есть каждая точка рассчитывается полностью независимо от расчета других точек.

Такая схема распараллеливания позволяет использовать распараллеливание в модели общей памяти совместно с распараллеливанием в модели распределенной памяти (как по математическим областям, так и мелкозернистое).

2.3. Декомпозиция для мелкозернистого распараллеливания

Программы, выполняющие декомпозицию, такие как MeTiS, в качестве исходных данных используют граф, отражающий связи между элементами сетки. При выполнении декомпозиции каждая вершина графа относится к одному из компактов, а некоторые ребра графа «разрезаются».

В методике ТИМ-2D декомпозиция осуществляется по ячейкам, так как ячейки являются основными счетными элементами.

Подход с разрезанием графа, отображающего структуру сетки на подграфы, является одним из самых универсальных. При таком подходе структура сетки представляется в виде графа, и решается задача о разрезании этого графа на подграфы с условием равенства подграфов по суммарному весу (далее декомпозиция графа сетки). В качестве весов используется вычислительная нагрузка на расчет точки.

Так как в методике ТИМ-2D декомпозиция осуществляется по ячейкам, то в качестве вершин графа используются ячейки, ребра графа соответствуют соседству между ячейками.

2.4. Декомпозиция в режиме счета с несколькими уровнями распараллеливания

При использовании нескольких уровней распараллеливания вопрос с декомпозицией встает особенно остро.

2.4.1. Прозрачность декомпозиции для OpenMP распараллеливания в модели смешанной памяти

Для распараллеливания в модели смешанной памяти распараллеливание с использованием OpenMP никаким модификациям не подвергается. Это происходит благодаря тому, что OpenMP распараллеливание осуществляется внутри математической области (распараллеливаются итерации счетных циклов по ячейкам или по узлам). В результате при распараллеливании по областям для OpenMP «не чувствует» этого распараллеливания (области относящиеся к другим процессам текущим процессом не обсчитываются и соответственно OpenMP для них не используется). При использовании мелкозернистого распараллеливания (совместно с распараллеливанием по областям) каждая параобласть в структурах данных оформляется как область, и поэтому OpenMP распараллеливание работает с ней точно так же как, и с обычной математической областью.

2.4.2. Мелкозернистое распараллеливание совместно с распараллеливанием по областям

В режиме мелкозернистого распараллеливания на верхний уровень распараллеливания возлагается задача формирования параобластей из математической области и дальнейшее управление расчетом полученных параобластей. Это включает в себя сбор общей информации о ходе расчета, выработку счетного шага, сбор интегральной информации, задание параметров расчета области и так далее. Помимо этого, на верхнем уровне распараллеливания выполняется расчет контактных границ математической области.

Для мелкозернистого распараллеливания совместно с распараллеливанием по областям возникает вопрос об учете разделения геометрии задачи на математические области.

Первая проблема возникает из-за того, что математические области в ТИМ-2D являются независимыми объектами уровня задачи (при решении задач газовой динамики и упругопластичности). То есть в каждой области используется собственная сплошная нумерация элементов сетки, начинающаяся с 1. В разных областях одной задачи количество точек может варьироваться от нескольких сотен до сотен тысяч. При этом ячейки каждой области разделяются на компакты не зависимо от других областей, но при выполнении декомпозиции необходимо получить сбалансированную нагрузку на процессы.

Решается эта проблема следующим образом. Каждая область делится на большое количество компактов – примерно на порядок больше, чем это необходимо (конкретная цифра тут не требуется, необходимо, чтобы получаемые компакты были достаточно мелкими). На этом этапе формируются компакты из примерно 1000 ячеек, области меньше 5000 ячеек на компакты не разбиваются. Полученные маленькие компакты по всем математическим областям собираются вместе и представляются в свою очередь в виде графа уже по всей задаче. То есть формируется макро граф, вершинами которого являются небольшие компакты и маленькие области, полученные при декомпозиции областей. Производится повторная декомпозиция уже на заданное количество процессов, в результате которой получается итоговая декомпозиция. Таким образом, декомпозиция производится за два захода и называется двухпроходной.

3. Критерии оценки качества декомпозиции

Задача рационального разбиения графа на определенное количество частей, содержащих равное количество вершин при условии минимизации числа разрезанных ребер и равномерного распределения их по всем подграфам, относится к классу *NP*-полных. Поэтому эта задача решается, как правило, приближенно при помощи различных геометрических или

эвристических алгоритмов. Общим недостатком алгоритмов декомпозиции является то, что они учитывают ограниченное число критериев, накладываемых на подграфы, в результате, разбиение может оказаться неудачным для использования в методике ТИМ-2D.

В данной работе предложен первый вариант списка критериев для методики ТИМ-2D. В дальнейшем он, по-видимому, будет пополняться. Например, ряд дополнительных ограничений могут быть введены из-за требований, накладываемых локальными перестройками сетки путем дробления и объединения ячеек. В настоящее время не даются количественные характеристики для получения приемлемой декомпозиции для вводимых критериев. Их доработка проводится при реализации мелкозернистого распараллеливания для счетных блоков при тестировании и выявлении не удачных декомпозиций.

3.1. Критерии для достижения более высокой эффективности распараллеливания

Для декомпозиции данных в режиме мелкозернистого распараллеливания в методике ТИМ-2D в качестве базовой используется библиотека MeTiS. Некоторые из декомпозиций, полученных пакетом MeTiS, использовались в качестве тестовых.

Алгоритмы в библиотеке MeTiS при построении декомпозиции учитывают два обстоятельства: равенство подграфов по суммарному весу и минимальность весов разрезанных ребер (ребро называется разрезанным, если вершины, которые оно соединяет, отнесены к разным подграфам). Сочетание этих двух критериев не гарантирует получение оптимальной и даже приемлемой декомпозиции. Кроме того, декомпозиция данных из-за разбиения геометрии задачи на несколько областей должна выполняться в два этапа (смотри пункт 2.4), при этом могут нарушаться и эти два условия.

Список критериев, используемый для методики ТИМ-2D с точки зрения получения высокой эффективности распараллеливания, следующий.

- Равенство подграфов по количеству вершин подграфа или, если граф взвешенный, то по суммарному весу вершин. Этот критерий отвечает за сбалансированность вычислительной нагрузки между процессами. Этот критерий контролируется в MeTiS.
- Процентное отношение разрезанных ребер в графе. Объем передаваемых между процессами данных определяется количеством разрезанных ребер. Уменьшение относительного количества разрезанных ребер позволяет сократить объем передаваемых данных и уменьшить простои процессов. Этот критерий также контролируется в MeTiS.
- Количество разрезанных ребер между парой подграфов – количество ребер соединяющих вершины каждого подграфа с вершинами других подграфов. Количество разрезанных ребер между парой подграфов отражает время, необходимое для пересылки информации от одного процесса другому. В этом критерии оценивается объем данных для пересылки между каждой парой процессов, рассчитывающих соседние параобласти. Желательно, чтобы эти объемы были приблизительно равны между собой. Однако основное назначение этого критерия – выявление «коротких» границ, которые являются не желательными для алгоритмов поддержания качества сетки.
- Количество соседних подграфов у каждого подграфа. При передаче информации между процессами существенную часть времени занимает установка соединения, которое может превышать само время передачи. Число соседних подграфов определяет количество необходимых соединений. Желательно, чтобы количество соседей у каждого

подграфа было примерно одинаковым. Критерий позволяет оценить, насколько одинаковым будет время, которое каждый процесс потратит на установку соединений.

- Критерий связности подграфов позволяет в некоторых случаях упростить вычислительные алгоритмы. Необходимо отметить, что в случае, если подграф распадается на достаточно крупные куски, то такая декомпозиция может считаться приемлемой. Плохой декомпозицией может считаться декомпозиция, в которой возникают, например, оторванные ячейки. Таким образом, для несвязного подграфа разбиение можно считать «удачным», если каждая его компонента имеет примерно одинаковый вес, одинаковое количество соседних подграфов и разрезанных ребер. Здесь и далее два подграфа называются соседними, если существует хотя бы одно ребро, соединяющее вершину одного подграфа с вершиной другого подграфа.
- У вершины количество разрезанных ребер больше, чем неразрезанных. Этот критерий позволяет выявить локальные ошибки алгоритмов декомпозиции, когда одна ячейка отнесена не к тому компакт. Исправление таких локальных ошибок в ряде случаев позволяет улучшить геометрическую форму границы между параобластями.
- Соотношение между суммарным весом вершин и разрезанных ребер подграфа. При распараллеливании вычислений необходимо стремиться к тому, чтобы время, затрачиваемое на обмен информацией, было меньше времени, затрачиваемого на счёт. Время на обмен информацией между процессами складывается из времени, необходимого на установку соединения между процессами, и времени, необходимого непосредственно на передачу информации. Поэтому суммарный вес разрезанных ребер подграфа, который характеризует необходимое время на передачу информации, должен быть намного меньше общего веса вершин подграфа, отражающего время счета соответствующим процессом. Этот критерий контролируется в библиотеке MeTiS, однако особая обработка ячеек вдоль границ может приводить к получению неудачной декомпозиции.

3.2. Критерии, накладываемые счетными алгоритмами

В методике ТИМ-2D метод дифференцируемых связей используется в качестве основного алгоритма поддержания счетной лагранжевой сетки на протяжении расчета без изменения структуры сетки. В настоящее время в методе дифференцируемых связей реализовано несколько способов поддержания приемлемых многоугольных счетных ячеек для возможности моделирования течений на неструктурированных сетках:

- сетки, содержащие «звездные» ячейки (ячейка называется звездной, если все ее узлы находятся в прямой видимости из ее центра);
- сетки с выпуклыми углами, образованными двумя ребрами ячейки с общим узлом (ячейки – выпуклые многоугольники);
- сетки с произвольными не самопересекающимися многоугольными ячейками (центр ячейки может находиться «вне» ячейки);
- сетки, обладающие какими-либо другими свойствами, наряду с вышеперечисленными: контроль длин ребер и величины углов ячейки, контроль «характерного размера» ячейки, несамопересечение контактных и «свободных» границ и ряд других.

Условия поддержания приемлемой формы счетных ячеек могут применяться в любой комбинации одновременно, в различных сочетаниях в разных частях задачи.

При реализации мелкозернистого распараллеливания для метода дифференцируемых связей возник ряд трудностей с обработкой особых точек (точек, которые окружают ячейки трех или более компактов). Поэтому желательно, чтобы таких особых точек было как можно меньше, кроме того, необходимо, чтобы они находились на достаточном удалении друг от друга. Эти условия нашли отражение в следующих критериях:

- Количество разрезанных ребер между парой подграфов. Этот критерий был введен в предыдущем пункте для отражения равенства объема передаваемых данных между парами процессов. Кроме этого, данный критерий позволяет выявлять «короткие» границы между компактами, что является дополнительной сложностью для алгоритмов коррекции счетной сетки.
- Непрерывность линии разделяющей пару подсеток, соответствующих соседним подграфам. Линию образует множество ребер и узлов сетки, которые относятся к ячейкам сетки, принадлежащим двум соседним подсеткам. На каждом разрыве линии возникает две дополнительных особых точки, которые повышают нагрузку на алгоритмы дифференцируемых связей.

3.3. Тестирование алгоритмов оценки качества декомпозиции

Ряд декомпозиций, на которых проводилось тестирование алгоритмов оценки качества, приведен на рисунке.

По результатам тестирования можно сделать вывод о том, что представленные критерии корректно обрабатывают декомпозиции различных типов, как хорошего, так и неудовлетворительного качества. В дальнейшем необходимо их тестирование в сочетании со счетными алгоритмами для выработки конкретных количественных характеристик для различных критериев.

Декомпозиции, полученные с помощью библиотеки MeTiS, можно охарактеризовать как хорошо сбалансированные по вычислительной нагрузке, общее количество разрезанных ребер мало по сравнению с общим количеством ребер в графе. Линия между парами подсеток, как правило, непрерывна. Подграфы получаются связными.

К недостаткам декомпозиции можно отнести то, что достаточно часто в декомпозициях возникают «короткие» границы между параобластями. Отклонение от среднего значения количества соседних подграфов достигает 50%. Необходимо отметить, что качество декомпозиции MeTiS резко снижается при определенных условиях, например, при небольшом количестве вершин в графе. В редких случаях декомпозиции могут оказаться с неодносвязными компактами.

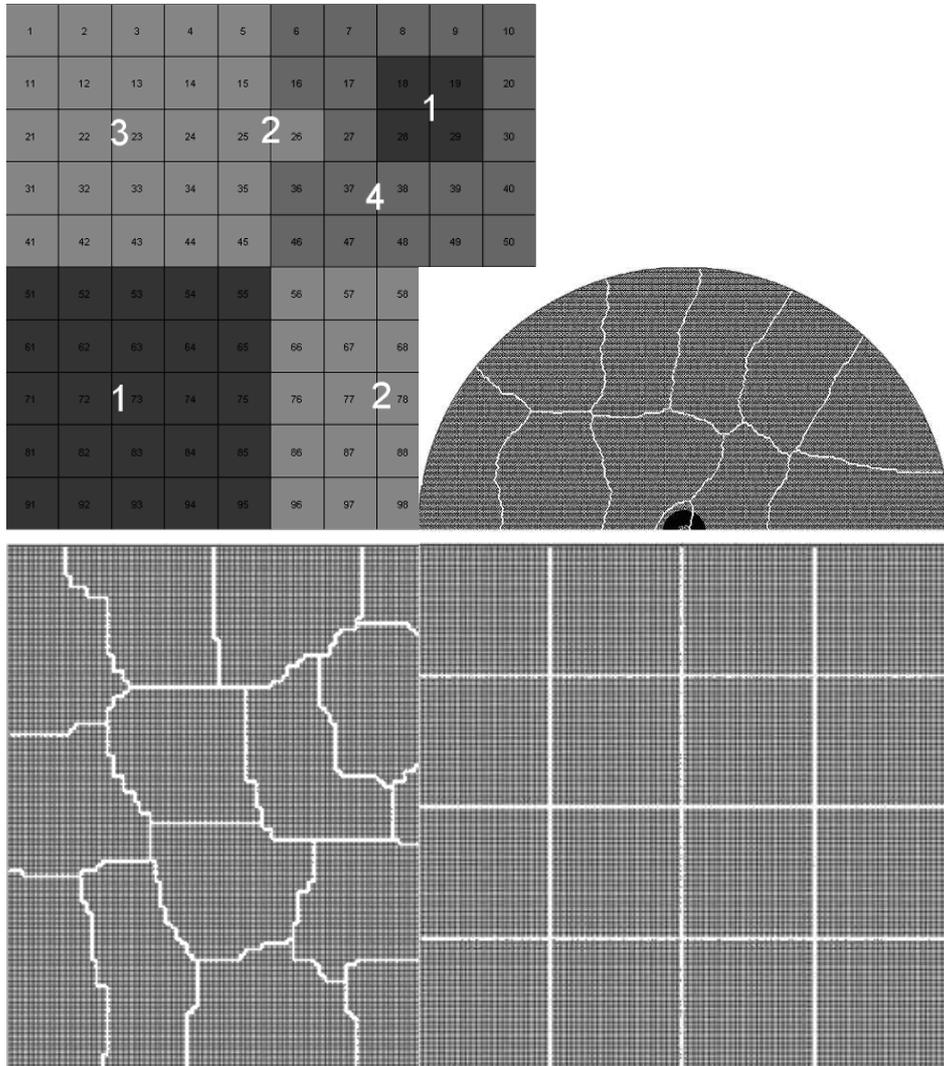
4. Заключение

В данной статье описываются алгоритмы декомпозиции, используемые для методики ТИМ-2D в различных режимах параллельного счета в смешанной модели памяти. Описаны алгоритмы, использующие двухпроходную декомпозицию.

Проведена оценка различных счетных алгоритмов, используемых в ТИМ-2D в части ограничений, накладываемых на декомпозицию данных. На основе этих требований сформулирован ряд критериев для оценки качества декомпозиции, который в дальнейшем может пополняться. Разработаны алгоритмы, реализующие эти критерии, которые протестированы на ряде тестовых декомпозиций. Проведено тестирование программы проверки критериев на графах, полученных по четырехугольным и многоугольным (преимущественно шестиугольным) сеткам, которые в настоящее время используются в качестве базовых в ТИМ-2D.

При этом использовались декомпозиции, заданные вручную и полученные при помощи пакета MeTiS.

В дальнейшем возможна разработка метода, учитывающего рассмотренные критерии непосредственно на этапе выполнения декомпозиции.



Примеры тестовых декомпозиции для оценки критериев качества

Статья рекомендована к печати программным комитетом международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии 2009» <http://agora.guru.ru/pavt>.

Литература

1. Методика ТИМ-2D для расчета задач механики сплошной среды на нерегулярных многоугольных сетках с произвольным количеством связей в узлах / С. С. Соколов, А. А. Воропинов, И. Г. Новиков, и др. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. –2006. – Вып. 4. – С. 29 – 43.

2. Воропинов, А. А. Распараллеливание в модели смешанной памяти для расчета задач газодинамики в методике «ТИМ-2D» / А. А. Воропинов, С. С. Соколов, И. Г. Новиков // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2008): тр. междунар. научной конф. (Санкт-Петербург, 28 января – 1 февраля 2008 г.). Челябинск, 2008. – С. 69 – 79.
3. Schloegel, K. Graph Partitioning for High Performance Scientific Simulations / K. Schloegel, G. Karypis, V. Kumar. – Army HPC Research Center Dept. of Computer Science and Engineering, University of Minnesota; Minneapolis, Minnesota, 1999.
4. Новиков, И. Г. Способ коррекции нерегулярной лагранжевой сетки методом наложения дифференцируемых связей / И. Г. Новиков, А. И. Панов, С. С. Соколов // Журн. вычисл. математики и мат. физики РАН. – 2005. – Т. 45, №8. С. 1487 – 1500.

ФГУП Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики, г. Саров
voropinov@pisem.net

Поступила в редакцию 13 марта 2009 г.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ЖИДКОМ ПОЛУПРОВОДНИКЕ

А. Ф. Гильмутдинова

NUMERAL COMPUTATION OF PROCESSES IN LIQUID SEMI-CONDUCTOR

A. F. Gilmutdinova

Целью статьи является численное исследование начально-краевой задачи для уравнения КПС, подтверждающий феномен неединственности данной задачи

Ключевые слова: уравнение соболевского типа, численное моделирование, фазовое пространство

The goal of the paper is the numerical study of an initial-boundary problem for the Korpusov – Pletner – Sveshnikov equation in which the phenomena of solutions nonuniqueness of this problem was show.

Keywords: Sobolev type equation, numeral computation, phase space

Введение

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ . В области $\Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим уравнение

$$(\lambda - \nabla^2)u_t = \alpha \nabla^2 u + \beta(\nabla, u \nabla u), \quad (0.1)$$

моделирующее метастабильные процессы в жидком двухкомпонентном полупроводнике. Параметры $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$ характеризуют свойства полупроводника, причем если знаки параметров α и β для нас безразличны, то о знаке λ следует сказать особо ввиду его важности для дальнейшего. Параметр $\lambda = \kappa/r^2$, где κ – коэффициент электрической поляризуемости, а r^2 – некоторая положительная постоянная, отвечающая за другие свойства полупроводника. Так вот, квазистационарные процессы в полупроводниках возможны только при условии отрицательности коэффициента κ . Причем именно в данном случае возможен пробой полупроводника, наблюдаемый экспериментально ([1], гл.2, п.1 и п.2).

Впервые уравнение (0.1) было получено в работе [2], поэтому в дальнейшем оно будет называться по имени авторов – *уравнением Корпусова – Плетнера – Свешникова (уравнением КПС)*. В этой же работе была установлена однозначная разрешимость уравнения (0.1) при краевых условиях Дирихле на границе $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ и начальном условии вида

$$(\lambda - \nabla^2)(u(x, 0) - u_0(x)) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (0.2)$$

но только в случае положительности параметра λ , что влечет обратимость дифференциального оператора при производной по времени в уравнении КПС.

Качественное исследование данной задачи облегчается тем обстоятельством, что она в подходящим образом подобранных банаховых пространствах \mathfrak{U} и \mathfrak{F} редуцируется к задаче Шоултера – Сидорова

$$L(u(0) - u_0) = 0, \quad (0.3)$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + N(u). \quad (0.4)$$

Основным методом исследования полулинейных уравнений соболевского типа служит метод фазового пространства, предложенный Г. А. Свиридюком и Т. Г. Сукачевой [3].

Нашей целью является численное исследование данной начально-краевой задачи.

1. Морфология фазового пространства

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$(\lambda - \nabla^2)(u(x, 0) - u_0(x)) = 0, \quad x \in (a, b), \quad (1.1)$$

$$u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

для уравнения Корпусова – Плетнера – Свешникова

$$\lambda u_t - u_{txx} = \alpha u_{xx} + \beta(uu_x)_x. \quad (1.3)$$

Чтобы редуцировать задачу (1.2), (1.3) к уравнению (0.4) возьмем пространства $\mathfrak{U} = \overset{\circ}{W}_2^1$, $\mathfrak{F} = W_2^{-1}$. Пространство \mathfrak{F} сопряжено к \mathfrak{U} относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ из L_2 . Операторы L и M определим формулами

$$\langle Lu, v \rangle = \int_a^b (\lambda uv + u_x v_x) dx, \quad \langle Mu, v \rangle = - \int_a^b \alpha u_x v_x dx,$$

где $u, v \in \mathfrak{U}$. По построению операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ и фредгольмовы.

Обозначим через $\{\lambda_k\}$ занумерованные по невозрастанию множество собственных значений однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ на (a, b) , а через $\{\varphi_k\}$ – ортонормированное в смысле L_2 множество соответствующих собственных функций. Определим оператор N формулой

$$\langle N(u), v \rangle = - \int_a^b \beta u u_x v_x dx, \quad u, v \in \mathfrak{U}.$$

Построим L - спектр оператора M

$$\sigma^L(M) = \left\{ \frac{\alpha \lambda_k}{\lambda - \lambda_k} : k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda = \lambda_l\} \right\}.$$

Проекторы имеют вид

$$P = \mathbb{I} - \langle \cdot, \varphi_l \rangle \varphi_l, \quad Q = \mathbb{I} - \langle \cdot, \varphi_l \rangle \varphi_l.$$

Построим множество

$$\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : \langle (Mu + N(u)), \varphi_l \rangle = 0, \lambda = \lambda_l\}$$

и пространства

$$\mathfrak{U}^0 = \ker L = \text{span}\{\varphi_l : \lambda = \lambda_l\}, \quad \mathfrak{U}^1 = \{u \in \mathfrak{U} : \langle u, \varphi_l \rangle = 0, \lambda = \lambda_l\}.$$

Возьмем произвольную точку $u \in \mathfrak{U}$, тогда $u = a\varphi_l + v$, где $v = Pu \in \mathfrak{U}^1$, $a \in \mathbb{R}$. Точка $u \in \mathfrak{M}$ точно тогда, когда выполнено

$$\frac{a^2}{2} \|\varphi_l\|_{L_3}^3 + a \left(\int_a^b v\varphi_l^2 dx + \frac{\alpha}{\beta} \right) + \frac{1}{2} \int_a^b v^2\varphi_l dx = 0. \quad (1.4)$$

Введем в рассмотрение функционал

$$\Delta(v) = \left(\int_a^b v\varphi_l^2 dx + \frac{\alpha}{\beta} \right)^2 - \|\varphi_l\|_{L_3}^3 \int_a^b v^2\varphi_l dx,$$

$\Delta : \mathfrak{U}^1 \rightarrow \mathbb{R}$, и построим множества

$$\mathfrak{U}_+^1 = \{v \in \mathfrak{U}^1 : \Delta(v) > 0\}, \quad \mathfrak{U}_-^1 = \{v \in \mathfrak{U}^1 : \Delta(v) < 0\}.$$

Возьмем точку $v \in \mathfrak{U}_+^1$, тогда уравнение (1.4) имеет два решения

$$\begin{aligned} a_- &= \|\varphi_l\|_{L_3}^{-3} \left(-\frac{\alpha}{\beta} - \int_a^b v\varphi_l^2 dx - \sqrt{\Delta(v)} \right), \\ a_+ &= \|\varphi_l\|_{L_3}^{-3} \left(-\frac{\alpha}{\beta} - \int_a^b v\varphi_l^2 dx + \sqrt{\Delta(v)} \right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Построим множества

$$\mathfrak{M}_{+(-)} = \{u \in \mathfrak{U} : u = a_{+(-)}(v)\varphi_l + v, v \in \mathfrak{U}_+^1\}.$$

С использованием подхода, изложенного в [4], доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и

(i) $\lambda \notin \{\lambda_k\}$. Тогда фазовым пространством уравнения (1.3) является все пространство \mathfrak{U} .

(ii) $\lambda \in \{\lambda_k\}$. Тогда фазовым пространством уравнения (1.3) является множество $\mathfrak{M}_+ \cup \mathfrak{M}_-$, каждая компонента которого \mathfrak{M}_+ и \mathfrak{M}_- биективно проектируется на множество \mathfrak{U}_+^1 .

Теорема 2. При любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и

(i) $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-\lambda_k\}$ существует точно одно решение задачи (1.1) – (1.3) при любых $u_0 \in \mathfrak{U}$.

(ii) $\lambda \in \{-\lambda_k\}$ существует два различных решения задачи (1.1) – (1.3) при любых $u_0 \in \mathfrak{U}$ таких, что $Pu_0 \in \mathfrak{U}_+^1$.

(iii) $\lambda \in \{-\lambda_k\}$ не существует ни одного решения задачи (1.1) – (1.3) при любых $u_0 \in \mathfrak{U}$ таких, что $Pu_0 \in \mathfrak{U}_-^1$.

2. Численные эксперименты

На основе теоретических результатов для подтверждения нетривиальности фазового пространства задачи Шоултера – Сидорова для уравнения Корпусова – Плетнера – Свешникова в системе компьютерной математики Maple 12.0. разработана программа, которая позволяет:

1. По заданным коэффициентам α, β, λ на основе метода Галеркина находить численное решение задачи Шоултера – Сидорова для уравнения Корпусова – Плетнера – Свешникова.

2. Получить графическое изображение этого приближенного решения, которое показывает нетривиальность фазового пространства.

Для реализации вычислительных алгоритмов программы использовались встроенные функции и стандартные операторы языка программирования Maple 12.0. Для получения графического изображения подключен пакет plots.

В полосе $(0, \pi) \times \mathbb{R}$ рассмотрим уравнение Корпусова – Плетнера – Свешникова

$$\lambda u_t - u_{txx} = \alpha u_{xx} + \beta(uu_x)_x. \quad (2.1)$$

и начально-краевую задачу

$$L(u(0) - u_0) = 0, \quad (2.2)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, t \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

для него. Решение начально-краевой задачи (2.1)-(2.3) будем искать в виде галеркинской суммы

$$u^m(t, x) = \sum_{k=1}^m u_k(t)\varphi_k, m > 1, \quad (2.4)$$

где $\{\varphi_k\}$ – ортонормированное в смысле L_2 множество собственных функций, соответствующие собственным значениям λ_k однородной задачи Дирихле для оператора $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ на $(0, \pi)$. Легко подсчитать, что $\varphi_k = \varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx)$, а $\lambda_k = -k^2$.

Пример 1. Требуется найти численное решение задачи (2.1)-(2.3) при заданных коэффициентах $\alpha = 20$, $\beta = 25$, $\lambda = -1$ и $m = 2$, а также получить графическое изображение этого решения.

Так как $m = 2$, то в силу (2.4)

$$u(t, x) = u_1(t)\sqrt{2/\pi} \sin x + u_2(t)\sqrt{2/\pi} \sin 2x.$$

$\lambda = -1$ (условия теоремы 2(ii), (iii) выполняются, ввиду того, что $\lambda \in \{-k^2\}$). Тогда, умножив скалярно (2.1) на функции φ_k , $k = 1, 2$, получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} 4\sqrt{2}u_2(t)^2 + 5\sqrt{2}u_1(t)^2 + 3\pi^{3/2}u_1(t) = 0, \\ 640\sqrt{2}u_1(t)u_2(t) + 240\pi^{3/2}u_2(t) + 9\dot{u}_2(t)\pi^{3/2} = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

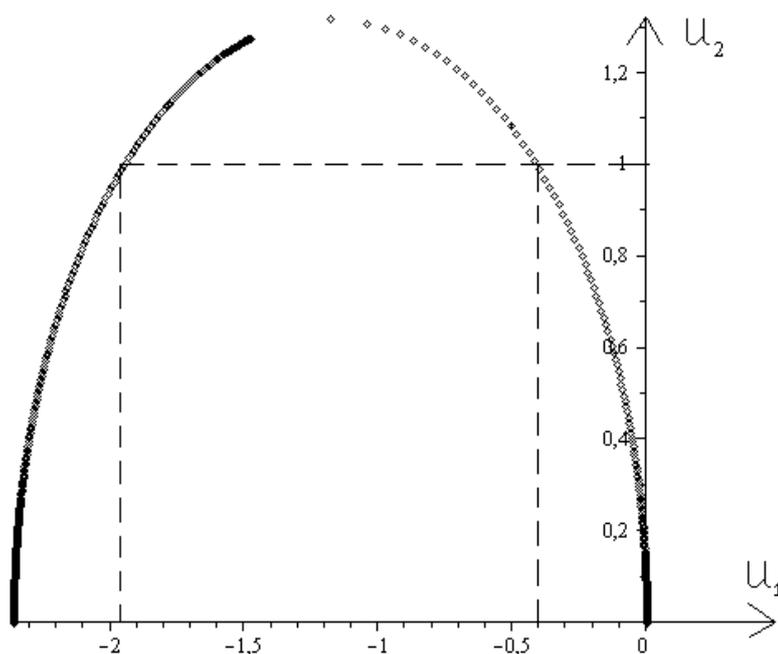
Система (2.5) имеет два стационарных решения

$$(u_1(t) = 0, u_2(t) = 0), (u_1(t) = -(3/10)\pi^{3/2}\sqrt{2}, u_2(t) = 0).$$

Начальное значение $u_0 = \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{pmatrix}$, тогда задача Шоултера-Сидорова (2.2) для системы уравнений (2.5) примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9\pi^{3/2} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{pmatrix} \right] = 0. \quad (2.6)$$

Задача (2.6) при $u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ для системы (2.5) имеет полученные ранее два стационарных решения. Рассмотрим другое начальное условие $u_2(1) = 1$, по которому найдем два условия на $u_1(1)$, а именно $u_{01+} = -0,4096752508$ и $u_{01-} = -1,952766240$, удовлетворяющие системе (2.5). Решим две задачи Коши для этой системы уравнений. Фазовое пространство системы (2.5) изображено на рисунке, результаты численного решения частично приведены в таблицах 1 и 2.



Фазовое пространство системы (2.5) при различных данных Коши, но одинаковых данных Шоултера – Сидорова

Таблица 1

Численное решение системы (2.5) с начальными условиями $u_1(1) = -0,4096752508, u_2(1) = 1$

$u_1(t)$	$u_2(t)$
-1,181138709	1,320644939
-1,109337027	1,318197361
-0,9937117979	1,303899373
-0,8956068680	1,281457650
-0,7994165490	1,249753675
-0,6900613485	1,201064305
-0,5973007684	1,147998555
-0,4999724286	1,078877746
-0,4098504961	1,000168979
-0,3999706595	0,9905369461
-0,2435745929	0,8031985309
-0,1890937409	0,7167343452
-0,1463869058	0,6367901668
-0,1130652586	0,5638333163
$-0,8716760788e^{-1}$	0,4979087082
$-0,6710381679e^{-1}$	0,4387852723
$-0,5159890077e^{-1}$	0,3860651178
$-0,1249740705e^{-2}$	$0,6073393299e^{-1}$
$-0,4301939681e^{-3}$	$0,3563921814e^{-1}$
$-0,1753736568e^{-4}$	$0,7196422470e^{-2}$
$-0,1218532584e^{-5}$	$0,1896953452e^{-2}$

Таблица 2

Численное решение системы (2.5) с начальными условиями
 $u_1(1) = -1,952766240, u_2(1) = 1$

$u_1(t)$	$u_2(t)$
-2,362441492	$0,1003192683e^{-5}$
-2,362441492	$0,1114077178e^{-4}$
-2,362441488	$0,1047761256e^{-3}$
-2,362440870	$0,1355589623e^{-2}$
-2,362365880	$0,1494251926e^{-1}$
-2,358932134	0,1017248684
-2,330150041	0,3066843586
-2,215918021	0,6370668308
-2,036836638	0,9104963298
-1,952766240	1
-1,859992974	1,080827648
-1,764551333	1,148372201
-1,674941381	1,199750621
-1,600135431	1,234804093
-1,545962615	1,256108068
-1,512212525	1,267737621
-1,493759364	1,273578653
-1,480192352	1,277643548
-1,476862571	1,278611729
-1,476526330	1,278708850

Литература

1. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 736 с.
2. Корпусов, М.О. О квазистационарных процессах в проводящих средах без дисперсии / М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, А. Г. Свешников // Журн. вычислит. мат. и мат. физики. – 2000. – Т. 4, № 8. – С. 1237 – 1249.
3. Свиридюк, Г. А. Фазовые пространства одного класса операторных полулинейных уравнений типа Соболева / Г. А. Свиридюк, Т. Г. Сукачева // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, № 2. – С. 250 – 258.
4. Свиридюк, Г. А. О складке фазового пространства одного неклассического уравнения / Г. А. Свиридюк, А. Ф. Карамова (А. Ф. Гильмутдинова) // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 10. – С. 1400 – 1405.

Уравнения математической физики,
 Южно-Уральский государственный университет
 algil@list.ru

Поступила в редакцию 2 сентября 2009 г.

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ СМЕНЫ УСТОЙЧИВОСТИ

Е. А. Деркунова

SINGULAR PERTURBED PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF FIRST ORDER IN A CASE OF STABILITY CHANGE

E. A. Derkunova

Формулируется и доказывается теорема о дифференциальных неравенствах для уравнений в частных производных первого порядка. Иллюстрируется ее применение к начальной задаче с внутренним переходным слоем.

Ключевые слова: сингулярные возмущения, асимптотический метод дифференциальных неравенств, смена устойчивости

The theorem on differential inequalities for partial differential equations of the first order is formulated and proved. Its application for initial problem with inner transition layer is illustrated.

Keywords: singular perturbations, asymptotic method of differential inequalities, stability change

Введение

После основополагающих работ академика А. Н. Тихонова [1] и последовавших за ними работ А. Б. Васильевой [2] ведется активное исследование сингулярно возмущенных задач асимптотическими методами. В частности, рассматриваются задачи, где нарушается условие изолированности корня вырожденного уравнения. Поясним это на примере начальной задачи в скалярном случае:

$$\varepsilon \frac{du}{dt} = F(u, t, \varepsilon), \quad 0 < t \leq T, \quad u(0) = u^0.$$

Пусть корни вырожденного уравнения

$$F(u, t, 0) = 0$$

неизолированы, например, корней два ($u = \varphi_1(t)$ и $u = \varphi_2(t)$), и графики их пересекаются во внутренней точке рассматриваемого отрезка $[0, T]$. Кроме того, пусть по прохождении точки пересечения корней они меняются ролями в отношении устойчивости (происходит смена знака производной F_u , взятой на каждом из корней, или, как говорят, происходит смена устойчивости). Возникает вопрос: как будет вести себя решение нашей задачи при $\varepsilon \rightarrow 0$? В работе [3], а затем в работе [4] для тихоновской системы доказана при определенных условиях теорема о предельном переходе при $\varepsilon \rightarrow 0$ от решения исходной задачи к решению

вырожденной задачи, которое строится с использованием устойчивого составного (вообще говоря, негладкого) корня вырожденного уравнения. Для доказательства существования решения и предельного перехода в работе [4] был применен метод дифференциальных неравенств. В последующие годы этот метод использовался для целого ряда других сингулярно возмущенных задач, в том числе задач со сменой устойчивости.

1. Метод дифференциальных неравенств для уравнений в частных производных первого порядка

Пусть рассматривается уравнение

$$\varepsilon^r \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(u, x, t, \varepsilon), \quad (x, t) \in D \quad (1.1)$$

с начальным условием

$$u(x, 0, \varepsilon) = u^0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1.2)$$

$\varepsilon > 0$, $r > 0$. Решение ищется в области

$$D = \{(x, t) : x_0(t) \leq x \leq x_1(t), 0 \leq t \leq T\}, \quad (1.3)$$

где $x = x_0(t)$ и $x = x_1(t)$ – характеристики, выходящие соответственно из точек $(0, 0)$ и $(1, 0)$ и определяемые уравнением $\frac{dx}{dt} = \Lambda(x, t)$ (считаем, что $\Lambda(x, t)$ – гладкая функция и все характеристики, выходящие из точек начального отрезка $\{t = 0, 0 \leq x \leq 1\}$ существуют при $0 \leq t \leq T$).

1.1. Лемма о дифференциальных неравенствах

Лемма. Пусть функции u и v непрерывны и имеют кусочно непрерывные частные производные, а функция $f(u, x, t, \varepsilon)$ непрерывно дифференцируема, и, кроме того,

- (1) $L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^r \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - f(u, x, t, \varepsilon) \leq 0, \quad (x, t) \in D;$
- (2) $L_\varepsilon v \geq 0, \quad (x, t) \in D;$
- (3) $u(x, 0) \leq v(x, 0), \quad 0 \leq x \leq 1.$

Тогда имеет место неравенство

$$u(x, t, \varepsilon) \leq v(x, t, \varepsilon) \quad (x, t) \in D. \quad (1.4)$$

Доказательство. В силу условий на функцию $f(u, x, t, \varepsilon)$ (непрерывной дифференцируемости) найдется постоянная $N > 0$, такая что

$$|f(u_1, x, t, \varepsilon) - f(u_2, x, t, \varepsilon)| \leq N|u_1 - u_2|$$

при $(x, t, \varepsilon) \in D \times (0; \varepsilon_0]$, $|u| \leq M$. Предположим, что

$$u(x, t, \varepsilon) > v(x, t, \varepsilon) \quad (1.5)$$

в некоторой точке $(x_0, t_0) \in D$. Рассмотрим характеристику $x = x(t)$, определяемую уравнением $\frac{dx}{dt} = \Lambda(x, t)$ и проходящую через точку (x_0, t_0) . На этой характеристике найдется точка (x_1, t_1) , $t_1 < t_0$, такая что имеет место равенство $u(x_1, t_1, \varepsilon) = v(x_1, t_1, \varepsilon)$, а в точках

(x, t) характеристики $x = x(t)$ между точками (x_1, t_1) и (x_0, t_0) выполняется неравенство $u(x, t, \varepsilon) > v(x, t, \varepsilon)$.

Выберем на рассматриваемой характеристике точку (x_2, t_2) , $t_2 > t_1$, для которой

$$\int_{t_1}^{t_2} N dt < \varepsilon^r.$$

Обозначим (x_3, t_3) точку, доставляющую максимум разности $u(x, t, \varepsilon) - v(x, t, \varepsilon) = z(x, t, \varepsilon) \geq 0$ при $t_1 \leq t \leq t_2$ и $x = x(t)$. Отметим, что $z(x_1, t_1, \varepsilon) = 0$. Получаем следующую цепочку неравенств (интеграл вычисляется вдоль характеристики $x = x(t)$):

$$\begin{aligned} \varepsilon^r z(x_3, t_3, \varepsilon) &= \int_{t_1}^{t_3} \varepsilon^r \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \Lambda(x, t) \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) dt \leq \\ &\leq \int_{t_1}^{t_3} \left(f(u, x(t), t, \varepsilon) - f(v, x(t), t, \varepsilon) \right) dt \leq \int_{t_1}^{t_3} N z(x(t), t, \varepsilon) dt \leq \\ &\leq z(x_3, t_3, \varepsilon) \int_{t_1}^{t_2} N dt < \varepsilon^r z(x_3, t_3, \varepsilon). \end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает ошибочность предположения (1.5), что приводит к утверждению (1.4).

1.2. Теорема о нижнем и верхнем решениях

Определение. Функции $\underline{U}(x, t, \varepsilon)$ и $\overline{U}(x, t, \varepsilon)$ называются *нижним* и *верхним* решениями задачи (1.1), (1.2), если выполнены неравенства

$$\begin{aligned} 1^0. L_\varepsilon \underline{U} &\equiv \varepsilon^r \left(\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \Lambda(x, t) \frac{\partial \underline{U}}{\partial x} \right) - f(\underline{U}, x, t, \varepsilon) \leq 0 \leq L_\varepsilon(\overline{U}), \\ & \hspace{15em} (x, t) \in D; \\ 2^0. \underline{U}(x, 0, \varepsilon) &\leq u^0(x) \leq \overline{U}(x, 0, \varepsilon), \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Нижнее и верхнее решения называются упорядоченными, если

$$\underline{U}(x, t, \varepsilon) \leq \overline{U}(x, t, \varepsilon), \quad (x, t) \in D.$$

Из Леммы следует, что нижнее и верхнее решения \underline{U} и \overline{U} начальной задачи (1.1), (1.2) являются упорядоченными.

Теорема 1. Если существуют нижнее и верхнее решения \underline{U} и \overline{U} задачи (1.1), (1.2), то эта задача имеет решение $u(x, t, \varepsilon)$, удовлетворяющее неравенствам

$$\underline{U}(x, t, \varepsilon) \leq u(x, t, \varepsilon) \leq \overline{U}(x, t, \varepsilon), \quad (x, t) \in D. \tag{1.6}$$

Доказательство. Из Определения следует, что для функции \overline{U} выполнено условие (1), а для функции \underline{U} – условие (2) Леммы. Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\varepsilon^r \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \begin{cases} f(\underline{U}, x, t, \varepsilon), & u < \underline{U}, \\ f(u, x, t, \varepsilon), & \underline{U} \leq u \leq \overline{U}, \\ f(\overline{U}, x, t, \varepsilon), & u > \overline{U} \end{cases} \tag{1.7}$$

с начальным условием (1.2), удовлетворяющем неравенствам 2⁰ Определения.

Уравнения (1.7) и (1.1) совпадают в области, где $\underline{U} \leq u \leq \bar{U}$. Правая часть вспомогательного уравнения ограничена, поэтому у задачи (1.7), (1.2) существует решение, и если будет доказано, что это решение не выйдет из полосы, задаваемой функциями \underline{U} и \bar{U} , то отсюда последует существование решения задачи (1.1), (1.2), удовлетворяющего неравенствам (1.6). Доказательство проведем от противного. Предположим, что

$$u(x, t, \varepsilon) > \bar{U}(x, t, \varepsilon) \quad (1.8)$$

в некоторой точке $(x_0, t_0) \in D$. Рассмотрим характеристику $x = x(t)$, определяемую уравнением $\frac{dx}{dt} = \Lambda(x, t)$ и проходящую через точку (x_0, t_0) . На этой характеристике найдется точка (x_1, t_1) , $t_1 < t_0$, такая, что имеет место равенство $u(x_1, t_1, \varepsilon) = \bar{U}(x_1, t_1, \varepsilon)$, а в точках (x, t) характеристики $x = x(t)$ между точками (x_1, t_1) и (x_0, t_0) выполняется неравенство $u(x, t, \varepsilon) > \bar{U}(x, t, \varepsilon)$. Поскольку из (1.7) имеем равенство

$$\varepsilon^r \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(\bar{U}, x, t, \varepsilon),$$

а из определения верхнего решения – неравенство

$$\varepsilon^r \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \Lambda(x, t) \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right) \geq f(\bar{U}, x, t, \varepsilon)$$

на характеристике $x = x(t)$ между точками (x_1, t_1) и (x_0, t_0) , то получаем (интеграл вычисляется вдоль характеристики):

$$\varepsilon^r (u - \bar{U})|_{(x_0, t_0, \varepsilon)} = \varepsilon^r \int_{t_1}^{t_0} \left(\frac{\partial(u - \bar{U})}{\partial t} + \Lambda(x, t) \frac{\partial(u - \bar{U})}{\partial x} \right) dt \leq 0,$$

но последнее противоречит (1.8) в области D . Следовательно, $u \leq \bar{U}$. Аналогично можно доказать, что $u \geq \underline{U}$ в области D . Таким образом, решение (1.7), (1.2) удовлетворяет неравенствам (1.6), что и доказывает теорему.

2. Начальная задача для уравнения с малым параметром при производных

2.1. Постановка задачи и условия

Рассмотрим следующую задачу ($\varepsilon > 0$ – малый параметр):

$$\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(u, x, t, \varepsilon), \quad (x, t) \in D, \quad (2.1)$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = u^0(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2.2)$$

Решение задачи (2.1), (2.2) ищется в области вида (1.3).

Хорошо известно [5, с.135 – 139], что если вырожденное уравнение

$$f(u, x, t, 0) = 0, \quad (2.3)$$

имеет корень $u = \varphi(x, t)$, который устойчив в области D , т.е. выполнено неравенство

$$f_u(\varphi(x, t), x, t, 0) < 0, \quad (x, t) \in D, \quad (2.4)$$

и если начальная функция $u^0(x)$ принадлежит области притяжения этого корня, то решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (2.1), (2.2) существует и удовлетворяет предельному равенству

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, t, \varepsilon) = \varphi(x, t), \quad x_0(t) \leq x \leq x_1(t), \quad 0 < t \leq T.$$

Более сложная ситуация возникает тогда, когда уравнение (2.3) имеет корни $u = \varphi_1(x, t)$ и $u = \varphi_2(x, t)$, пересекающиеся по некоторой кривой, проекция которой на плоскость (x, t) лежит в области D . В этом параграфе будет рассмотрен случай, когда проекция пересечения корней расположена выше начального отрезка $\{t = 0, 0 \leq x \leq 1\}$.

Пусть выполнены следующие условия.

Условие 1. Функция $f(u, x, t, \varepsilon)$ достаточно гладкая (дважды непрерывно дифференцируемая) в области $G = I_u \times D \times [0, \varepsilon_0]$, где I_u – некоторый интервал $\varepsilon_0 > 0$ – некоторое число.

Условие 2. Уравнение (2.3) в области $I_u \times D$ имеет относительно u два корня $u = \varphi_1(x, t)$, $u = \varphi_2(x, t)$, имеющие ту же гладкость, что и f , и удовлетворяющие соотношениям

$$\varphi_1(x, t) = \varphi_2(x, t) \quad \text{при} \quad t = \psi(x), \quad (2.5)$$

где $\psi(x)$ – гладкая функция, $0 < \psi(x) < T$. Для краткости будем обозначать кривую $t = \psi(x)$ буквой Γ . Образуются две подобласти области D : D_1 , ограниченная характеристиками $x = x_1(t)$ и $x = x_2(t)$, начальным отрезком $\{(x, t) : t = 0, 0 \leq x \leq 1\}$ и кривой Γ , а также подобласть $D_2 = D \setminus D_1$.

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, t) &> \varphi_2(x, t) \quad \text{при} \quad (x, t) \in D_1 \setminus \Gamma; \\ \varphi_1(x, t) &< \varphi_2(x, t) \quad \text{при} \quad (x, t) \in D_2 \setminus \Gamma. \end{aligned} \quad (2.6)$$

И пусть

$$\begin{aligned} f_u(\varphi_1(x, t), x, t, 0) &< 0, \\ f_u(\varphi_2(x, t), x, t, 0) &> 0 \quad \text{при} \quad (x, t) \in D_1 \setminus \Gamma, \\ f_u(\varphi_1(x, t), x, t, 0) &> 0, \\ f_u(\varphi_2(x, t), x, t, 0) &< 0 \quad \text{при} \quad (x, t) \in D_2 \setminus \Gamma. \end{aligned}$$

Условие 2 означает, что корни $u = \varphi_1(x, t)$ и $u = \varphi_2(x, t)$ уравнения (2.3) пересекаются по кривой, проекция которой Γ на плоскость (x, t) лежит в области D и описывается уравнением $t = \psi(x)$.

Не ограничивая общности, можно считать, что функция, для которой выполняются Условия 1, 2, представима в виде

$$f(u, x, t, \varepsilon) = -f_0(u, x, t) (u - \varphi_1(x, t)) (u - \varphi_2(x, t)) + \varepsilon f_1(u, x, t, \varepsilon), \quad (2.7)$$

где $f_0 > 0$, φ_1 , φ_2 , f_1 – достаточно гладкие, и φ_1 , φ_2 удовлетворяют (2.5), (2.6). С использованием корней φ_1 и φ_2 определим составные решения вырожденного уравнения (2.3):

$$\begin{aligned} \check{u}(x, t) &= \begin{cases} \varphi_1(x, t), & (x, t) \in D_1, \\ \varphi_2(x, t), & (x, t) \in D_2; \end{cases} \\ \hat{u}(x, t) &= \begin{cases} \varphi_2(x, t), & (x, t) \in D_1, \\ \varphi_1(x, t), & (x, t) \in D_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Отметим, что составные корни \check{u} и \hat{u} являются непрерывными, но, вообще говоря, негладкими на кривой Γ . Из Условия 2 следует, что

$$\check{u}(x, t) > \hat{u}(x, t), \quad (x, t) \in D \setminus \Gamma;$$

$$\check{u}(x, t) = \hat{u}(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma;$$

$$f_u(\check{u}(x, t), x, t, 0) < 0, \quad f_u(\hat{u}(x, t), x, t, 0) > 0, \quad (x, t) \in D \setminus \Gamma; \quad (2.8)$$

$$f_u(\check{u}(x, t), x, t, 0) = f_u(\hat{u}(x, t), x, t, 0) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma. \quad (2.9)$$

На основании неравенств (2.8) можно назвать корень $\check{u}(x, t)$ устойчивым, а корень $\hat{u}(x, t)$ неустойчивым (см. (2.4)). Следует, однако, заметить, что в точках кривой Γ неравенство $f_u(\check{u}(x, t), x, t, 0) < 0$ не выполнено (см. (2.9)), и это обстоятельство не позволяет однозначно ответить на вопрос о том, будет ли решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (2.1), (2.2) стремиться при $\varepsilon \rightarrow 0$ к составному корню $\check{u}(x, t)$ в области D (за исключением начального отрезка). Как оказывается, при Условиях 1, 2 и некоторых дополнительных условиях этот предельный переход будет иметь место.

Потребуем выполнения еще одного условия, которое обеспечивает принадлежность начальной функции $u^0(x)$ области притяжения составного устойчивого корня $\check{u}(x, t)$.

Условие 3. $u^0(x) > \hat{u}(x, 0)$ при $0 \leq x \leq 1$, $u^0(x) \in I_u$, где I_u – интервал из Условий 1, 2.

Для доказательства предельного перехода от решения задачи (2.1), (2.2) к устойчивому составному решению вырожденного уравнения (при $\varepsilon \rightarrow 0$) потребуются еще два условия:

Условие 4. $f_{uu}(\check{u}(x, t), x, t, 0)|_{(x,t) \in \Gamma} < 0$.

Заметим, что для функции (2.7) это условие выполнено, так как $f_{uu}(\check{u}, x, \psi(x), 0) = -2f_0(\check{u}(x, \psi(x)), x, \psi(x)) < 0$.

Условие 5.

$$\left(\frac{\partial \check{u}}{\partial t} + \Lambda(x, t) \frac{\partial \check{u}}{\partial x} \right) \Big|_{t=\psi(x) \pm 0} - f_\varepsilon(\check{u}(x, t), x, t, 0) \Big|_{t=\psi(x)} < 0.$$

Ниже будет показано, что справедливо следующее утверждение

Теорема 2. При выполнении Условий 1 – 5 решение задачи (2.1), (2.2) существует, и имеет место предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, t, \varepsilon) = \check{u}(x, t) \quad (2.10)$$

для всех $(x, t) \in D$ кроме начального отрезка $\{t = 0, 0 \leq x \leq 1\}$.

При этом разность $u(x, t, \varepsilon) - \check{u}(x, t)$ имеет порядок $O(\sqrt{\varepsilon})$ в малой окрестности кривой Γ и порядок $O(\varepsilon)$ в остальной части области D (за исключением малой окрестности начального отрезка).

2.2. Асимптотическое поведение решения

Рассмотрим задачу в области, ограниченной характеристиками $x = x_0(t)$ и $x = x_1(t)$, начальным отрезком и кривой $t = \psi(x) - \delta$, где $\delta > 0$ – сколь угодно малое, но фиксированное при $\varepsilon \rightarrow 0$ число. Здесь применима стандартная теория [5]: уравнение (2.1) с начальным условием (2.2) имеет единственное решение, и для него справедливо асимптотическое представление:

$$u(x, t, \varepsilon) = \check{u}(x, t) + \Pi_0(x, \tau) + O(\varepsilon), \quad (2.11)$$

где $\check{u}(x, t) = \varphi_1(x, t)$ – функция регулярной части асимптотики, $\Pi_0(x, \tau)$ – пограничная функция, $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$ – погранслоная переменная. Для функции $\Pi_0(x, \tau)$ имеем задачу:

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau} = f(\check{u}(x, 0) + \Pi_0(x, \tau), x, 0, 0), \quad \Pi_0(x, 0) = u^0(x) - \check{u}(x, 0).$$

В силу Условий 2, 3 функция Π_0 экспоненциально убывает при $\tau \rightarrow \infty$.

Замечание 1. Заметим, что пограничная функция определена в прямоугольнике $(0 \leq x \leq 1) \times (0 \leq t \leq T)$, который не совпадает, вообще говоря, с областью D . Чтобы определить ее во всей области D , поступим так. Продолжим гладким образом функции $f(u, x, 0, 0)$, $u^0(x)$ и $\check{u}(x, 0)$, входящие в задачу для пограничной функции, за границы отрезка $0 \leq x \leq 1$, и рассмотрим эту задачу при $X_0 \leq x \leq X_1$, $\tau \geq 0$, где $X_0 = \min_{0 \leq t \leq T} x_0(t)$, $X_1 = \max_{0 \leq t \leq T} x_1(t)$. Тогда пограничная функция будет определена во всей области D .

На кривой $t = \psi(x) - \delta$ из представления (2.11) имеем:

$$u(x, \psi(x) - \delta, \varepsilon) = \check{u}(x, \psi(x) - \delta) + O(\varepsilon), \quad (2.12)$$

так как пограничная функция экспоненциально мала.

Рассмотрим теперь задачу в области D_δ , ограниченную характеристиками $x = x_1(t)$, $x = x_2(t)$ и кривыми $t = \psi(x) - \delta$, $t = \psi(x) + \delta$.

Замечание 2. Кривые $t = \psi(x) - \delta$ и $t = \psi(x) + \delta$ определены при тех же x , что и кривая $t = \psi(x)$. Гладко продолжим их за область определения, чтобы их концы лежали на характеристиках $x = x_0(t)$ и $x = x_1(t)$.

Построим нижнее и верхнее решения в виде:

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \check{u}(x, t) - A\varepsilon \\ \overline{U} &= \check{u}(x, t) + A\sqrt{\varepsilon}, \end{aligned}$$

где число $A > 0$ будет выбрано ниже. Проверим выполнение условий 1^0 , 2^0 Определения применительно к области D_δ для указанных функций. Имеем:

$$\begin{aligned} L_\varepsilon \underline{U} &= \varepsilon \left(\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \Lambda(x, t) \frac{\partial \underline{U}}{\partial x} \right) - f(\underline{U}, x, t, \varepsilon) = \\ &= \varepsilon \left(\frac{\partial \check{u}}{\partial t} + \Lambda(x, t) \frac{\partial \check{u}}{\partial x} \right) - \check{f}(x, t) + \check{f}_u(x, t)A\varepsilon - \check{f}_\varepsilon(x, t)\varepsilon + o(\varepsilon) = \\ &= \varepsilon \left(\frac{\partial \check{u}}{\partial t} + \Lambda(x, t) \frac{\partial \check{u}}{\partial x} - \check{f}_\varepsilon(x, t) \right) - \check{f}(x, t) + \check{f}_u(x, t)A\varepsilon + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Здесь $\check{f}(x, t) = f(\check{u}(x, t), x, t, 0)$, и такой же смысл имеют обозначения $\check{f}_u(x, t)$, $\check{f}_\varepsilon(x, t)$. Так как $\check{f}(x, t) = 0$ и $\check{f}_u(x, t) \leq 0$, и так как неравенство из Условия 5 выполняется на кривой $t = \psi(x)$, а значит и в δ -окрестности нее, если только δ достаточно мало, то для достаточно малых ε

$$L_\varepsilon \underline{U} \leq 0, \quad (x, t) \in D_\delta.$$

$$\begin{aligned} L_\varepsilon \overline{U} &= \varepsilon \left(\frac{\partial \overline{U}}{\partial t} + \Lambda(x, t) \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} \right) - f(\overline{U}, x, t, \varepsilon) = \\ &= \varepsilon \left(\frac{\partial \check{u}}{\partial t} + \Lambda(x, t) \frac{\partial \check{u}}{\partial x} \right) - \check{f}(x, t) - \check{f}_u(x, t)A\sqrt{\varepsilon} - \check{f}_\varepsilon(x, t)\varepsilon - \frac{1}{2}\check{f}_{uu}(x, t)A^2\varepsilon + o(\varepsilon), \end{aligned}$$

Так как $\check{f} = 0$, $\check{f}_u \leq 0$ и выполняется Условие 4, то при достаточно большом A и достаточно малых ε слагаемое $-\frac{1}{2}\check{f}_{uu}(x, t)A^2\varepsilon$ будет доминирующим и обеспечит выполнение неравенства

$$L_\varepsilon \overline{U} \geq 0, \quad (x, t) \in D_\delta.$$

Таким образом, условие 1^0 Определения выполнено. Проверим выполнение условия 2^0 Определения, имея в виду, что в D_δ начальным множеством является кривая $t = \psi(x) - \delta$. При достаточно большом A и достаточно малых ε из (2.12) имеем:

$$\begin{aligned} (\underline{U} - u) \Big|_{t=\psi(x)-\delta} &= -A\varepsilon + O(\varepsilon) < 0 \\ (\overline{U} - u) \Big|_{t=\psi(x)-\delta} &= A\sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon) > 0. \end{aligned}$$

Тем самым условия Определения применительно к области D_δ выполнены. Уравнение (2.1) с начальным условием (2.12) имеет решение $u(x, t, \varepsilon)$ в области D_δ , и справедливо представление

$$u(x, t, \varepsilon) = \check{u}(x, t) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (x, t) \in D_\delta. \quad (2.13)$$

Рассмотрим область между характеристиками $x = x_0(t)$, $x = x_1(t)$, кривой $t = \psi(x) + \frac{\delta}{2}$ (см. Замечание 2) и линией $t = T$. В этой области снова работает стандартная теория. Корень $\check{u}(x, t) = \varphi_2(x, t)$ в силу (2.6) и (2.8) является изолированным и устойчивым. Как следует из (2.13), начальное условие для решения $u(x, t, \varepsilon)$ в этой области представимо так:

$$u\left(x, \psi(x) + \frac{\delta}{2}, \varepsilon\right) = \check{u}\left(x, \psi(x) + \frac{\delta}{2}\right) + O(\sqrt{\varepsilon}). \quad (2.14)$$

Пограничная функция, как это следует из (2.14), имеет порядок $O(\sqrt{\varepsilon})$, однако, уже в области выше кривой $t = \psi(x) + \delta$ в силу экспоненциального затухания Π_0 для решения $u(x, t, \varepsilon)$ справедлива асимптотика:

$$u(x, t, \varepsilon) = \check{u}(x, t) + O(\varepsilon).$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Если выполнены Условия 1 – 5, то при достаточно малых ε задача (2.1), (2.2) имеет единственное решение $u(x, t, \varepsilon)$, и для него справедливо асимптотическое представление*

$$u(x, t, \varepsilon) = \check{u}(x, t) + \Pi_0(x, t/\varepsilon) + w(x, t, \varepsilon),$$

где $w(x, t, \varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon})$ в δ -окрестности кривой $t = \psi(x)$, и $w(x, t, \varepsilon) = O(\varepsilon)$ в остальной части области D .

Из этого асимптотического представления решения задачи (2.1), (2.2) непосредственно следует предельное равенство (2.10).

Литература

1. Тихонов, А. Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра / А. Н. Тихонов // Математический сборник. – 1948.– Т. 22(64), № 2.– С. 193 – 204.
2. Васильева, А. Б. Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных / А. Б. Васильева // УМН. – 1963. – Т.18, № 3.– С. 15 – 86.
3. Lebovitz, N. R. Exchange of stabilities in autonomous system – II. Vertical bifurcation / N. R. Lebovitz, R. J. Schaar // Stud. Appl. Math.– 1977: V. 56. – P. 1 – 50.
4. Nefedov, N. N. Singularly perturbed systems: Case of exchange of stability / N. N. Nefedov, K. R. Schneider // Weierstraß - Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, Berlin.– Preprint № 158.
5. Васильева, А. Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. – М.: Высш. шк., 1990. – 208 с.

Кафедра функционального анализа,
Южно-Уральский государственный университет
derk@math.susu.ac.ru

Поступила в редакцию 4 сентября 2009 г.

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЛОЯ В КРУГЛОМ СТЕРЖНЕ

В. Л. Дильман, Т. В. Ерошкина

RESEARCH OF MATHEMATICAL MODELS OF THE STRESS CONDITION OF A NON-HOMOGENEOUS CROSS LAYER IN A ROUND ROD

V. L. Dil'man, T. V. Eroshkina

Строятся и исследуются аналитическими и численными методами математические модели напряженного состояния круглого сплошного стержня, содержащего поперечный менее прочный неоднородный слой, при нагружении стержня осевой силой при пластическом деформировании слоя. Подробно исследуется состояние контактного упрочнения такого слоя. На этой основе получены явные аналитические зависимости для вычисления критических напряженных состояний в слое и критической осевой нагрузки на стержень.

Ключевые слова: менее прочный слой, пластическое деформирование, контактное упрочнение, система уравнений в частных производных гиперболического типа

Mathematical models of the stress conditions of the round continuous rod, containing the transverse less strong inhomogeneous plastic layer are constructed and investigated with analytical and numerical methods, while loading the rod an axial thrust and by plastic forming of layer. The conditions of contact strengthening of such layers is investigated in details. On this basis obvious analytical dependences for definition of the critical stress conditions in a layer are critical axial load are gained.

Keywords: less strong layer, plastic forming, contact strengthening, system of equations in hyperbolic type partial derivatives

Введение

Обозначения и соглашения

В работе используются обычные, принятые в механике твердого тела, обозначения, а также:

λ – отношение толщины слоя к диаметру стержня;

индекс «БП» («МП») сверху указывает на отношение данной величины к более прочной (менее прочной) части соединения (для снижения громоздкости формул индекс «МП» в некоторых случаях не ставится).

В работе приняты следующие сокращения.

ММ – математическая модель (модели); НС – напряженное состояние; НДС – напряженно-деформированное состояние;

МП – менее прочный; БП – более прочный;

ГППС – гипотеза плоских поперечных сечений; ГРП – гипотеза разделения переменных.

Объект изучения, краткая историческая справка, подходы к исследованию

Механические свойства материалов, в частности, пластические, во многих случаях нельзя считать однородными [1]. При изучении прочностных свойств пластического слоя (например, при исследовании НС и несущей способности сварных соединений арматуры, в которых пластическим слоем может быть сварной шов или прослойка в ЗТВ) можно выделить три модельных случая распределения прочности по толщине слоя:

- 1) прочность постоянна;
- 2) прочность минимальна на среднем сечении слоя;
- 3) прочность максимальна на среднем сечении слоя.

Первый случай для сплошного круглого цилиндра исследован в работах [2 – 9 и др.].

Второй случай рассматривался только в задачах плоской деформации [10, 11, с. 56 – 59] на основе работ [12, 1]. В этих работах исследовалось напряженное состояние неоднородной по толщине тонкой МП полосы в составе неразъемного соединения при растяжении. ММ, на которой было основано решение [10, 11], использовало гипотезу Прандтля о постоянстве касательных напряжений по длине полосы. Такие решения не дают существенную систематическую ошибку только для очень тонких прослоек. Кроме того, в упомянутых работах при исследовании НС МП слоя не учитывались особенности НС в окрестности свободных поверхностей. НС в зоне *ACBF* (рис. 1) полностью определяется формой свободной поверхности *AC* в силу гиперболичности системы уравнений пластического равнове-

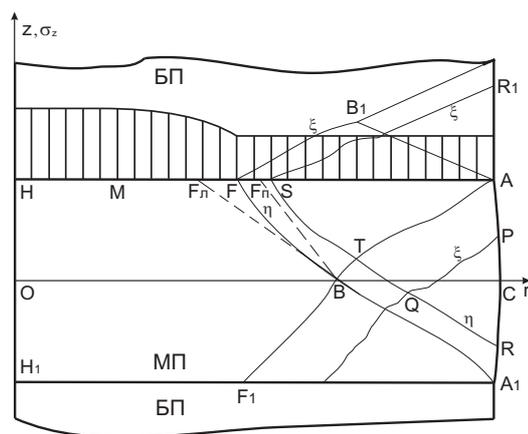


Рис. 1. Половина осевого сечения цилиндрического образца с МП поперечным слоем и фрагмент поля характеристик

сия (случай плоской деформации), и может быть исследовано методом характеристик. В части слоя *BFHO* для нахождения НС обычно используются предположения, частично предугадывающие внутреннее состояние тела (ГППС, ГРП для касательных напряжений и др.). На последнем шаге эти решения сопрягаются в некоторой точке (например, в точке *F* на рис. 1):

$$\tau_{rz}(r_F, z) = \tau_F; \quad \sigma_z(r_F, z) = \sigma_{zF}, \tag{1}$$

где $\tau_{rz}(r, z)$ и $\sigma_z(r, z)$ – зависимости касательных и нормальных напряжений, найденные в области *BFHO* на основе ГППС, τ_F и σ_{zF} – значения касательных и нормальных напряжений, найденные в точке *F* контактной границы (см. рис. 1) на основе анализа НС в зоне *ACBF* методом характеристик. Этот подход применялся в работах [5, 14] в задачах плоской деформации, во втором и третьем случаях, для неоднородного по толщине слоя.

НС неоднородного сплошного стержня, содержащего поперечный неоднородный МП слой, ранее не рассматривались.

Цель работы – получение приближенных формул для вычисления компонент тензора напряжений внутри и на контактной границе пластического слоя с распределением прочности второго и третьего типов.

В работе принимаются обычные допущения и упрощающие условия. Материал слоя предполагается идеальной пластической средой, прочность которого характеризуется единственным параметром – пределом текучести k : в МП слое

$$k^{\text{МП}} = k(z) = T(z)k_0,$$

причем

$$T(0) = 1, \quad T(\varkappa) = K_{\text{сл}}, \quad (2)$$

в БП части параметр пластичности $k^{\text{БП}}$ постоянен. Будем считать функцию $T(z)$ монотонной на отрезке $[0; \varkappa]$ (при возрастании T $K_{\text{сл}} > 1$, при убывании T $K_{\text{сл}} < 1$). Пусть

$$K = \frac{k^{\text{БП}}}{k(\varkappa)} = \frac{1}{k_{\text{сл}}} \frac{k^{\text{БП}}}{k_0}$$

– коэффициент механической неоднородности, характеризующий скачок прочности на контактной поверхности. В БП части размерные напряжения нормируем величиной $k^{\text{БП}}$, в МП слое – величиной k_0 .

Как известно [5], при выполнении ГППС система уравнений равновесия и условия пластичности в осесимметричных задачах имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau}{r} = 0; \quad (3)$$

$$\sigma_z - \sigma_r = \sqrt{3} \sqrt{T^2 - \tau^2}. \quad (4)$$

В БП части безразмерные напряжения удовлетворяют уравнениям (3) – (4) при $T \equiv 1$. Пусть

$$f(z, \tau) = \sqrt{3} \sqrt{T^2(z) - \tau^2}. \quad (5)$$

1. Исследование ММ НС неоднородного МП слоя

в окрестности свободной границы методом характеристик

1.1. Приближенное интегрирование системы уравнений пластического равновесия, записанной в инвариантах

Систему (3), (4) с учетом (5) можно записать форме:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial z} = -\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\tau}{r}. \quad (6)$$

Пусть $\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_r \\ \tau \end{pmatrix}$. Тогда систему (6) можно записать в векторной форме:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial r} + A \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial z} = B, \quad (7)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{\partial f}{\partial \tau} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\tau}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3} T T'}{\sqrt{T^2 - \tau^2}} - \frac{\tau}{r} \end{pmatrix},$$

в силу (5). Характеристическое для матрицы A уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 + \frac{\sqrt{3}\tau}{\sqrt{T^2 - \tau^2}}\lambda - 1 = 0. \quad (8)$$

Решения уравнения (8) – собственные числа матрицы A – имеют вид:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{4T^2 - \tau^2} - 2\sqrt{3}\tau}{2\sqrt{T^2 - \tau^2}}; \quad \lambda_2 = \frac{-\sqrt{4T^2 - \tau^2} - 2\sqrt{3}\tau}{2\sqrt{T^2 - \tau^2}}, \quad (9)$$

а собственные векторы – вид $\bar{l}_1(1; \lambda_1); \bar{l}_2(1; \lambda_2)$. По определению, уравнения

$$\frac{dz}{dr} = \lambda_i; \quad i = 1; 2,$$

являются уравнениями характеристик. В характеристической форме система (7) записывается так:

$$(1; \lambda) \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial r} + \lambda_i \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial z} \right) = (1; \lambda_i) B; \quad i = 1; 2. \quad (10)$$

Пусть ν_i – первообразная от λ_i по аргументу τ :

$$\frac{\partial \nu_i}{\partial \tau} = \lambda_i, \quad \nu_i|_{\tau=0} = T(z). \quad (11)$$

Систему уравнений (10) можно записать, используя «инварианты Римана»:

$$I_i = \sigma_r + \nu_i; \quad \frac{dI_i}{dz} = \frac{\partial \nu_i}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\tau}{r}, \quad i = 1; 2. \quad (12)$$

Дифференцирование в левой части ведется вдоль характеристики (т. е. функция I_i считается зависимой от одной переменной z ; переменная r исключена через уравнение характеристики). Будем использовать для аппроксимации выражений (9) полученные их интерполяцией в узлах 0, 0,3 и 0,6 (для τ/T) полиномами второй степени выражения:

$$\lambda_1 = 1 - 0,812 \frac{\tau}{T} + 0,833 \left(\frac{\tau}{T} \right)^2; \quad (13)$$

$$\lambda_2 = -1 - 0,657 \frac{\tau}{T} - 1,244 \left(\frac{\tau}{T} \right)^2. \quad (14)$$

Из (13), (14) и (11) следует, что

$$\begin{aligned} \nu_1 &= T \left(1 + \frac{\tau}{T} - 0,406 \left(\frac{\tau}{T} \right)^2 + 0,028 \left(\frac{\tau}{T} \right)^3 \right), \\ \nu_2 &= T \left(1 - \frac{\tau}{T} - 0,328 \left(\frac{\tau}{T} \right)^2 + 0,415 \left(\frac{\tau}{T} \right)^3 \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu_1}{\partial z} &= \left(1 + 0,406 \left(\frac{\tau}{T} \right)^2 - 0,056 \left(\frac{\tau}{T} \right)^3 \right) T', \\ \frac{\partial \nu_2}{\partial z} &= \left(1 + 0,328 \left(\frac{\tau}{T} \right)^2 + 0,830 \left(\frac{\tau}{T} \right)^3 \right) T'. \end{aligned} \quad (16)$$

Применяя интерполяцию четным полиномом четвертой степени с узлами в точках 0; 0,3; 0,6, получим

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \sqrt{3} \left(1 + 0,450 \left(\frac{\tau}{T} \right)^2 + 0,679 \left(\frac{\tau}{T} \right)^4 \right) T'. \quad (17)$$

Рассмотрим входящее в правую часть (13) при $i = 2$ выражение $\frac{\partial \nu_2}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}$. Используя (16) и (17), получим:

$$\frac{\partial \nu_2}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} = -(\sqrt{3} - 1)(1 + \mu_2(t))T', \quad (18)$$

где

$$\mu_2(t) = 0,616t^2 - 1,134t^3 + 1,606t^4, \quad t = \tau/T.$$

При $t \in [0; 0,706]$ $\mu_2(t) < 0,616t^2$. На η -характеристике, в силу формулы (18),

$$\int_{z_0}^z \left(\frac{\partial \nu_2}{\partial z} \right) dz = -(\sqrt{3} - 1) \left(T(z) - T(z_0) + \int_{T(z_0)}^{T(z)} \mu_2 dT \right). \quad (19)$$

Оценим последний интеграл в (19). Используя оценку для μ , получим

$$\left| \int_{T(z_0)}^{T(z)} \mu_2 dt \right| < 0,616 \int_{T(z_0)}^{T(z)} \left| \frac{\tau^2}{T^2} \right| |dT| < 0,616\alpha^2 \left| \frac{T(z) - T(z_0)}{T(z)T(z_0)} \right|.$$

Здесь α – наибольшее значение касательных напряжений в МП слое. Следовательно, интеграл в правой части (19) составляет от $T(z) - T(z_0)$ часть, не превышающую $0,616\alpha^2/T(z)T(z_0)$. Поэтому, если касательные напряжения невелики, равенство (18) можно заменить на приближенное

$$\frac{\partial \nu_2}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} = -(\sqrt{3} - 1)T', \quad (20)$$

допуская после интегрирования этого уравнения относительную ошибку примерно $\alpha^2/2T(z)T(z_0)$.

Интегрируя уравнение (12) по η -характеристике RS (см. рис. 1) с использованием равенства (20), получим приближенно, что функция

$$I_{2U} = \sigma_{rU} + (\nu_2)_U + \int_R^U \frac{\tau}{r} dz + (\sqrt{3} - 1)T_U - (\nu_2)_R - (\sqrt{3} - 1)T_R \quad (21)$$

постоянна для всех точек U характеристики RS , т. к. $\sigma_{rR} = 0$. В силу (11) или (15) $(\nu_2)_R = T_R$. Тогда из (21) получается, что на η -характеристике RS

$$\sigma_{rU} + (\nu_2)_U + \int_R^U \frac{\tau}{r} dz + (\sqrt{3} - 1)T_U - \sqrt{3}T_R = 0. \quad (22)$$

Вычисляя интеграл в (22) по частям, запишем равенство (22) в виде:

$$\sigma_{rU} + (\nu_2)_U - \Delta_U \tau_U (\lambda_2)_U + (\sqrt{3} - 1)T_U = \sqrt{3}T_R. \quad (23)$$

Здесь $\Delta_U = \ln(r_{Ucp}/r_U)$, где $r_{Ucp} \in (r_U; r_T)$ при $U \in TS$ и определяется равенством:

$$\ln r_{Ucp} = \frac{\int_{TU} \ln rd(\lambda_2\tau)}{\int_{TU} d(\lambda_2\tau)} = \frac{\int_{TU} \ln rd(\lambda_2\tau)}{(\lambda_2)_U \tau_U}.$$

Геометрические соображения и сравнение с экспериментальными данными работ [2, и др.] позволяют предположить, что $r_{Ucp} = r + q(1 - r)$, где $q = 0, 10...0, 15$. В работе используется значение $q = 0, 10$.

1.2. Вычисление напряжений на контактной границе в критический момент нагружения

В критический момент нагружения основной металл вовлечен в пластическое деформирование. Формула (23) позволяет найти зависимость в этот момент между σ_r и τ на контактной границе. Запишем формулу (23) в развернутой форме. Для упрощения дальнейших вычислений представим интерполяцией в узлах 0; 0,3 и 0,6 величины ν_1 и ν_2 , $\tau\lambda_1$ и $\tau\lambda_2$ как полиномы второй степени от τ . Получим

$$\nu_1 \approx T + 0,993\tau - 0,377\frac{\tau^2}{T}; \quad \nu_2 \approx T - 0,925\tau - 0,7\frac{\tau^2}{T}; \quad (24)$$

$$\tau\lambda_1 \approx 0,985\tau - 0,738\frac{\tau^2}{T}; \quad \tau\lambda_2 \approx -0,776\tau - 1,777\frac{\tau^2}{T}. \quad (25)$$

Подставим в (23) вместо ν_2 и $\tau\lambda_2$ их выражения по формулам (24) и (25). Получим приближенно

$$\begin{aligned} \sigma_{rU} &= -(\nu_2)_U + \Delta_U \tau_U (\lambda_2)_U - \sqrt{3}(T_U - T_R) + T_U = \\ &= 0,925\tau_U + 0,7\frac{\tau_U^2}{T_U} - \Delta_U(0,776\tau_U + 1,777\frac{\tau_U^2}{T_U}) - \sqrt{3}(T_U - T_R); \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zU} &= \sigma_{rU} + \sqrt{3}\sqrt{T_U^2 - \tau_U^2} = \sigma_{rU} + \sqrt{3}T_U + 0,04\tau_U - 1,036\frac{\tau_U^2}{T_U} = \\ &= (0,929 - 0,776\Delta_U)\tau_U - (0,336 + 1,777\Delta_U)\frac{\tau_U^2}{T_U} + \sqrt{3}T_R. \end{aligned} \quad (27)$$

Аналогично, в БП части, интегралы уравнения (12) вдоль ξ -характеристик можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{rU}^{\text{БП}} &= -(\nu_1)_U + \Delta_U \tau_U^{\text{БП}} (\lambda_1)_U - \sqrt{3}(T_U - T_R) + T_U = 0,993\tau_U^{\text{БП}} + \\ &+ 0,377\frac{(\tau_U^{\text{БП}})^2}{T_U} - \Delta_U(0,985\tau_U^{\text{БП}} - 0,738\frac{(\tau_U^{\text{БП}})^2}{T_U}) - \sqrt{3}(T_U - T_{R1}); \end{aligned} \quad (28)$$

$$\sigma_{zU}^{\text{БП}} = \sqrt{3}T_{R1} - (0,953 - 0,985\Delta_U)\tau_U^{\text{БП}} - (0,659 + 0,738\Delta_U)\frac{(\tau_U^{\text{БП}})^2}{T_U}. \quad (29)$$

В уравнениях (26) и (27) точка R свободной границы лежит на одной η -характеристике с точкой U (см. рис. 1). В уравнениях (28) и (29) точка R_1 свободной границы лежит на одной ξ -характеристике с точкой U . В частности, если точка U лежит на контактной поверхности, $T_U = K_{\text{сл}}$. В этом случае формула (27) приобретает вид:

$$\sigma_{zF} = (0,929 - 0,985\Delta_F)\tau_F - (0,336 + 1,777\Delta_F)\frac{\tau_F^2}{K_{\text{сл}}} + \sqrt{3}K_{\text{сл}}. \quad (30)$$

БП часть стержня предполагается однородной, поэтому в формуле (29) $T_{R1} = T_U = 1$, т. е. для точки F эта формула приобретает вид:

$$\sigma_{zF}^{\text{БП}} = \sqrt{3} - (0,953 - 0,985\Delta_F)\tau_F^{\text{БП}} - (0,659 + 0,738\Delta_F)(\tau_U^{\text{БП}})^2. \quad (31)$$

Для вычисления касательных и нормальных напряжений в критическом состоянии обратимся к уравнениям равновесия на контактной границе, которые в безразмерных напряжениях имеют вид:

$$\sigma_z = \sigma_z^{\text{БП}} K K_{\text{сл}}, \quad \tau = \tau^{\text{БП}} K K_{\text{сл}}. \quad (32)$$

Подставив в первое уравнение (32) вместо σ_z и $\sigma_z^{\text{БП}}$ их выражения в точке F (30) и (31), и исключая из полученного уравнения неизвестную $\tau_F^{\text{БП}}$ с помощью второго уравнения (32), получим уравнение для вычисления значений касательных напряжений в точке F :

$$a \left(\frac{\tau}{K_{\text{сл}}} \right)^2 - b \frac{\tau}{K_{\text{сл}}} + c = 0, \quad (33)$$

где a и b вычисляются по формулам:

$$a = 0,336 - \frac{0,659}{K} + \left(1,777 - \frac{0,738}{K} \right) \Delta, \quad b = (1,882 - 1,761\Delta); \quad c = \sqrt{3}(K - 1).$$

Интерполяция точного (громоздкого в записи) решения уравнения (33) полиномом второй степени по r и K с узлами в точках $(0,5; 1,2)$, $(0,7; 1,2)$, $(1; 1,2)$, $(0,5; 1,4)$, $(0,7; 1,4)$, $(1; 1,4)$ приводит, с относительной ошибкой порядка 0,01, к выражению

$$\begin{aligned} \tau_F = K_{\text{сл}} & \left((1,195 - 0,532r_F + 0,243(r_F)^2)(K - 1) + \right. \\ & \left. + (0,244 - 0,543r_F + 0,275(r_F)^2)(K - 1)^2 \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Подставляя найденное для τ выражение (34) в (30), можно получить (очень громоздкую) формулу для вычисления значения σ_{zF} в зависимости от K , $K_{\text{сл}}$, и r_F . Интерполяция полиномом второй степени относительно r и K дает приближенное выражение для вычисления σ_{zF} в виде:

$$\sigma_{zF} = \sqrt{3}K_{\text{сл}}(1 + a(r_F)(K - 1) + b(r_F)(K - 1)^2), \quad (35)$$

где

$$a(r) = 0,5 - 0,023r + 0,008r^2; \quad b(r) = -0,579 + 0,788r - 0,375r^2. \quad (36)$$

Аналогично находится зависимость $\sigma_z(r, \varkappa)$ в любой точке $S \in [F; A]$:

$$\sigma_{zS} = \sqrt{3}T(z_R)(1 + a(r_S)(K - 1) + b(r_S)(K - 1)^2). \quad (37)$$

Здесь точка R лежит на свободной границе, причем точки R и S принадлежат общей η -характеристике (рис. 1). В частности, если $R = A_1$, то $T(z_R) = T(\varkappa) = K_{\text{сл}}$, и формула (37) обращается в формулу (35).

Полагая приближенно $AS/AF = AR/AA_1$, получаем

$$AR = \frac{1 - r_S}{1 - r_F} 2\varkappa, \quad z_R = \varkappa - AR = \varkappa - \frac{1 - r_S}{1 - r_F} 2\varkappa = \frac{\varkappa(2r_S - r_F - 1)}{1 - r_F}.$$

Подставив это выражение в формулу (37), получим зависимость $\sigma_z(r, \varkappa)$ в любой точке отрезка $[F; A]$:

$$\sigma_z(r, \varkappa) = \sqrt{3}T \left(\frac{\varkappa(2r - r_F - 1)}{1 - r_F} \right) (1 + a(r)(K - 1) + b(r)(K - 1)^2), \quad (38)$$

где функции $a(r)$ и $b(r)$ определены равенствами (36). Зависимость σ_z от r на участке контактной границы $[F; A]$, когда $\varkappa = 0,25$ (тогда $r_F = 0,53$), $K = 1,3$, $K_{\text{сл}} = 0,8$ (случай «а»), $K_{\text{сл}} = 1,2$ (случай «б»), показана на рис. 2. В качестве функции неоднородности на этом рисунке использовалась предложенная ниже функция (52), коэффициенты в записи которой определены формулами (54) и (55) при указанных выше значениях параметров.

Вычислим координату точки F . Положив приближенно

$$r_F = 1 - 2\varkappa \left(1 - 0,2 \frac{\tau_F}{K_{\text{сл}}} \right), \quad (39)$$

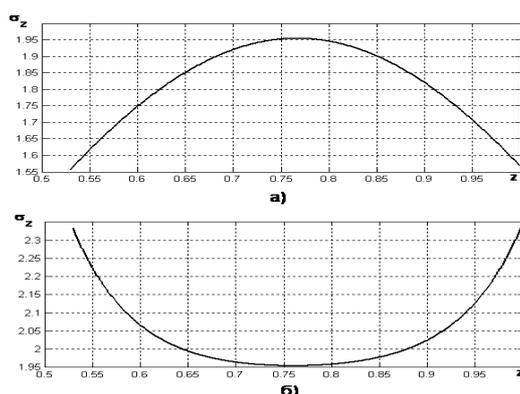


Рис. 2. Зависимость σ_z от r на участке контактной границы $[F; A]$, когда $\varkappa = 0,25$, $K = 1,3$, а) $K_{\text{сл}} = 0,8$, б) $K_{\text{сл}} = 1,2$

решим систему уравнений (34), (39). Исключая из этой системы неизвестную τ_F , получим квадратное уравнение относительно r_F . Из решения этого уравнения и (39) следует, что

$$\begin{aligned} \tau_F &= K_{\text{сл}}(K - 1)(0,8 + 0,707\varkappa) + 0,013 - 0,043\varkappa, \\ r_F &= 1 - 1,995\varkappa - 0,017\varkappa^2 + (0,32\varkappa + 0,283\varkappa^2)(K - 1). \end{aligned} \quad (40)$$

Подставляя найденное для r_F выражение в формулу (35), получим значение σ_z в точке F как функцию от параметров $K_{\text{сл}}$, \varkappa и K . Интерполяция точной зависимости полиномом второй степени по \varkappa и K с узлами в точках, соответствующих значениям $\varkappa = 0,05; 0,15; 0,25$ и $K = 1,1; 1,3; 1,5$, приводит, с точностью до 0,002, к выражению:

$$\begin{aligned} \sigma_{zF} &= K_{\text{сл}}(1 + (0,487 - 0,008\varkappa - 0,035\varkappa^2)(K - 1) - \\ &\quad - (0,169 + 0,049\varkappa + 1,066\varkappa^2)(K - 1)^2). \end{aligned} \quad (41)$$

Заметим, что для слоя с переменной по толщине прочностью аналитические выражения для вычисления r_F , $\sigma_{zF}/K_{\text{сл}}$ и $\tau_{zF}/K_{\text{сл}}$ совпадают с соответствующими выражениями для слоя постоянной прочности, у которого $K_{\text{сл}} = 1$.

2. Исследование ММ НС МП слоя с переменной по толщине прочностью в окрестности оси стержня при ГРП

Будем использовать приближенный вариант уравнения (4):

$$\sigma_z - \sigma_r = \sqrt{3}(\Gamma - \tau^2/(2\Gamma)). \quad (42)$$

Исключая из системы (3), (42) нормальные напряжения, можно получить уравнение

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2(\tau^2/\Gamma(z))}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial r^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tau}{r} \right) = 0. \quad (43)$$

Уравнение (43) определяет касательные напряжения. Будем предполагать выполнение ГРП для касательных напряжений:

$$\tau = R(r)Z(z) \quad (44)$$

Подставив в (43) условие (44), получим:

$$\sqrt{3}R' \frac{(Z^2/\Gamma)'}{Z} + \frac{Z''}{Z} - \frac{R''}{R} - \frac{(R/r)'}{R} = 0. \quad (45)$$

Для исследования уравнения (45) сформулируем следующую лемму ([5, с. 80]).

Лемма 1. *Функциональное уравнение*

$$\varphi(r)\psi(z) + \varphi_1(r) + \psi_1(z) = 0$$

относительно неизвестных функций φ , ψ , φ_1 и ψ_1 разрешимо тогда и только тогда, когда либо $\varphi(r) = \varphi$ и $\varphi_1(r) = \varphi_1$ – постоянные, а функции $\psi(z)$ и $\psi_1(z)$ связаны линейным соотношением $\varphi\psi(z) + \varphi_1 + \psi_1(z) = 0$, либо $\psi(z)$ и $\psi_1(z)$ – постоянные, а $\varphi(r)$ и $\varphi_1(r)$ связаны соответствующим соотношением.

Используя лемму 1, легко доказать следующее утверждение.

Лемма 2. *Уравнение (45) при условиях*

$$R(0) = 0; \quad Z(0) = 0 \tag{46}$$

не имеет решений, за исключением следующих частных вариантов.

1. *Функция R линейна.*
2. *Если функция неоднородности $T(z)$ имеет вид $T(z) = \cos^2(\mu z/2)$ для некоторой постоянной μ , то функция $Z(z)$ точно до постоянного множителя имеет вид $Z(z) = \sin(\mu z)$.*
3. *Если функция неоднородности $T(z)$ имеет вид $T(z) = \operatorname{ch}^2(\mu z/2)$ для некоторой постоянной μ , то функция $Z(z)$ точно до постоянного множителя имеет вид $Z(z) = \operatorname{sh}(\mu z)$.*

Доказательство. Положив $\varphi(r) = -R''/R - (R/r)'/R$; $\varphi_1(r) = \sqrt{3}R'$; $\psi(z) = Z''/Z$; $\psi_1(z) = (Z^2/T)'/Z$ и, применив лемму 1, получим два случая: либо $\varphi(r)$ и $\varphi_1(r)$ постоянны, либо $\psi(z)$ и $\psi_1(z)$ постоянны. В первом случае функция R линейна. Во втором случае

$$Z''/Z = \text{const} \quad \text{и} \quad (Z^2/T)'/Z = \text{const}. \tag{47}$$

Из первого равенства (47), с учетом условия (46), следует, что $Z = \sin(\mu z)$ или $Z = (\operatorname{sh} \mu z)$. Подставляя эти выражения во второе равенство (47), получим, с использованием (46), что $T = \cos^2(\mu z/2)$ или, соответственно, $T = \operatorname{ch}^2(\mu z/2)$.

Рассмотрим случай, когда τ линейно по r , т. е.

$$\tau = rZ(z). \tag{48}$$

Тогда в уравнении (45) разделяются переменные, откуда $\sqrt{3}(Z^2)/T + Z' = C$, где C – некоторая константа, или

$$T = \frac{\sqrt{3}Z^2}{C - Z'}, \tag{49}$$

причем

$$Z(0) = 0. \tag{50}$$

Решение задачи (49), (50) можно находить «обратным» методом, подбирая функцию Z из указанных условий, а затем находя по ней функцию неоднородности прослойки $T = T(z)$ из (49). Выбирая функцию Z в форме выражения, удовлетворяющего условию (50) и содержащего не менее трех независимых параметров, можно удовлетворить условиям (2) и

первому из условий (1). По смыслу задачи функция Z нечетна. Рассмотрим аппроксимацию функции Z полиномом пятой степени:

$$Z = Az + Bz^3 + Dz^5.$$

Тогда, в соответствии с (48),

$$\tau = r(Az + Bz^3 + Dz^5). \quad (51)$$

Так как $Z'(0) = A$, то $C = A$ (см. (49)). В силу (49) и (50) имеем:

$$T(z) = \frac{-\sqrt{3}(A + Bz^2 + Dz^4)^2}{3B + 5Dz^2}. \quad (52)$$

Для определения параметров A , B и D запишем систему из трех уравнений, исходя из условий (2) и (1):

$$\begin{cases} -\sqrt{3}B = A^2; \\ -\sqrt{3}(A + B\kappa^2 + D\kappa^4)^2 = K_{\text{сл}}(3B + 5D\kappa^2); \\ A\kappa + B\kappa^3 + D\kappa^5 = \tau_F/r_F. \end{cases} \quad (53)$$

Исключив из (53) B и D , получим квадратное уравнение относительно параметра A :

$$\frac{2\kappa^2}{5\sqrt{3}}A^2 - A + \frac{\tau_F}{\kappa r_F} + \frac{\sqrt{3}\tau_F^2}{5K_{\text{сл}}r_F^2} = 0.$$

Решение этого уравнения можно представить в виде (надо взять меньший корень):

$$A = \frac{2 \left(\frac{\tau_F}{\kappa r_F} + \frac{\sqrt{3}\tau_F^2}{5K_{\text{сл}}r_F^2} \right)}{1 + \sqrt{1 - \frac{8\kappa^2}{5\sqrt{3}} \left(\frac{\tau_F}{\kappa r_F} + \frac{\sqrt{3}\tau_F^2}{5K_{\text{сл}}r_F^2} \right)}}. \quad (54)$$

Коэффициенты B и D можно вычислить по формулам

$$B = -\frac{A^2}{\sqrt{3}}, \quad D = -\frac{\sqrt{3}\tau_F^2}{5\kappa^4 K_{\text{сл}}r_F^2} - \frac{3B}{5\kappa^2}. \quad (55)$$

Например, при $\kappa = 0, 3$, $K = 1, 3$, $r_F = 0, 530$, $\tau_F/K_{\text{сл}} = 0, 425$. Если $K_{\text{сл}} = 1, 2$, то $A = 3, 584$, $B = -7, 414$, $D = 23, 534$. Если $K_{\text{сл}} = 0, 8$, то $A = 1, 516$, $B = -1, 327$, $D = -1, 383$. На рис. 3 построены графики функции неоднородности слоя $T(z)$ при этих значениях параметров. Подставив выражение для τ (51) в уравнения (3), получим после интегрирования:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{r^2}{2}(A + 3Bz^2 + 5Dz^4) + \varphi(z), \\ \sigma_z &= -\left(Az^2 + \frac{Bz^4}{2} + \frac{Dz^6}{3} \right) + \psi(r). \end{aligned} \quad (56)$$

Так как, очевидно, $\sigma_r(0; 0) = \varphi(0)$, $\sigma_z(0; 0) = \psi(0)$ и выполняется (2), то из (4) следует, что $\psi(0) - \varphi(0) = \sqrt{3}$. Обозначим $\varphi(0) = G$, тогда $\psi(0) = G + \sqrt{3}$. Полагая в уравнении (4) поочередно $r = 0$ и $z = 0$, получим:

$$\varphi(z) = -Az^2 - \frac{Bz^4}{2} - \frac{Dz^6}{3} + \frac{3(A + Bz^2 + Dz^4)^2}{3B + 5Dz^2} + G;$$

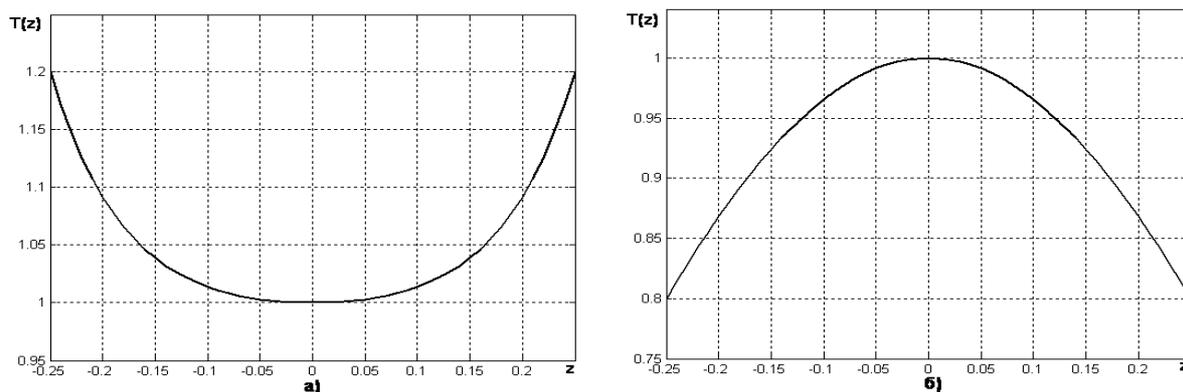


Рис. 3. Графики функции неоднородности слоя $T(z)$, когда $\varkappa = 0, 30$, $K = 1, 3$, а) $K_{\text{сл}} = 1, 2$, б) $K_{\text{сл}} = 0, 8$

$$\psi(r) = -\frac{Ar^2}{2} + G + \sqrt{3}. \quad (57)$$

Подставляя (57) в (56), получим:

$$\sigma_z = -\left(Az^2 + \frac{Bz^4}{2} + \frac{Dz^6}{3}\right) - \frac{Ar^2}{2} + G + \sqrt{3}. \quad (58)$$

Для вычисления постоянной G рассмотрим два случая.

Первый случай. Пусть для всех $r \in [0; r_F]$ $\sigma_z < \sqrt{3}KK_{\text{сл}}$. Тогда для вычисления постоянной G в формуле (58) надо положить $\sigma_z = \sigma_{zF}$, $r = r_F$, $z = \varkappa$. Получим

$$G + \sqrt{3} = \sigma_{zF} + Ar_F^2/2 + A\varkappa^2 + B\varkappa^4/2 + D\varkappa^6/3,$$

а решение системы (3), (4) в зоне $ОНВФ$ (рис. 1) можно записать в виде:

$$\begin{cases} \tau = r(Az + Bz^3 + Dz^5); \\ \sigma_z = A(\varkappa^2 - z^2) + B(\varkappa^4 - z^4)/2 + D(\varkappa^6 - z^6)/3 + A(r_F^2 - r^2)/2 + \sigma_{zF}; \\ \sigma_r = -r^2(A + 3Bz^2 + 5Dz^4)/2 + A(\varkappa^2 - z^2) + B(\varkappa^4 - z^4)/2 + \\ + D(\varkappa^6 - z^6)/3 + \frac{3(A + Bz^2 + Dz^4)^2}{3B + 5Dz^2} + \sigma_{zF}, \end{cases} \quad (59)$$

причем постоянные A , B и D вычисляются по формулам (54) и (55). Тогда при $z = \varkappa$, используя формулу (38), получим

$$\sigma_z(r, \varkappa) = \begin{cases} A(r_F^2 - r^2)/2 + \sigma_{zF}, & 0 \leq r \leq r_F; \\ \sqrt{3}\Gamma \left(\frac{\varkappa(2r - r_F - 1)}{1 - r_F} \right) (1 + a(r)(K - 1) + b(r)(K - 1)^2), & r_F \leq r \leq 1, \end{cases} \quad (60)$$

где функции $a(r)$ и $b(r)$ определены равенствами (36), постоянные r_F и σ_{zF} — формулами (40) и (40).

Второй случай. Пусть σ_z при $z = \varkappa$ в некоторой точке $M \in [HF]$ достигает своего наибольшего значения, ограниченного прочностью основного металла стержня, и равного числу $\sqrt{3}KK_{\text{сл}}$. В первом случае на контактной поверхности на участке HF

$$\sigma_z(r, \varkappa) = -Ar^2/2 + C,$$

где C – некоторая константа. Во втором случае таким должно быть НС на отрезке MF , т. е. на этом отрезке

$$\sigma_z(r, \varkappa) = -A(r - r_M)^2/2 + C. \quad (61)$$

При этом

$$\sigma_z(r_M, \varkappa) = \sqrt{3}KK_{\text{сл}}, \quad \sigma_z(r_F, \varkappa) = \sigma_F.$$

Отсюда

$$C = \sqrt{3}KK_{\text{сл}}, \quad \sqrt{3}KK_{\text{сл}} - \sigma_F = A(r_F - r_M)^2/2.$$

Находя из последнего выражения r_M , получим $r_M = r_F - \sqrt{2(\sqrt{3}KK_{\text{сл}} - \sigma_F)/A}$. Подставим это выражение в (61). Тогда

$$\sigma_z(r, \varkappa) = \begin{cases} \sqrt{3}KK_{\text{сл}}, & 0 \leq r \leq r_M; \\ -A(r - r_F + \sqrt{2(\sqrt{3}KK_{\text{сл}} - \sigma_F)/A})^2/2 + \sqrt{3}KK_{\text{сл}}, & r_M \leq r \leq r_F; \\ \sqrt{3}T \left(\frac{\varkappa(2r - r_F - 1)}{1 - r_F} \right) (1 + a(r)(K - 1) + b(r)(K - 1)^2), & r_F \leq r \leq 1. \end{cases} \quad (62)$$

Аналитические выражения (60) и (62) можно непосредственно использовать для вычисления осевой критической растягивающей нагрузки, при которой соединение теряет свою несущую способность.

Литература

1. Ольшак, В. Теория пластичности неоднородных тел / В. Ольшак. – М.: Мир, 1964. – 232 с.
2. Satoh, K. Joint strength of heavy plastics with lower strength weld metal / K. Satoh, M. Toyoda // Welding J. – Sept. – 1975. – №9. – P. 311 – 319.
3. Шахматов, М. В. О некоторых особенностях метода линий скольжения при решении осесимметричных задач теории пластичности / М. В. Шахматов, В. В. Ерофеев, А. А. Остсемин // Проблемы прочности. – 1985. – №3. – С. 88 – 94.
4. Шахматов, М. В. Влияние геометрических параметров механически неоднородных сварных соединений арматуры железобетона на их предельную несущую способность / М. В. Шахматов, Л. И. Хмарова, О. А. Бакши // Свароч. пр-во. – 1986. – №6. – С. 28 – 30.
5. Дильман, В. Л. Математические модели напряженного состояния неоднородных тонкостенных цилиндрических оболочек / В. Л. Дильман. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – 202 с.
6. Дильман, В. Л. Об одной модели, описывающей напряженное состояние в круглом стержне / В. Л. Дильман, Т. В. Ерошкина // Обзорение приклад. и пром. математики. – 2004. – Т. 11, вып. 2. – С. 793 – 794.
7. Дильман, В. Л. Математические модели осесимметричного напряженного состояния при гипотезе разделения переменных для касательных напряжений / В. Л. Дильман, Т. В. Ерошкина // Изв. Челяб. науч. центра. – 2006. – Вып. 2(32). – С. 1 – 4.
8. Дильман, В. Л. Прочность механически неоднородных сварных соединений стержней арматуры / В. Л. Дильман, А. А. Остсемин, Т. В. Ерошкина // Вестник машиностроения. – 2008. – №9. – С. 13 – 17.
9. Ерошкина, Т. В. Напряженное состояние поперечной мягкой прослойки в растягиваемом круглом стержне при гипотезе параболических сечений / Т. В. Ерошкина // Обзорение прикл. и пром. математики. – 2007. – Т. 14, вып. 1. – С. 109 – 110.

10. Шахматов, М. В. Напряженное состояние и прочность сварных соединений с переменными механическими свойствами металла мягкого участка / М. В. Шахматов, В. В. Ерофеев // Свароч. пр-во. – 1982. – №3. – С. 6 – 7.
11. Когут, Н. С. Несущая способность сварных соединений / Н. С. Когут, М. В. Шахматов, В. В. Ерофеев. – Львов.: Свит, 1991. – 184 с.
12. Кузнецов, А. И. Задача о неоднородном пластическом слое / А. И. Кузнецов // *Archiwum mechaniki stosowanej*. – 1960. – Т. 12, №2. – С. 163 – 172.
13. Дильман, В. Л. Напряженное состояние пластического слоя с переменной прочностью по толщине / В. Л. Дильман, А. А. Остсемин // *Изв.РАН. Механика твердого тела*. – 2000. – № 1. – С. 141 – 148.
14. Дильман, В. Л. Исследование системы уравнений напряженного состояния неоднородного пластического слоя / В. Л. Дильман // *Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения: междунар. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения акад. Ильи Нестеровича Векуа (Новосибирск, 28 мая – 2 июня 2007 г.): тез. докл.* – Новосибирск, 2007. – С. 136 – 137.

Кафедра общей математики,
Южно-Уральский государственный университет
dilman49@mail.ru

Поступила в редакцию 7 сентября 2009 г.

РАЗРАБОТКА ВИРТУАЛЬНОГО ИСПЫТАТЕЛЬНОГО ГРИД-СТЕНДА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭФФЕКТА ОВАЛИЗАЦИИ ТРУБ ПРИ ТЕРМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ

В. А. Дорохов

DEVELOPMENT OF VIRTUAL GRID TEST DESK FOR RESEARCH OF PIPES OVALIZATION EFFECT AT THERMAL PROCESSING

V. A. Dorokhov

Исследуется применимость технологии CAEBeans для создания виртуального испытательного грид-стенда на базе пакета DEFORM для исследования эффекта овализации труб при термической обработке.

Ключевые слова: CAE, CAEBeans, DEFORM, испытательный стенд, грид-стенд, овализация труб

Research of applicability of CAEBeans technology for virtual grid test desk development is described. The virtual grid test desk on the basis of DEFORM for research of pipes ovalization effect at thermal processing has been developed.

Keywords: CAE, CAEBeans, DEFORM, test desk, grid, pipes ovalizations effect

Введение

Одним из наиболее перспективных методов решения научно-технических задач на производстве является применение программных систем класса CAE (Computer Aided Engineering), позволяющих эффективно осуществлять суперкомпьютерное моделирование сложных технологических процессов [1]. Такой подход позволяет значительно повысить точность анализа производственных задач и проводить виртуальные эксперименты, которые в реальности выполнить затруднительно.

Для реализации данного подхода в решении производственных задач в настоящей работе используется технология CAEBeans [2]. В основе технологии CAEBeans лежит обеспечение сервис-ориентированного предоставления программно-аппаратных ресурсов и формирование иерархий проблемно-ориентированных оболочек. Технология CAEBeans регламентирует процесс декомпозиции задачи в иерархию подзадач; сопоставление задачам соответствующих базовых компонент CAE-систем; мониторинг хода решения задач; передача результатов решения задач пользователю.

В работе исследуется применимость технологии CAEBeans для создания виртуального испытательного стенда для задачи овализации труб при их закалке и последующем отпуске на Челябинском трубопрокатном заводе [3]. Процесс изготовления цельнокатаных труб на пильгерстане является технологически сложным и недетерминированным по такому параметру, как разнотолщинность стенок изготавливаемой трубы. После изготовления труба поступает в цех термической обработки, где производится ее закалка и отпуск на индукционной установке. При разогреве трубы и последующем охлаждении в ряде случаев возникает

эффект оваллизации концов трубы. Трубы с подобным дефектом технически невозможно сваривать в трубопровод. Челябинский трубопрокатный завод использует прессовые установки, для устранения брака продукции. Однако подобный способ решения проблемы брака является устаревшим и экономически нецелесообразным, так как приводит к большим финансовым потерям.

Качество готовой продукции Челябинского трубопрокатного завода можно улучшить, изменив некоторые параметры индукционных установок, но производить испытания в условиях непрерывного производства не представляется возможным. В соответствии с этим актуальной является задача создания виртуального испытательного грид-стенда как средства проведения вычислительных экспериментов с целью поиска оптимального решения по изменению существующей технологии производства труб.

1. Исследование задачи оваллизации труб

В основе виртуального испытательного стенда для исследования эффекта оваллизации труб при термической обработке лежит компьютерная модель процесса термической обработки труб.

Перед созданием компьютерной модели процесса термической обработки были произведены тепловизионные исследования процесса закалки труб непосредственно на производстве. Был произведен сбор информации о геометрии заготовок и температурных полях, величине разностенности с разверткой по длине и окружности заготовки, величине начальной овалности с разверткой по длине и кривизне оси заготовки. Далее вся полученная информация была проанализирована – дана расчетная оценка уровней значимости различных факторов с целью корректного формирования модели.

Для создания компьютерной модели процесса термической обработки труб на индукционных установках был выбран инженерный пакет DEFORM [4]. В рамках поставленной задачи пакет DEFORM имеет ряд преимуществ, так как предназначен для анализа процессов обработки металлов давлением, термической и механической обработки. Кроме того, в пакете DEFORM есть модуль Microstructure 3D, который предназначен для моделирования трехмерных процессов термической обработки и позволяет моделировать микроструктурные превращения в заготовке при ее деформировании.

В ходе решения данной задачи для исследования процесса оваллизации труб посредством пакета Deform были созданы компьютерные модели следующих технологических процессов:

- процесса нагрева труб под закалку;
- процесса закалки труб в охлаждающем спреере;
- процесса нагрева труб под отпуск;
- процесса охлаждения труб после отпуска.

При создании компьютерной модели были учтены следующие требования:

- учет факторов разнотолщинности стенки и овалности диаметра трубы на входе в индукционную установку;
- учет фазовых переходов вещества трубы, происходящих в процессе термообработки.

Фактор фазовых переходов вещества трубы является критически важным в процессе оваллизации, поэтому для его корректного учета в модель были заложены следующие уравнения переходов. Для фазовых переходов перлит-аустенит:

$$\xi = 1 - e^{A \left(\frac{T - T_s}{T_e - T_s} \right)^D}.$$

Для фазовых переходов аустенит-мартенсит:

$$\xi = 1 - e^{(\psi_1^T - \psi_2(C - C_0) + \psi_{31}\sigma_M + \psi_{32}\bar{\sigma} + \psi_4)}.$$

Для фазовых переходов аустенит-перлит:

$$\xi = 1 - e^{(-bt^n)}.$$

В модели предусмотрена возможность изменения следующих технических параметров индукционной установки: количество индукторов, частота и сила тока, длина индукторов, количество и конфигурация водяных струй, давление и расход воды, скорость движения трубы через индукционную установку, частота вращения труб. Предусмотрена возможность моделирования термообработки труб из различных марок сталей (путем указания физических характеристик материала).

2. Архитектура виртуального испытательного грид-стенда

Виртуальный испытательный грид-стенд реализован по технологии CAEBeans [2] в виде программного комплекса, состоящего из проблемного CAEBean (определяет интерфейс пользователя), потокового CAEBean (управляет процессами моделирования и сохранения результатов), и системного CAEBean (производит запуск программных компонент пакета DEFORM).

Интерфейс пользователя виртуального испытательного стенда определяется проблемным CAEBean, который представляет собой набор xml файлов с перечнем и описанием всех возможных параметров моделируемого технологического процесса. Данные xml файлы загружаются и обрабатываются системой CAEBeans Portal, с которой работает конечный пользователь (инженер). На основе загруженных xml файлов CAEBeans Portal формирует интерфейс соответствующего виртуального испытательного стенда.

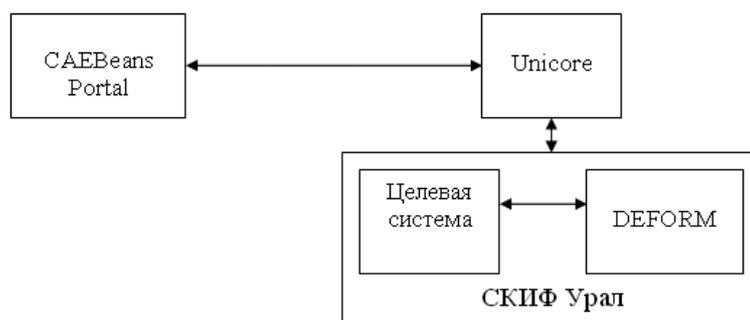


Рис. 1. Схема работы виртуального испытательного стенда

CAEBeans Portal реализован в рамках настоящего проекта и является интернет-приложением для доступа к виртуальным испытательным стендам. Работа с CAEBeans Portal осуществляется через интернет-браузер. Для обеспечения конфиденциальности данных пользователя в CAEBeans Portal реализован механизм авторизации и шифрования передаваемых данных. При успешной авторизации CAEBeans Portal отображает пользователю список доступных для него виртуальных испытательных стендов и список запущенных им вычислительных экспериментов.

При запуске нового вычислительного эксперимента CAEBeans Portal производит соединение с грид-системой Unicores [5] и отправляет команду на запуск соответствующей целевой системы Unicores. После запуска задачи CAEBeans Portal осуществляет синхронизацию данных о статусе хода решения задачи и отображает эти данные пользователю в интерактивном режиме.

Все результаты вычислительного эксперимента сохраняются в специальном хранилище CAEBeans Server. Для работы с результатами вычислений CAEBeans Portal предоставляет пользователю возможность просмотра директории соответствующего эксперимента.

3. Методы организации программного взаимодействия с DEFORM

Пакет DEFORM предоставляет возможность производить постановку задачи, ее решение и обработку результатов без запуска графического интерфейса путем использования пакетного режима препроцессора, решателя и постпроцессора [6]. Пакетный режим препроцессора позволяет производить весь цикл постановки задачи, а так же создавать задачу, загружая текстовый *.key файл с ее описанием и в дальнейшем менять требуемые параметры.

Решатель позволяет произвести запуск решения задачи в пакетном режиме, указав имя базы данных задачи.

Постпроцессор в пакетном режиме позволяет сохранять изображения модели на разных шагах расчета, с выбором требуемых данных для отображения: температура, фазовый состав, деформации и т.д. Все параметры запуска постпроцессора хранятся xml файле.

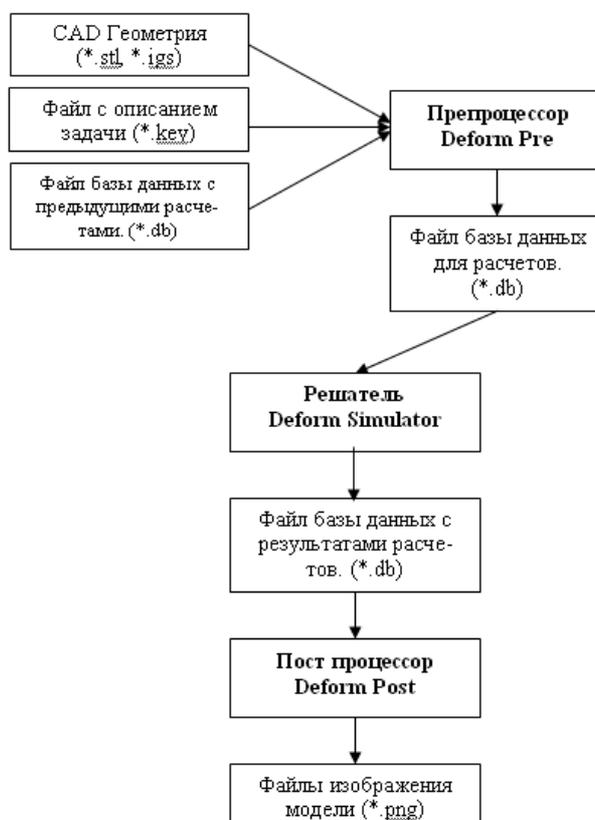


Рис. 2. Схема взаимодействия с пакетом DEFORM

Пакет DEFORM не имеет собственных средств для построения геометрии, при этом импорт геометрии в пакетном режиме происходит некорректно, а построение сетки в пакетном режиме не реализовано. Исходя из этого, в пакете DEFORM были сгенерированы задачи для нескольких вариантов геометрии труб, изготавливаемых на Челябинском трубопрокатном заводе и для каждой задачи сформирован *.key файл с описанием модели. В виду незавершенности разработки пакетного режима препроцессора DEFORM выбран следующий вариант взаимодействия: программное редактирование *.key файла с описанием задачи, и передача его в пакет DEFORM для решения задачи.

Для запуска пакета DEFORM в параллельном режиме генерируется специальный *.dat файл в котором перечисляются сетевые адреса узлов, на которых может производиться расчет и количество процессоров каждого узла, которые можно задействовать для расчетов. Взаимодействие с пакетом DEFORM инкапсулировано в системном CAEBean.

Моделирование всего процесса термической обработки труб разбито на несколько этапов. Ввиду большой размерности задачи, моделирование процесса нагрева труб под закалку, закалки труб в охлаждающем спрейере, нагрева труб под отпуск и охлаждения труб после отпуска производится отдельно и последовательно друг за другом.

Результаты каждого предыдущего этапа загружаются в пакетном режиме в препроцессор DEFORM, с помощью которого данные последнего шага моделирования сохраняются в отдельный *.key файл. Данный *.key файл редактируется таким образом, чтобы получить описание для следующего этапа процесса решения задачи. Далее на основе полученного *.key файла формируется файл базы данных пакета DEFORM, и запускается процесс моделирования следующего этапа. Цикл повторяется до тех пор, пока не будет выполнено моделирование последнего этапа.

По окончании моделирования последнего этапа задачи из файла базы данных пакета DEFORM сохраняются все необходимые результаты: данные о распределении температур в трубе (рис. 3), данные о фазовом составе вещества трубы, данные о деформациях трубы, графики смещения выбранной точки трубы (рис. 4) и др.

Все результаты сохраняются в виде изображений формата PNG и передаются в хранилище CAEBeans, в директорию соответствующей задачи, откуда они становятся доступными пользователю.

4. Реализация

CAEBeans Portal был установлен на головной узел суперкомпьютера Infinity, на этом же узле было установлено хранилище CAEBeans Server и в него загружен CAE проект. В CAEBeans Portal был загружен проблемный CAEBean созданного виртуального испытательно-го стенда. На CAEBeans Portal была создана тестовая учетная запись и для нее предоставлены права на виртуальный испытательный стенд.

На головном узле суперкомпьютера СКИФ Урал была установлена и настроена грид-система Unicore. В Unicore была создана целевая система, реализующая системный CAEBean виртуального испытательного стенда. На вычислительных узлах суперкомпьютера СКИФ Урал был установлен пакет DEFORM. Доступ к CAEBeans Portal осуществляется посредством интернет-обозревателя. После авторизации менеджер задач отображает список доступных испытательных стендов и список запущенных расчетов. В менеджере задач можно создать и запустить новую задачу моделирования индукционного нагрева. По окончании расчетов изображения с результатами моделирования доступны в разделе результатов задачи.

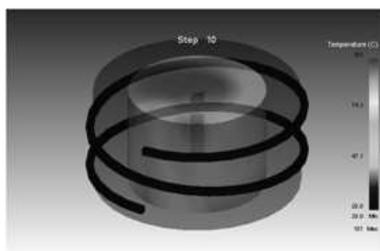


Рис. 3. Распределение температуры в заготовке

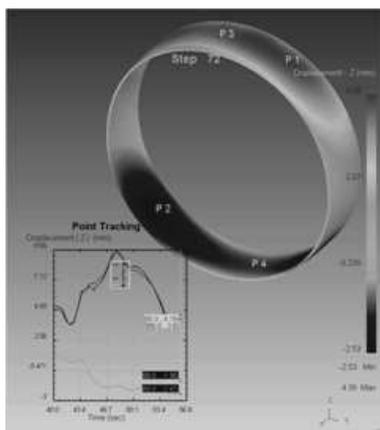


Рис. 4. График смещения выбранных точек по оси Z

5. Заключение

В данной статье был рассмотрен вопрос применимости технологии CAEBeans для создания виртуального испытательного стенда на базе пакета DEFORM для исследования эффекта овализации труб при термической обработке. Посредством пакета DEFORM реализована компьютерная модель закалки и отпуска труб на индукционных установках. Исследованы методы организации программного взаимодействия с пакетом DEFORM. На базе технологии CAEBeans успешно реализован виртуальный испытательный стенд для данной задачи, после чего были проведены эксперименты, подтверждающие его корректное функционирование.

На основе полученных данных, предлагаются следующие варианты развития - планируется создание программного обеспечения по удаленной интерактивной трехмерной визуализации результатов расчета для пакета DEFORM. Данное программное обеспечение вберет в себя часть функциональности постпроцессора пакета DEFORM и предоставит конечному пользователю возможность полноценного доступа к результатам решения задачи.

Также планируется внедрение в технологию CAEBeans программного комплекса многокритериальной оптимизации IOSO NM компании «Сигма технология», который позволит автоматизировать процесс проведения серии вычислительных экспериментов и поиска оптимальных значений параметров задачи.

Работа проводилась при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (грант 2007-4-1.4-20-01-026), программы СКИФ-ГРИД (грант СГ-1/07) и Фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере (грант 7434).

Литература

1. Бегунов, А. А. Применение результатов моделирования для оптимизации и управления технологическими процессами / А. А. Бегунов // Параллельные вычислительные технологии: тр. Междунар. науч. конф. (28 янв. – 1 февр. 2008 г., г. Санкт-Петербург). – СПб., 2008. – С. 31 – 38.
2. Радченко, Г. И. Технология построения проблемно-ориентированных иерархических оболочек над инженерными пакетами в грид-средах / Г. И. Радченко // Системы управления и информационные технологии. – 2008. – N 4(34). – С. 57 – 61.
3. Дорохов, В. А. Разработка проблемно-ориентированной GRID-оболочки для решения задачи оваллизации труб при закалке / В. А. Дорохов, А. Н. Маковецкий, Л. Б. Соколинский // Параллельные вычислительные технологии: тр. Междунар. науч. конф. (28 янв. – 1 февр. 2008 г., г. Санкт-Петербург). – СПб., 2008. – С. 520.
4. Engineering software DEFORM [<http://www.deform.com>]. – 25.09.2008.
5. Munday, R. UNICORE/w3 / Munday, R., Hagemeyer, B. // Euro-Par 2007 Workshops: Parallel Processing, HPPC 2007, UNICORE Summit 2007, and VHPC 2007, Rennes, France, August 28 – 31, 2007, Revised Selected Papers. – Lecture Notes in Computer Science. 4854 – Springer., 2008. – С. 12 – 17.
6. Методы организации программных интерфейсов к инженерным пакетам в среде GPE / Р. С. Насибулина, К. В. Репина, А. В. Шамакина, О. Н. Федянин, Н. И. Бухарин // Параллельные вычислительные технологии: тр. Междунар. науч. конф. (28 янв. – 1 февр. 2008 г., г. Санкт-Петербург). – СПб., 2008. – С. 537.

Кафедра системного программирования,
Южно-Уральский государственный университет
dorohovv85@mail.ru

Поступила в редакцию 2 марта 2009 г.

О ФАКТОРАХ РИСКА В ПРОЦЕССЕ РАЗРАБОТКИ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Д. А. Макаров, М. Я. Розенберг, А. Б. Шильников

RISKS IN SOFTWARE DEVELOPMENT PROCESS

D. A. Makarov, M. Y. Rozenberg, A. B. Shilnikov

Дается представление о факторах риска, возникающих в процессе разработки программного обеспечения, описывается их возможное негативное влияние на проекты по разработке ПО. Приводится краткий обзор видов рисков, рассматриваются источники их возникновения, а также методы их выявления и минимизации. Указаны актуальные проблемы, связанные с факторами риска.

Ключевые слова: программная инженерия, программное обеспечение, процесс разработки, технические риски, управленческие риски, управленческие рисками, факторы риска

Software development risks and their influence on software development process have been considered. Sources of software development risks and methods of their revelation and minimization are described. Topical issues related to risk factors are outlined.

Keywords: software, software engineering, software development process, technical risks, managerial risks, risk management, risk factors

Введение

Несмотря на постоянный и значительный прогресс, наблюдаемый в индустрии программного обеспечения (ПО) на протяжении последних десятилетий, следует признать, что разработка ПО в заданные сроки с заданным качеством и с заданным бюджетом по-прежнему представляет собой острую и актуальную проблему. Так, по данным [1] около двух третей от общего числа программных проектов в настоящее время либо полностью проваливаются, либо не завершаются в установленные сроки, либо не реализуют изначально запланированную функциональность. Исследование [1] со всей очевидностью показывает комплексный характер данной проблемы, решение которой требует такого же комплексного подхода. Научное направление, изучающее способы эффективного создания ПО с определенной функциональностью и в рамках приемлемых сроков и бюджета известно как программная инженерия (software engineering).

Одним из важнейших понятий программной инженерии является процесс разработки программного обеспечения, который можно охарактеризовать как совокупность некоторых процедур, выполняемых при разработке ПО. При этом часть таких процедур направлена непосредственно на конструирование проекта (разработка архитектуры, детальное проектирование, написание кода), а прочие – на управление им. В настоящее время известно несколько десятков различных процессов разработки ПО, каждый из которых продолжает эволюционировать [2].

Разработка программного обеспечения представляет собой, в общем случае, недетерминированный процесс, который сопровождается большим количеством неопределенностей (человеческий фактор, нестабильные требования и т.п.), способных оказывать резко негативное влияние на сроки выпуска и качество ПО. Такие неопределенности по своей сути являются для проекта факторами риска, которые необходимо по возможности минимизировать. В связи с этим важным элементом процесса разработки ПО является т.н. управление рисками (risk management) – деятельность, направленная на выявление и минимизацию рисков [3]. Управление рисками в рамках проекта по разработке ПО требует определенных дополнительных ресурсов, однако если ему уделяется недостаточно внимания, то проект будет разрабатываться в условиях неопределенности и непредсказуемости, возможный ущерб от которых способен вывести проект за рамки бюджета и расписания или же и вовсе привести к его сворачиванию.

В данной статье рассматриваются наиболее типичные для среднестатистического программного проекта риски, причины их возникновения, известные на настоящий момент подходы к их выявлению и минимизации, а также возникающие при использовании этих подходов проблемы.

1. Источники рисков

При разработке программного обеспечения разработчикам приходится ежедневно принимать тысячи решений различной степени значимости, причем число уровней абстракции, по которым распределяются эти решения, может достигать до девяти [4]. По причине высокой сложности и значительной нагрузки на специалистов, программная инженерия является одной из немногих технических областей, в которых человеческие ошибки происходят постоянно и являются неотъемлемой составляющей всего процесса трудовой деятельности.

Ошибки, допускаемые разработчиками, можно оценивать по степени причиняемого ими ущерба, выражаемого в расходе ресурсов (материальных, временных, трудовых и пр.) на поиск и исправление этих ошибок, а также на устранение их последствий. Кроме того, в зависимости от специфики разрабатываемого проекта и условий конкретной организации, определенные категории ошибок могут возникать чаще или реже других, то есть имеет смысл классифицировать ошибки по частоте их появления.

При сопоставлении средней частоты появления ошибки заданного типа и возможного ущерба, который она может принести, формируется величина, называемая техническим риском (technical risk). Технический риск является наиболее качественной мерой относительной значимости ошибки, поскольку с его помощью можно оценить максимальный ущерб от систематического возникновения ошибки определенного типа. Помимо технических рисков, выделяют также управленческие риски (managerial risks). Этот тип рисков используется для описания проблем, связанных с непредвиденными расходами, текучестью кадров, возможностью незавершения проекта в срок, на который брала обязательства организация, и т.п. [5].

2. Методики выявления рисков

Выявление рисков – это ключевой вид деятельности в любом процессе разработки, поскольку игнорирование рисков ставит под угрозу исход всего программного проекта [6]. Качественное выявление рисков предполагает наличие точных данных о динамике развития проекта, которые могут быть получены за счет постоянного мониторинга состояния проекта, а также за счет организации эффективной обратной связи со всеми, кто имеет к нему отношение.

Мониторинг состояния проекта может производиться по множеству различных метрик. Исследователи выделяют пять основных величин, которые могут предоставить необходимую информацию для выявления абсолютного большинства технических рисков: размер реализованных фрагментов программы в строках кода (LOC), производительность (LOC/час), время, расходуемое на различные виды деятельности, объем проделанной работы (в человеко-часах) и надежность программы (число раскрытых ошибок за период времени) [7]. Сбор информации может также проводиться и по любым другим метрикам (например, по т.н. микровехам), но в этом случае существует вероятность, что накладные расходы на их сбор превзойдут полезный эффект от улучшения «видимости» рисков. Следует заметить, однако, что на рынке ПО существуют автоматизированные утилиты (например, SEER-PPMC), осуществляющие эффективный сбор информации как по пяти основным, так и по большому количеству вспомогательных метрик.

Некоторые управленческие риски выявляются не с помощью сбора и мониторинга данных по различным метрикам, а путем организации обратной связи со всеми людьми, имеющими отношение к проекту. Во многих случаях созданию обратной связи мешает традиционно негативное отношение менеджеров к «плохим новостям», которыми они считают информацию о высоких рисках. Тем не менее, многие ведущие организации осознают ценность подобного рода информации, и специально в целях повышения эффективности создают анонимный канал для уведомлений о рисках [3]. Наиболее эффективная обратная связь может быть создана, если организация концентрирует свои усилия на достижении и поддержании «атмосферы высокого доверия» между всеми участниками проекта, включая менеджеров [8].

Чтобы в любой момент времени сведения обо всех выявленных рисках проекта были актуальными и общедоступными, многие организации создают специально для учета рисков некоторый формализованный документ (например, «Список 10 основных рисков») и закладывают в план проекта регулярный его пересмотр [9].

3. Методики минимизации рисков

Деятельность, направленная на выявление и регистрацию рисков, занимает лишь небольшую часть процесса разработки программного обеспечения. Основные трудозатраты по управлению процессом разработки ПО приходятся на минимизацию рисков, представляющих для проекта наибольшую угрозу. Для минимизации различных видов рисков существует большое количество методик, рассматривать которые удобнее всего в контексте разделения рисков на категории.

3.1. Управленческие риски

Управленческие риски могут включать в себя негативное влияние условий труда, недостаточную надежность аппаратного обеспечения, низкую эффективность программного инструментария и др., но, даже если перечисленные риски существуют, они, как правило, редко выходят на первый план.

Одни из самых серьезных управленческих рисков связаны с комплектацией персонала. Поскольку новые работники будут работать медленно и допускать ошибки, пока не обучатся, полная стоимость замены опытного компьютерного специалиста оценивается в 20–100 тыс. долларов [10]. Результаты исследований в области программной инженерии показывают, что «лучшие» программисты опережают по производительности «худших» в 10 раз [11]. Исходя из этого, если в организации присутствует разработчик из числа «худших», то он будет являться источником массы проблем, и, фактически, его присутствие будет представлять собой весомый риск для всего проекта.

Достаточно серьезными можно считать риски возможного превышения сроков и бюджета, хотя к таким рискам всегда необходимо относиться с особым вниманием. Если сроки и бюджет адекватны поставленной задаче, то риск их превышения вторичен и является следствием уделения слишком малого внимания другим рискам. Если же сроки и бюджет неадекватно малы, то это означает, что организация взяла на себя обязательства, основываясь на слишком неточной оценке. В таком случае для минимизации риска необходимо либо пересмотреть оценку сроков и бюджета, либо уменьшить объем проекта – пытаться теми или иными административными мерами заставить разработчиков уложиться одновременно в установленные сроки, бюджет и функциональный объем не только неэффективно, но и попросту вредно, поскольку это значительно увеличивает риск выпуска продукта неприемлемого качества. По статистике, программа, разработанная в условиях чрезмерного давления сроков, содержит в 4 раза больше ошибок, при этом давление сроков присутствует в 75–100% проектов [12].

Риск выпуска продукта неприемлемого качества является наиболее значительным из всех управленческих рисков, поскольку его минимизация предполагает кардинальные административные меры, вплоть до свертывания всего проекта. Это риск напрямую зависит от типа разрабатываемой программной системы и от специфических требований, предъявляемых к ней. Так, например, для типичной бизнес-системы приоритетной может быть скорость ее выпуска, возможно даже с некоторым ущербом качеству, в то время как для систем реального времени и встраиваемых систем требования к надежности, напротив, являются доминирующими. Игнорирование рисков, связанных с качеством, может привести к потере престижа организации, выходу из строя дорогостоящего оборудования и даже к гибели людей. К примеру, разрушение европейского ракетносителя Ariane 5 вследствие ошибки в регулировочном коде встроеного ПО привело к потере более 370 млн долларов [13].

Таким образом, минимизация управленческих рисков не предполагает использования каких-либо формальных методик, и при их разрешении важна только квалификация и решительность руководителя. При неэффективном менеджменте неразрешенные управленческие риски приведут к появлению технических рисков, на борьбу с которыми уйдет немалое количество денег, времени и трудовых затрат.

3.2. Технические риски, не связанные со сложностью разрабатываемого ПО

Некоторые категории ошибок возникают не из-за того, что разработчики не смогли справиться со сложностью задачи и приняли неверное проектное решение, а просто по невнимательности, вследствие «человеческого фактора».

Если такого рода ошибки возникают нечасто и приводят к незначительному ущербу, то и риски, связанные с такими ошибками, невелики и, как правило, не минимизируются. Примером такого класса ошибок могут являться опечатки в коде программы, которые легко обнаруживаются и устраняются при следующей сборке проекта.

С другой стороны, некоторые категории нечасто возникающих ошибок могут нанести проекту значительный ущерб: например, разработчик может случайно повредить или удалить файл с исходным кодом. Хотя такая ситуация происходит нечасто, она представляет для длительного проекта значительный риск, который нельзя игнорировать. Минимизация рисков такого типа производится путем введения в деятельность организации некоторой политики безопасности, включающей в себя разграничение доступа к информации, периодическое резервирование всех относящихся к проекту файлов и т.д. В настоящее время все эти задачи эффективно решаются системами контроля исходного кода (например, Microsoft

Visual SourceSafe), поэтому практически не сопряжены с дополнительными трудозатратами.

3.3. Технические риски, связанные с недостаточной квалификацией персонала

Поскольку каждая программная разработка по-своему уникальна, и эффективность борьбы с ее сложностью в значительной степени зависит от квалификации программиста, распространенным источником ошибок является периодически возникающая необходимость отправлять разработчиков завершать работу, начатую другими людьми. Разработчики, пытающиеся внести изменения или исправления в незнакомый код, будут допускать относительно большое количество ошибок до тех пор, пока полностью не разберутся в деталях поставленной перед ними задачи. Хотя ущерб от каждой из такого рода ошибок может быть незначительным, большое их количество в любом случае представляет для проекта большой риск.

Если объективной необходимости для перераспределения разработчиков на незнакомые задачи не было, то данный технический риск вторичен и порожден управленческими изъянами, поэтому достичь его эффективной минимизации возможно путем корректировки административных мер. Однако, вне зависимости от этого, технический риск такого типа может и должен быть минимизирован напрямую, и для этого придумана масса разнообразных методик. Суть всех этих методик заключается в повышении «прозрачности» проекта: чем более четко структурирован проект и чем более ясно и недвусмысленно изложены его исходный код и документация, тем меньше времени разработчик потратит на его изучение и тем меньше ошибок он допустит в конечном итоге. Данная деятельность весьма важна: по статистике, сопровождение кода проекта производит до 10 поколений программистов [14].

Чтобы проект получился четко структурированным, необходимо на всех «конструкторских» стадиях (разработка архитектуры, детальное проектирование, кодирование) планомерно бороться с его нарастающей сложностью. Эта деятельность включает в себя построение наилучшей декомпозиции проекта на подсистемы, модули, классы, функции, назначение понятных имен идентификаторам, написание комментариев, отказ от сложных языковых конструкций и многое другое [4]. Недостаточная борьба со сложностью увеличивает риски проекта не только в случае, когда на сопровождение кода назначается новый человек, но и при непосредственном «штатном» написании, поскольку с модификацией большого объема сложного кода может не справиться даже сам автор этого кода.

Чтобы достичь большей ясности исходного кода в условиях, когда разработкой занимается много программистов, большинство организаций создают собственные стандарты кодирования. Главная цель введения стандарта кодирования заключается в достигаемом с его помощью единообразии исходного кода [3], за счет которого минимизируется вероятность возникновения ошибок при перераспределении программистов.

Наконец, ускорить обучение программистов незнакомым задачам позволяет документация. Требования к документации просты: она должна быть недвусмысленной и информативной. Информативность предполагает возможность легко обнаружить в документации необходимые сведения о концепции проекта, архитектуре, декомпозиции на классы, о структуре базы данных и т.д., а недвусмысленность достигается путем использования определенных стандартов представления информации, понятных всем разработчикам. Для разных типов программного обеспечения стандарты представления информации могут быть разные: например, для объектно-ориентированных систем стандартом является язык моделирования UML (Unified Modeling Language), а для систем со структурной декомпозицией – функциональные диаграммы SADT (Structured Analysis and Design Technique), диаграммы потоков данных DFD (Data Flow Diagrams) и диаграммы «сущности-связи» ERD (Entity-

Relationship Diagrams). Структура, объем и степень детализации прочей проектной документации также во многих случаях регламентируются стандартами, принимаемыми в каждой конкретной организации. Например, чтобы максимально оградить проекты от человеческого фактора, в Министерстве Обороны США для 100 тыс. строк программного кода создается около 40 тыс. страниц документации [15].

3.4. Технические риски, связанные с поздним исправлением ошибок

В отличие от ошибок, допускаемых в исходном коде, возникающие на ранних стадиях проекта (при сборе требований, разработке архитектуры, детальном проектировании) ошибки могут представлять собой весомый риск для проекта не только за счет многочисленности, но и за счет значительного причиняемого ими ущерба. Риск, связанный с такими ошибками, возрастает со временем: чем позже обнаруживается ошибка, допущенная на ранней стадии проекта, тем большим будет ущерб, связанный с устранением ошибки вместе со всеми ее последствиями. Статистика утверждает, что стоимость позднего исправления ошибки, внесенной в проект на ранней стадии, в 50–200 раз выше стоимости исправления этой же ошибки сразу после ее внесения [16].

Минимизация данного риска лучше всего достигается за счет раннего обнаружения ошибок. Чтобы обнаружить большинство ошибок как можно раньше, организации подвергают все промежуточные продукты (список требований, проектную документацию, исходный код) тщательному коллективному инспектированию и рецензированию. Для крупных проектов техническое рецензирование является одной из ключевых методик, поскольку его эффективность может быть до 20 раз эффективнее тестирования [17].

Обнаружить при помощи рецензирования удается лишь около 60% всех ошибок, а все остальные должны быть найдены на поздней стадии проекта при помощи системного тестирования [4]. Нахождение ошибок на поздней стадии также можно считать мерой по уменьшению рисков, поскольку если ошибка не будет найдена вовсе и попадет в окончательный продукт, то затраты на ее исправление и на поддержку пользователей окажутся несоизмеримо большими. Правильными практиками системного тестирования являются заблаговременное построение эффективного тестового набора, покрывающего 100% кода программы, ежедневное тестирование герметичности («дымовой» тест), как можно более частое интеграционное тестирование и др. Если же к качеству системы предъявляются повышенные требования, то оправдывает себя выделение значительных ресурсов на обеспечение тестирования. К примеру, при разработке ПО для космического шаттла количество тестировщиков превосходило количество программистов в 10 раз [18].

Как можно догадаться, наиболее серьезной угрозой для проекта являются ошибки, допущенные на самой первой стадии проекта – при сборе требований. Эти ошибки могут, в случае их несвоевременного обнаружения, оказывать на проект наиболее длительный и масштабный негативный эффект, и, в то же время, в отличие от ошибок, допускаемых на остальных стадиях, не могут быть выявлены ни рецензированием, ни тестированием. По этой причине, риски, связанные с изменением набора требований к ПО, очень велики, и их минимизация редко бывает неактуальной.

Тем не менее, далеко не все меры, которые необходимо предпринять для исчерпывающего сбора требований, осуществимы на практике. Большинство пользователей не имеют технического образования и не обладают достаточной квалификацией, чтобы четко и полно сформулировать требования в терминах, понятных программистам. Программисты в таких случаях пытаются общаться в терминах, понятных пользователям: представляют им прототип пользовательского интерфейса, диаграмму вариантов использования и пр., однако и эти меры в большинстве случаев не позволяют уменьшить риск до приемлемого значения.

Единственный способ получить гарантированную минимизацию рисков, возникающих от изменения требований – это организация итеративного процесса разработки ПО, при котором на каждой итерации для некоторой отдельной части программы производится весь «водопадный» цикл от сбора требований до выпуска. В контексте взаимодействия с пользователями, итеративный процесс можно рассматривать как многоэтапную поставку: по завершению каждой итерации пользователи получают промежуточный рабочий вариант программы и возможность, анализируя его работу, скорректировать и дополнить свои требования. Чем выше риск изменения требований, тем больше должно быть спланировано итераций. Если риск слишком высок, наиболее эффективным становится т.н. экстремальное программирование: модель процесса, характеризующаяся предельно короткими итерациями (2 – 3 недели) и постоянной обратной связью с конечными пользователями [19]. Поскольку разбиение на множество итераций достаточно ресурсоемко, при средней степени риска изменения требований применяют гибридные модели процесса [1], сочетающие в себе как последовательную, так и итеративную части.

4. Актуальные проблемы управления рисками

Поскольку проекты различны по своему характеру и разрабатываются в различных условиях, методики выявления и минимизации рисков, рассмотренные в данной статье, могут быть эффективными в большей или меньшей степени в зависимости от каждого конкретного случая. В то же время, область исследования эффективности применения методик в реальных ситуациях остается малоизученной: вопрос о том, какой выигрыш (в материальных средствах, времени, трудозатратах) принесет использование какой-либо методики в заданной конкретной ситуации в большинстве случаев остается без ответа. Фактически, именно это обстоятельство является основной причиной провалов программных проектов, либо выхода их за рамки бюджета и расписания.

В настоящее время такая оценка сильно затруднена отсутствием полноценного формального описания процесса разработки ПО. Созданию в достаточной мере адекватной математической модели процесса разработки ПО препятствует значительное влияние человеческого фактора: степень необходимости применения тех или иных методик управления рисками сильно зависит от квалификации программистов, их мотивации, формы взаимодействия друг с другом и т.д. Существующие методы учета человеческого фактора при разработке ПО, включающие в себя, как правило, один или несколько субъективно выставляемых числовых коэффициентов, явно недостаточны для получения оценок эффективности методик с высокой степенью точности. Таким образом, повышение точности формального описания процесса разработки ПО способно привести к значительному повышению эффективности программных разработок в целом. Исследования в этом направлении осуществляются в настоящее время ведущими мировыми институтами программной инженерии.

В этих условиях представляется весьма перспективным создание специализированных технологических средств, способных выполнять оценку последствий применения различных методик управления рисками в конкретных ситуациях. Полученная с помощью таких средств информация могла бы стать для менеджеров проекта важнейшим инструментом, поскольку позволила бы определять набор наиболее эффективных методик, выявлять оптимальную последовательность их внедрения в процесс разработки и т.д. Эта же информация могла бы использоваться для наилучшей адаптации хорошо зарекомендовавших себя методик под конкретные проектные условия, а также для создания новых эффективных методик выявления и минимизации рисков.

Литература

1. The Standish Group. Charting the Seas of Information Technology / The Standish Group. – Dennis, MA: The Standish Group, 2007.
2. Ramsin, R. Process-Centered Review of Object-Oriented Software Development Metodologies / R. Ramsin, R. Paige // ACM Computer Surveys. – February 2008. – V.40, №1.
3. Макконнелл, С. Остаться в живых. Руководство для менеджера программных проектов. Библиотека программиста / С. Макконнелл. – СПб.: Питер, 2006. – 240 с.: ил.
4. Макконнелл, С. Совершенный код. Мастер-класс / С. Макконнелл. – М.: Рус. Редакция; СПб.: Питер, 2007. – 896 стр.: ил.
5. Manager's Handbook for Software Development, Revision 1. Document number SEL-84-101 / NASA Software Engineering Laboratory, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, MD, 1990.
6. Gilb, T. Principles of Software Engineering Management / T. Gilb. – Wokingham, England: Addison-Wesley, 1988.
7. Putnam, L.H. Five Core Metrics / L. H. Putnam, M. Ware – New York, NY: Dorset House, 2003.
8. Мораско, Дж. IT-проекты: фронтные очерки / Дж. Мораско – СПб: Символ-Плюс, 2007. – 384 с.: ил.
9. Boehm, B. W. Software Risk Management / B. W. Boehm. – Washington, DC: IEEE Computer Society Press, 1989.
10. Thomsett, R. Effective Project Teams: A Dilemma, A Model, A Solution / R. Thomsett // American Programmer. – July-August 1990. – P. 25 – 35.
11. Curtis, B. Substantiating Programmer Variability / B. Curtis // Proceedings of the IEEE. – V.69, №7. – P. 846.
12. Capers, J. Assessment and Control of Software Risks / J. Capers. – Englewood Cliffs, NJ: Yourdon Press, 1994.
13. Nuseibeh, B. Ariane 5: Who Dunit? / B. Nuseibeh // IEEE Software. – May–June 1997. – P. 15 – 16.
14. Thomas, R. A. Using Comments to Aid Program Maintenance / R. A. Thomas // Byte. – May 1984. – P. 415 – 422.
15. Capers, J. Applied Software Measurement: Assuring Productivity and Quality, 2d Ed. / J. Capers. – New York, NY: McGraw-Hill, 1997.
16. Boehm, B. W. Understanding and Controlling Software Costs / B. W. Boehm, P. N. Papaccio // IEEE Transactions on Software Engineering. – October 1998. – V.14, №10. – P. 1462 – 1477.
17. Russell, G. W. Experience with Inspection in Ultralarge-Scale Developments / G. W. Russell // IEEE Software. – January 1991. – V.8, №1. – P. 25 – 31.
18. Basili, V. The Experience Factory: How To Build And Run One / V. Basili, F. McGarry // 17th International Conference on Software Engineering. – Seattle, WA. – April 1995.
19. Кент, Б. Экстремальное программирование / Б. Кент. – СПб: Питер, 2002. – 224 с.

Кафедра «ИВТиПМ»,
Читинский государственный университет
makarov@chitgu.ru

Поступила в редакцию 9 февраля 2009 г.

О РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ СОСТАВНОГО ВИДА В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

Р. Р. Сафуллова

ON SOLVABILITY OF THE LINEAR INVERSE PROBLEM WITH UNKNOWN COMPOSITE RIGHT-HAND SIDE IN HYPERBOLIC EQUATION

R. R. Safullova

Исследована разрешимость обратной задачи с неизвестной правой частью составного вида для линейных гиперболических уравнений второго порядка. Суть задачи состоит в том, что требуется вместе с решением определить неизвестную правую часть, задача рассматривается в цилиндрической области, задаются условия обычной начально-краевой задачи и некоторые условия переопределения, заданные на временных слоях $t = t_1$, $t = t_2$.

Ключевые слова: обратная задача, гиперболическое уравнение, условия переопределения, нелокальные условия

The solvability of the inverse problem with unknown composite right-hand side for second-order linear hyperbolic equation is studied. The essence of the problem is as follows: it is required to find together with solution the unknown right-hand side of the equation. The problem is considered in a cylindrical region, with set conditions being typical of the first boundary-value problem and with overdetermination conditions set over some sections $t = t_1$, $t = t_2$.

Keywords: inverse problem, hyperbolic equation, overdetermination conditions, nonlocal conditions

Введение

Работа посвящена исследованию разрешимости обратной задачи с неизвестной правой частью составного вида для гиперболических уравнений второго порядка.

Суть данной задачи состоит в том, что требуется вместе с решением определить неизвестную правую часть, при этом задача рассматривается в цилиндрической области, задаются условия обычной начально – краевой задачи и некоторые условия переопределения, заданные на временных слоях.

Обратные задачи для гиперболических уравнений второго порядка в различных постановках исследовались В. Г. Романовым, С. И. Кабанихиным, А. Лоренци, А. И. Прилепко, Б. А. Бубновым, Ю. Е. Аниконовым, Е. Г. Саватеевым и многими другими – см. работы [1 – 7] и имеющуюся там библиографию. Вместе с тем, заметим, что в предложенной ниже постановке обратные задачи для гиперболических уравнений ранее не изучались. Можно отметить лишь статьи А. Д. Искендерова [8], А. Х. Амирова [9, 10], в которых исследовались обратные задачи для гиперболических уравнений с неизвестной правой частью простейшего

вида, работу автора [12], в которой изучалась обратная задача для гиперболических уравнений с неизвестной правой частью составного вида, однако условия переопределения задачи были иные, а также работу А. И. Кожанова [11], в которой изучалась близкая по условиям переопределения обратная задача для параболических уравнений.

1. Постановка задачи

Пусть Ω есть ограниченная область пространства R^n с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей Γ , Q есть цилиндр $\Omega \times (0, T)$ конечной высоты T , $x = (x_1, \dots, x_n)$ есть точка области Ω , t есть точка интервала $(0, T)$, S есть боковая граница цилиндра $Q : S = \Gamma \times (0, T)$. Далее, пусть $h_i(x, t)$, $i = \overline{1, 3}$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $f(x, t)$ есть заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$, $0 < t_1 \leq T$, $0 < t_2 \leq T$, $t_1 \neq t_2$.

Обратная задача: найти функции $u(x, t)$, $q_1(x)$, $q_2(x)$, $q_3(x)$, связанные в цилиндре Q уравнением

$$u_{tt} - \Delta u + a(x, t)u_t + b(x, t)u = \sum_{i=1}^3 h_i(x, t)q_i(x) + f(x, t), \quad (1)$$

при выполнении для функции $u(x, t)$ условий

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

$$u(x, t)|_S = 0, \quad (4)$$

$$u(x, t_1) = \varphi_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (5)$$

$$u_t(x, t_1) = \psi_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (6)$$

$$u(x, t_2) = \varphi_2(x), \quad x \in \Omega. \quad (7)$$

В рассматриваемой обратной задаче условия (2) – (4) суть условия обычной первой начально-краевой задачи, условия же (5) – (7) есть условия переопределения, необходимые для нахождения дополнительных неизвестных функций $q_1(x)$, $q_2(x)$, $q_3(x)$. Уточним, что условия (5) – (7) предполагают, что известна информация о состоянии среды или же иной характеристике, соответствующей процессу, описываемому уравнением (1) – в моменты времени t_1 и t_2 .

2. Разрешимость обратной задачи

Введем в рассмотрение пространства H_0 , H_1 , V_0 и V_1 :

$$H_i = \{v(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega)), v_t(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^{i+1}(\Omega)), v_{tt}(x, t) \in L_2(Q)\},$$

$$V_i = \{v(x, t) : v(x, t) \in H_i, v_t(x, t) \in H_i\}, \quad i = 0, 1;$$

нормы в этих пространствах определим естественным образом

$$\|v\|_{H_i} = \|v\|_{L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega))} + \|v_t\|_{L_\infty(0, T; W_2^{i+1}(\Omega))} + \|v_{tt}\|_{L_2(Q)},$$

$$\|v\|_{V_i} = \|v\|_{H_i} + \|v_t\|_{H_i} + \|v_{tt}\|_{H_i} \quad i = 0, 1.$$

Рассмотрим следующую линейную алгебраическую относительно функций $a_1(x)$, $a_2(x)$, $a_3(x)$ систему

$$\sum_{i=1}^3 a_i(x)h_i(x, t_k) = v_{tt}(x, t_k) + a(x, t_k)v_t(x, t_k) - \Delta\varphi_k(x) + b(x, t_k)\varphi_k(x) - f(x, t_k), \quad k = 1, 2, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 a_i(x)h_{it}(x, t_1) &= v_{ttt}(x, t_1) + a(x, t_1)v_{tt}(x, t_1) - \Delta\psi_1(x) + [a_t(x, t_1) + b(x, t_1)]\psi_1(x) + \\ &+ b_t(x, t_1)\varphi_1(x) - f_t(x, t_1). \end{aligned}$$

Предполагая, что определитель $d_0(x)$ этой системы не обращается в нуль на множестве $\bar{\Omega}$, найдем функции $a_i(x)$:

$$a_i(x) = \alpha_0^i(x) + \alpha_1^i(x)v_{tt}(x, t_1) + \alpha_2^i(x)v_{ttt}(x, t_1) + \alpha_3^i(x)v_t(x, t_2) + \alpha_4^i(x)v_{tt}(x, t_2), \quad (9)$$

функции $\alpha_k^i(x)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ в равенствах (9) вполне конкретно вычисляются через функции $a(x, t)$, $b(x, t)$, $f(x, t)$, $\psi(x)$, $\varphi_k(x)$, $h_j(x, t)$, $k = 1, 2$, $j = \overline{1, 3}$.

Положим

$$A_j(x, t) = \sum_{i=1}^3 h_i(x, t)\alpha_j^i(x), \quad B_j(x, t) = A_{jt}(x, t) - a(x, t)A_j(x, t), \quad B_j(x) = B_j(x, 0), \quad j = \overline{1, 4},$$

$$s_i = \frac{5}{2} \max_{\Omega} B_i^2(x) + \frac{7}{2} \max_{\Omega} A_{ix}^2(x, 0) + 2 \max_{\Omega} [2a_t(x, 0) + b(x, 0)] \max_{\Omega} A_i^2(x, 0), \quad i = \overline{1, 4},$$

$$m_2 = \frac{3t^2}{\delta^2} \left(\max_{\Omega} [a_{tt}(x, t) + 2b_t(x, t)]^2 + \frac{t^2}{2} \max_{\Omega} b_{tt}^2(x, t) \right),$$

$$k_i(x) = \frac{3t}{\delta^2} \max_{\Omega} A_{itt}^2(x, t) + 4t \max_{\Omega} [2a_{tt}(x, t) + b_t(x, t)] \max_{\Omega} A_i^2(x, 0) + s_i(x), \quad i = \overline{1, 4},$$

$$r_i(x) = k_i(x) + 5m_2t \max_{\Omega} A_i^2(x, 0), \quad i = \overline{1, 4},$$

$$\tilde{r}(x) = \frac{2r_1(x)}{\min_{\Omega} [2a_t(x, t) + b(x, t)] - 2r_1(x)} + \frac{2r_2(x)}{1 - 2r_2(x)} + \frac{7 \max_{\Omega} A_1^2(x, 0)}{1 - 7 \max_{\Omega} A_1^2(x, 0)} + 1,$$

$$d(x) = 1 + \frac{2r_4(x)\tilde{r}(x)}{\min_{\Omega} [2a_t(x, t) + b(x, t)] - 2r_4(x)\tilde{r}(x)} + \frac{7 \max_{\Omega} A_4^2(x, 0)\tilde{r}(x)}{1 - 7 \max_{\Omega} A_4^2(x, 0)\tilde{r}(x)},$$

$$c_i(x) = 4 \max_{\Omega} A_{i+2}^2(x, 0) \left(1 + \frac{2 \max_{\Omega} B_2^2(x) + \delta_1^2 T}{1 - 2 \max_{\Omega} B_2^2(x) + \delta_1^2 T} + \frac{4 \max_{\Omega} A_1^2(x, 0)}{1 - 4 \max_{\Omega} A_1^2(x, 0)} \right), \quad i = 1, 2,$$

$$c_3(x) = c_1(x)t_2 \left(1 + \frac{c_2(x)}{1 - c_2(x)} \right),$$

$$f_1(x, t) = f(x, t) + \sum_{i=1}^3 h_i(x, t)\alpha_0^i(x),$$

$$F(x, t) = f_{1tt}(x, t) - [a_{tt}(x, t) + 2b_t(x, t)]u_1(x) - b_{tt}(x, t)[tu_1(x) + u_0(x)] + A_{3tt}(x, t)u_1(x).$$

Теорема 1. Пусть для функций $a(x, t)$, $b(x, t)$, $h_k(x, t)$, $k = \overline{1, 3}$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi_1(x)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ и $f(x, t)$ выполняются включения $a(x, t) \in C^3(Q)$, $b(x, t) \in C^3(Q)$, $h_k(x, t) \in W_\infty^1(Q) \cap W_2^2(Q)$, $h_{kt}(x, t) \in W_\infty^1(Q)$, $h_{ktt}(x, t) \in W_2^1(Q)$, $h_k(x, t_i) \in W_\infty^1(\Omega)$, $k = 1, 2, 3$, $\varphi_i(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, $i = 1, 2$, $\psi_1(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, $u_0(x) \in W_2^4(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, $u_1(x) \in W_2^3(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, $f(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega))$, $f_t(x, t) \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$, $f_{tt}(x, t) \in L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))$.

Кроме того, пусть выполняются условия

$$A_2(x, 0) \equiv 0, \quad d_0(x) \geq d_0 > 0, \quad x \in \overline{\Omega},$$

$$a(x, t) \geq a_0 > 0, \quad 2a_t(x, t) + b(x, t) > 0, \quad 2a_{tt}(x, t) + b_t(x, t) > 0, \quad (x, t) \in \overline{Q}.$$

Пусть $\exists \delta > 0$, $\delta_1 > 0$ такие, что выполняются следующие условия

$$a_0 - [\delta^2 + t^2 \max_Q [2a_{tt}(x, t) + b_t(x, t)] + 5m_2 \frac{t^2}{2}] > 0, \quad (10)$$

$$a_0 - \frac{1}{2\delta_1^2} \max_Q A_{2tt}^2(x, t) - 7\delta^2 > 0, \quad (11)$$

$$1 - \max\{2r_2(x), 7 \max_{\overline{\Omega}} A_1^2(x, 0), 2 \max_{\overline{\Omega}} A_{2t}^2(x, 0) + \delta_1^2 T\} > 0, \quad (12)$$

$$\min_{\overline{\Omega}} [2a_t(x, t) + b(x, t)] - \max\{2r_1(x), 2r_4(x)\tilde{r}(x), 2t_2^2 r_3(x)\tilde{r}(x)d(x)\} > 0, \quad (13)$$

$$1 - 7\tilde{r}(x) \cdot \max\{t_2^2 \max_{\overline{\Omega}} A_3^2(x, 0)d(x), \max_{\overline{\Omega}} A_4^2(x, 0)\} > 0, \quad (14)$$

$$1 - \max\{c_2(x), c_3(x)t_2\} > 0. \quad (15)$$

Тогда обратная задача (1) – (7) имеет решения $\{u(x, t), q_1(x), q_2(x), q_3(x)\}$ такие, что $u(x, t) \in V_0$, $q_k(x) \in W_2^1(\Omega)$, $k = \overline{1, 3}$.

Доказательство. Положим

$$g_1(x) = \Delta u_0(x) - a(x, 0)u_1(x) - b(x, 0)u_0(x) + f_1(x, 0),$$

$$g_2(x) = \Delta u_1(x) - [a_t(x, 0) + b(x, 0)]u_1(x) - b_t(x, 0)u_0(x) + f_1t(x, 0) - a(x, 0)g_1(x),$$

$$\gamma_1(x) = g_1(x) + A_3(x, 0)u_1(x), \quad \gamma_2(x) = g_2(x) + B_3(x, 0)u_1(x).$$

Рассмотрим следующую краевую задачу: найти функцию $w(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$\begin{aligned} Lw &\equiv w_{tt}(x, t) - \Delta w + a(x, t)w_t(x, t) + (2a_t(x, t) + b(x, t))w(x, t) = \\ &= F(x, t) + A_{1tt}(x, t)w(x, t_1) + A_{2tt}(x, t)w_t(x, t_1) + A_{3tt}(x, t) \int_0^{t_2} w(x, \tau) d\tau + \\ &+ A_{4tt}(x, t)w(x, t_2) - [a_{tt}(x, t) + 2b_t(x, t)] \int_0^t w(x, \tau) d\tau - b_{tt}(x, t) \int_0^t \int_0^\tau w(x, \xi) d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (16)$$

такую, что для нее выполняются условия (2), (3), а также следующие условия

$$w(x, 0) = \gamma_1(x) + A_1(x, 0)w(x, t_1) + A_3(x, 0) \int_0^{t_2} w(x, \tau) d\tau + A_4(x, 0)w(x, t_2), \quad x \in \Omega, \quad (17)$$

$$w_t(x, 0) = \gamma_2(x) + B_1(x)w(x, t_1) + B_2(x)w_t(x, t_1) + B_3(x) \int_0^{t_2} w(x, \tau)d\tau + B_4(x)w(x, t_2), \quad (18)$$

$$w(x, t)|_{\Gamma \times (0, T)} = 0. \quad (19)$$

Разрешимость данной краевой задачи докажем, комбинируя метод регуляризации и метод продолжения по параметру.

При фиксированном положительном ε рассмотрим краевую задачу: найти функцию $w(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$L_{\varepsilon\lambda}w = w_{tt}^\varepsilon(x, t) - \Delta w^\varepsilon(x, t) + a(x, t)w_t^\varepsilon(x, t) + [2a_t(x, t) + b(x, t)]w^\varepsilon(x, t) - \\ - \varepsilon \Delta w_t^\varepsilon(x, t) = F(x, t) + \lambda r(x, t), \quad (16_{\varepsilon\lambda})$$

где

$$r(x, t) = A_{1tt}(x, t)w^\varepsilon(x, t_1) + A_{2tt}(x, t)w_t^\varepsilon(x, t_1) + A_{3tt}(x, t) \int_0^{t_2} w^\varepsilon(x, \tau)d\tau + \\ + A_{4tt}(x, t)w^\varepsilon(x, t_2) - [a_{tt}(x, t) + 2b_t(x, t)] \int_0^t w^\varepsilon(x, \tau)d\tau - b_{tt}(x, t) \int_0^t \int_0^\tau w^\varepsilon(x, \xi)d\xi d\tau,$$

и такую, что для нее выполняются условия (2), (3), (17) – (19).

Обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка $[0, 1]$, для которых краевая задача (16 $_{\varepsilon\lambda}$), (2), (3), (17) – (19) разрешима в пространстве V_1 при произвольной функции $F(x, t)$ из пространства $L_2(Q)$.

Как известно, если множество Λ не пусто, открыто и замкнуто одновременно, то оно совпадает со всем отрезком $[0, 1]$. А это и будет означать, что краевая задача (16), (2), (3), (17) – (19) имеет решение из пространства V_1 .

При $\lambda = 0$ существует функция $w^\varepsilon(x, t)$, принадлежащая пространству H_1 , удовлетворяющая уравнению (16 $_{\varepsilon,0}$) и такая, что для нее выполняются условия (17) – (19) – см. [13]. Имея функцию $w^\varepsilon(x, t)$, нетрудно с помощью условий (2) и (3) найти саму функцию $u^\varepsilon(x, t)$; очевидно, что эта функция будет принадлежать пространству V_1 . Следовательно, множество Λ не пусто – число 0 принадлежит ему. Для доказательства открытости и замкнутости Λ установим необходимые априорные оценки решений задачи (16 $_{\varepsilon\lambda}$), (2), (3), (17) – (19) из пространства V_1 . Для удобства индекс ε у функции $w^\varepsilon(x, t)$ временно опустим.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_\Omega L_{\varepsilon\lambda}w w_\tau dx d\tau = \int_0^t \int_\Omega F w_\tau dx d\tau + \lambda \int_0^t \int_\Omega r w_\tau dx d\tau.$$

Интегрируя по частям в левой части данного равенства, используя условие (19), придем к следующему равенству

$$\frac{1}{2} \int_\Omega w_t^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_\Omega w_{x_i}^2(x, t) dx + \int_0^t \int_\Omega a(x, \tau) w_\tau^2 dx d\tau + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_\Omega w_{x_i \tau}^2 dx d\tau + \\ + \frac{1}{2} \int_\Omega [2a_t(x, t) + b(x, t)] w^2(x, t) dx = \int_0^t \int_\Omega F w_\tau dx d\tau + \lambda \int_0^t \int_\Omega r(x, \tau) w_\tau dx d\tau +$$

$$+\frac{1}{2} \int_{\Omega} w_t^2(x, 0) dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, 0) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [2a_t(x, 0) + b(x, 0)] w^2(x, 0) dx + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} [2a_{\tau\tau} + b_{\tau}] w^2 dx d\tau.$$

Учитывая условия задачи (17), (18), требования теоремы, налагаемые на функции $a(x, t)$, $b(x, t)$, применяя элементарные арифметические неравенства, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_t^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, t) dx + a_0 \int_0^t \int_{\Omega} w_{\tau}^2 dx d\tau + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} w_{x_i\tau}^2 dx d\tau + \\ & + \frac{1}{2} \min_{\Omega} [2a_t(x, t) + b(x, t)] \int_{\Omega} w^2(x, t) dx \leq \int_0^t \int_{\Omega} F(x, \tau) w_{\tau} dx d\tau + \lambda \int_0^t \int_{\Omega} r(x, \tau) w_{\tau} dx d\tau + \\ & + \frac{1}{2} \max_{\overline{Q}} [2a_{tt}(x, t) + b_t(x, t)] \int_0^t \int_{\Omega} w^2 dx d\tau + s_1(x) \int_{\Omega} w^2(x, t_1) dx + s_2(x) \int_{\Omega} w_t^2(x, t_1) dx + \\ & + s_3(x) \int_{\Omega} \left(\int_0^{t_2} w(x, \tau) d\tau \right)^2 dx + s_4(x) \int_{\Omega} w^2(x, t_2) dx + \frac{7}{2} \max_{\Omega} A_1^2(x, 0) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, t_1) dx + \\ & + \frac{7}{2} \max_{\Omega} A_3^2(x, 0) \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left(\int_0^{t_2} w_{x_i} d\tau \right)^2 dx + \frac{7}{2} \max_{\Omega} A_4^2(x, 0) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, t_2) dx + N_1, \end{aligned}$$

где число N_1 определяется лишь входными данными задачи.

Применяя к ряду слагаемых правой части соотношения неравенства Юнга и Гельдера, учитывая вид функции $r(x, t)$, условие (17) краевой задачи (16 $_{\varepsilon, \lambda}$) – (19), придем к следующему соотношению

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_t^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, t) dx + a_0 \int_0^t \int_{\Omega} w_{\tau}^2 dx d\tau + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} w_{x_i\tau}^2 dx d\tau + \\ & + \frac{1}{2} \min_{\Omega} [2a_t(x, t) + b(x, t)] \int_{\Omega} w^2(x, t) dx \leq m_1 \int_0^t \int_{\Omega} w_{\tau}^2 dx d\tau + k_1(x) \int_{\Omega} w^2(x, t_1) dx + \\ & + k_2(x) \int_{\Omega} w_t^2(x, t_1) dx + t_2 k_3(x) \int_0^{t_2} \int_{\Omega} w^2 dx d\tau + k_4(x) \int_{\Omega} w^2(x, t_2) dx + \\ & + \frac{7}{2} \max_{\Omega} A_1^2(x, 0) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, t_1) dx + \frac{7}{2} \max_{\Omega} A_3^2(x, 0) t_2 \sum_{i=1}^n \int_0^{t_2} \int_{\Omega} w_{x_i}^2 dx d\tau + \\ & + \frac{7}{2} \max_{\Omega} A_4^2(x, 0) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, t_2) dx + m_2 \int_0^t \int_{\Omega} w^2 dx d\tau + N_2, \end{aligned}$$

где $m_1 = \delta^2 + t^2 \max_{\overline{Q}} [2a_{tt}(x, t) + b_t(x, t)]$, число N_2 определяется лишь входными данными задачи.

Оценивая сверху последнее интегральное слагаемое данного неравенства, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_t^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \frac{\min[2a_t(x, t) + b(x, t)]}{\Omega} \int_{\Omega} w^2(x, t) dx + \\ & + (a_0 - m_3) \int_0^t \int_{\Omega} w_{\tau}^2 dx d\tau + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} w_{x_i \tau}^2 dx d\tau \leq r_1(x) \int_{\Omega} w^2(x, t_1) dx + r_2(x) \int_{\Omega} w_t^2(x, t_1) dx + \\ & + t_2 r_3(x) \int_0^{t_2} \int_{\Omega} w^2 dx d\tau + r_4(x) \int_{\Omega} w^2(x, t_2) dx + \frac{7}{2} \frac{\max A_1^2(x, 0)}{\Omega} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, t_1) dx + \\ & + \frac{7}{2} \frac{\max A_3^2(x, 0)}{\Omega} t_2 \sum_{i=1}^n \int_0^{t_2} \int_{\Omega} w_{x_i}^2 dx d\tau + \frac{7}{2} \frac{\max A_4^2(x, 0)}{\Omega} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, t_2) dx + N_3, \quad (20) \end{aligned}$$

где $m_3 = m_1 + 5m_2 \frac{t^2}{2}$, постоянная N_3 определяется лишь входными данными задачи.

В силу условия (10) первые три слагаемых левой части неравенства (20) будут ограничены сверху правой его частью. Полагая в этом следствии $t = t_1$, получим

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2} - r_2(x) \right] \int_{\Omega} w_t^2(x, t_1) dx + \left[\frac{1}{2} - \frac{7}{2} \frac{\max A_1^2(x, 0)}{\Omega} \right] \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, t_1) dx + \\ & + \left(\frac{1}{2} \frac{\min[2a_t(x, t) + b(x, t)]}{\Omega} - r_1(x) \right) \int_{\Omega} w^2(x, t_1) dx \leq t_2 r_3(x) \int_0^{t_2} \int_{\Omega} w^2 dx d\tau + r_4(x) \int_{\Omega} w^2(x, t_2) dx + \\ & + \frac{7}{2} t_2 \frac{\max A_3^2(x, 0)}{\Omega} \sum_{i=1}^n \int_0^{t_2} \int_{\Omega} w_{x_i}^2 dx d\tau + \frac{7}{2} \frac{\max A_4^2(x, 0)}{\Omega} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, t_2) dx + N_3. \end{aligned}$$

В силу условий (12) и (13) теоремы из неравенства (20) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_t^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, t) dx + (a_0 - m_3) \int_0^t \int_{\Omega} w_{\tau}^2 dx d\tau + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} w_{x_i \tau}^2 dx d\tau + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\min[2a_t(x, t) + b(x, t)]}{\Omega} \int_{\Omega} w^2(x, t) dx \leq t_2 r_3(x) \tilde{r}(x) \int_0^{t_2} \int_{\Omega} w^2 dx d\tau + r_4(x) \tilde{r}(x) \int_{\Omega} w^2(x, t_2) dx + \\ & + \frac{7}{2} t_2 \frac{\max A_3^2(x, 0)}{\Omega} \tilde{r}(x) \sum_{i=1}^n \int_0^{t_2} \int_{\Omega} w_{x_i}^2 dx d\tau + \frac{7}{2} \frac{\max A_4^2(x, 0)}{\Omega} \tilde{r}(x) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, t_2) dx + N_4, \quad (21) \end{aligned}$$

где число N_4 определяется лишь входными данными задачи.

Положив в одном из следствий последнего неравенства $t = t_2$, в силу условий (13), (14) теоремы не трудно прийти к следующему соотношению

$$\frac{1}{2} \frac{\min[2a_t(x, t) + b(x, t)]}{\Omega} \int_{\Omega} w^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_t^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, t) dx +$$

$$\begin{aligned}
 &+(a_0 - m_3) \int_0^t \int_{\Omega} w_{\tau}^2 dx d\tau + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} w_{x_i \tau}^2 dx d\tau \leq t_2 r_3(x) \tilde{r}(x) d(x) \int_0^{t_2} \int_{\Omega} w^2 dx d\tau + \\
 &+ \frac{7}{2} t_2 \max_{\Omega} A_3^2(x, 0) \tilde{r}(x) d(x) \sum_{i=1}^n \int_0^{t_2} \int_{\Omega} w_{x_i}^2 dx d\tau + N_5, \tag{22}
 \end{aligned}$$

постоянная N_5 определяется лишь входными данными задачи.

Проинтегрировав одно из следствий неравенства (22) по переменной τ от 0 до t и положив в полученном соотношении $t = t_2$, получим

$$\begin{aligned}
 &\left(\min_{\Omega} [2a_t(x, t) + b(x, t)] - 2t_2^2 r_3(x) \tilde{r}(x) d(x) \right) \int_0^{t_2} \int_{\Omega} w^2 dx d\tau + \\
 &+ \left(1 - 7t_2^2 \max_{\Omega} A_3^2(x, 0) \tilde{r}(x) d(x) \right) \sum_{i=1}^n \int_0^{t_2} \int_{\Omega} w_{x_i}^2 dx d\tau \leq N_6,
 \end{aligned}$$

постоянная N_6 определяется лишь входными данными задачи.

Отсюда в силу условий (13) и (14) теоремы из неравенства (22) получим первую априорную оценку

$$\int_{\Omega} w_t^2(x, t) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, t) dx + \int_0^t \int_{\Omega} w_{\tau}^2 dx d\tau + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} w_{x_i \tau}^2 dx d\tau + \int_{\Omega} w^2(x, t) dx \leq N_7, \tag{23}$$

где число N_7 определяется лишь входными данными задачи и не зависит от ε .

Далее рассмотрим равенство

$$- \int_0^t \int_{\Omega} L_{\varepsilon \lambda} w \Delta w_{\tau} dx d\tau = - \int_0^t \int_{\Omega} F \Delta w_{\tau} dx d\tau - \lambda \int_0^t \int_{\Omega} r \Delta w_{\tau} dx d\tau.$$

Интегрируя по частям в первом и втором слагаемых левой части равенства, используя условия (17) – (19) краевой задачи, применяя элементарные арифметические неравенства, получим

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, t) dx + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta w_{\tau})^2 dx d\tau \leq \int_0^t \int_{\Omega} a(x, \tau) w_{\tau} \Delta w_{\tau} dx d\tau + \\
 &+ \int_0^t \int_{\Omega} [2a_{\tau} + b] w \Delta w_{\tau} dx d\tau - \int_0^t \int_{\Omega} F \Delta w_{\tau} dx d\tau - \lambda \int_0^t \int_{\Omega} r(x, \tau) \Delta w_{\tau} dx d\tau + \\
 &+ \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} B_2^2(x, 0) w_{x_i t}^2(x, t_1) dx + 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} A_1^2(x, 0) w_{x_i x_j}^2(x, t_1) dx + \int_{\Omega} M_1^2(x) dx + \\
 &+ 2t_2 \int_{\Omega} A_3^2(x, 0) \sum_{i=1}^n \int_0^{t_2} w_{x_i x_j}^2 d\tau dx + 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} A_4^2(x, 0) w_{x_i x_j}^2(x, t_2) dx, \tag{24}
 \end{aligned}$$

где $M_1(x)$ представляет собой сумму, слагаемыми которой являются функция $w(x, t)$, ее производные первого порядка, либо функции, определяемые входными данными задачи.

Применяя к первым 4-м слагаемым правой части соотношения неравенство Юнга, взяв $\delta^2 = \frac{\varepsilon}{4}$, учитывая первую априорную оценку (23) будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, t) dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta w_{\tau})^2 dx d\tau \leq \\ & \leq \max_{\Omega} B_2^2(x, 0) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, t_1) dx + 2 \max_{\Omega} A_1^2(x, 0) \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, t_1) dx + \\ & + 2t_2 \max_{\Omega} A_3^2(x, 0) \sum_{i,j=1}^n \int_0^{t_2} \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2 dx d\tau + 2 \max_{\Omega} A_4^2(x, 0) \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, t_2) dx + N_8, \end{aligned} \quad (25)$$

где число N_8 определяется входными данными задачи и числом ε .

Полагая в одном из следствий данного неравенства $t = t_1$, в силу требований (12) теоремы, из неравенства (25) будем иметь

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, t) dx + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, t) dx + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta w_{\tau})^2 dx d\tau \leq \\ & \leq n_1(x) t_2 \sum_{i,j=1}^n \int_0^{t_2} \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2 dx d\tau + n_2(x) \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, t_2) dx + N_9, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$n_i(x) = 4 \max_{\Omega} A_{i+2}^2(x, 0) \left(1 + \frac{2 \max_{\Omega} B_2^2(x, 0)}{1 - 2 \max_{\Omega} B_2^2(x, 0)} + \frac{4 \max_{\Omega} A_1^2(x, 0)}{1 - 4 \max_{\Omega} A_1^2(x, 0)} \right), \quad i = 1, 2,$$

число N_9 определяется входными данными задачи и числом ε .

Полагая в одном из следствий последнего неравенства $t = t_2$, в силу условия (15) получим

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, t_2) dx \leq \frac{n_1(x) t_2}{1 - n_2(x)} \sum_{i,j=1}^n \int_0^{t_2} \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2 dx d\tau + N_{10},$$

где число N_{10} определяется входными данными задачи и числом ε .

Таким образом, из неравенства (26) получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, t) dx + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, t) dx + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta w_{\tau})^2 dx d\tau \leq \\ & \leq n_1(x) t_2 \left(1 + \frac{n_2(x)}{1 - n_2(x)} \right) \sum_{i,j=1}^n \int_0^{t_2} \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2 dx d\tau + N_{11}, \end{aligned} \quad (27)$$

число N_{11} определяется входными данными задачи и числом ε .

Проинтегрировав в одном из следствий неравенства (27) по переменной τ от 0 до t , положив в полученном неравенстве $t = t_2$, в силу условия (15) теоремы получим

$$\sum_{i,j=1}^n \int_0^{t_2} \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2 dx d\tau \leq N_{12},$$

где постоянная N_{12} определяется входными данными задачи и числом ε .

В силу последнего из неравенства (27) приходим ко второй априорной оценке в случае, когда ε является фиксированной величиной

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, t) dx + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, t) dx + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta w_{\tau})^2 dx d\tau \leq N_{13},$$

где число N_{13} определяется входными данными задачи и числом ε .

Третья оценка получается при умножении равенства (16 $_{\varepsilon\lambda}$) на функцию $w_{\tau\tau}$, интегрирования полученного равенства по цилиндру Q_t с учетом первых двух оценок.

$$\int_0^t \int_{\Omega} w_{\tau\tau}^2 dx d\tau \leq N_{14},$$

постоянная N_{14} определяется входными данными задачи и числом ε .

Исходя из трех априорных оценок, мы приходим к финальной оценке в случае, когда ε является фиксированной величиной

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w^2(x, t) dx + \int_{\Omega} w_t^2(x, t) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, t) dx + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, t) dx + \\ & + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, t) dx + \int_0^t \int_{\Omega} w_{\tau}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} w_{\tau\tau}^2 dx d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} \Delta w_{\tau}^2 dx d\tau \leq N, \end{aligned} \quad (28)$$

где постоянная N определяется входными данными задачи и числом ε .

Из данной оценки и следует открытость и замкнутость множества Λ . Как уже говорилось выше, непустота, открытость и замкнутость множества Λ означает его совпадение со всем отрезком $[0, 1]$, а, следовательно, и разрешимость краевой задачи (16 $_{\varepsilon}$), (2), (3), (17) – (19) при фиксированном ε в пространстве V_1 .

На следующем шаге рассмотрим случай, когда ε не является фиксированной величиной. Вновь рассмотрим краевую задачу (16 $_{\varepsilon}$), (2), (3), (17) – (19) и получим в этом случае априорные оценки для ее решений.

Полученная при фиксированном ε первая априорная оценка (23) остается справедливой и в случае, когда ε не является фиксированной величиной.

Для получения второй априорной оценки умножим равенство (16 $_{\varepsilon}$) на функцию Δw_t . Повторив ряд операций, что были произведены в случае, когда ε являлся фиксированной величиной, придем к неравенству (24) с $\lambda = 1$.

Интегрируя по частям в последних двух слагаемых левой части неравенства (24), применяя неравенство Юнга, учитывая условие, налагаемое теоремой на функцию $a(x, t)$, а также первую априорную оценку (23), придем к следующему соотношению

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Delta w^2(x, t) dx + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta w_{\tau})^2 dx d\tau + a_0 \sum_{i,j=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} w_{x_i \tau}^2 dx d\tau \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq - \int_0^t \int_{\Omega} F \Delta w_{\tau} dx d\tau - \int_0^t \int_{\Omega} r(x, \tau) \Delta w_{\tau} dx d\tau + \delta^2 \sum_{i,j=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} w_{x_i \tau}^2 dx d\tau + \\ &+ \max_{\bar{\Omega}} B_2^2(x, 0) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, t_1) dx + 2 \max_{\bar{\Omega}} A_1^2(x, 0) \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, t_1) dx + \\ &+ 2t_2 \max_{\bar{\Omega}} A_3^2(x, 0) \sum_{i,j=1}^n \int_0^{t_2} \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2 dx d\tau + 2 \max_{\bar{\Omega}} A_4^2(x, 0) \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, t_2) dx + C_1, \end{aligned}$$

где число C_1 определяется входными данными задачи и не зависит от ε .

Интегрируя по частям в первом слагаемом правой части последнего неравенства, а также в каждом из слагаемых функции $r(x, t)$, используя условие (19), неравенство Юнга, оценку (23), а также условия на функцию $F(x, t)$, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, t) dx + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta w_{\tau})^2 dx d\tau + a_1 \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} w_{x_i \tau}^2 dx d\tau \leq \\ &\leq \left(\max_{\bar{\Omega}} B_2^2(x, 0) + \frac{\delta_1^2 T}{2} \right) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, t_1) dx + 2 \max_{\bar{\Omega}} A_1^2(x, 0) \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, t_1) dx + \\ &+ 2t_2 \max_{\bar{\Omega}} A_3^2(x, 0) \sum_{i,j=1}^n \int_0^{t_2} \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2 dx d\tau + 2 \max_{\bar{\Omega}} A_4^2(x, 0) \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, t_2) dx + C_2, \quad (29) \end{aligned}$$

где $a_1 = a_0 - \frac{1}{2\delta_1^2} \max_{\bar{Q}} A_{2tt}^2(x, t) - 7\delta^2$, постоянная C_2 определяется входными данными задачи и не зависит от ε .

Положив в одном из следствий неравенства (29) $t = t_1$, учитывая условие (12) теоремы, получим

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, t) dx + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, t) dx + 2\varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta w_{\tau})^2 dx d\tau + 2a_1 \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} w_{x_i \tau}^2 dx d\tau \leq \\ &\leq c_1(x) t_2 \sum_{i,j=1}^n \int_0^{t_2} \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2 dx d\tau + c_2(x) \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, t_2) dx + C_3, \quad (30) \end{aligned}$$

где число C_3 определяется входными данными задачи и не зависит от ε .

От неравенства (30) нетрудно прийти к соотношению

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, t) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, t) dx + 2\varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta w_{\tau})^2 dx d\tau + \\ &+ 2a_1 \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} w_{x_i \tau}^2 dx d\tau \leq c_3(x) \sum_{i,j=1}^n \int_0^{t_2} \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2 dx d\tau + C_4, \quad (31) \end{aligned}$$

постоянная C_4 определяется входными данными задачи и не зависит от ε .

Проинтегрировав одно из следствий последнего неравенства по переменной τ от 0 до t , положив в полученном выражении $t = t_2$, в силу (15) из неравенства (31) получим вторую равномерную по ε априорную оценку.

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, t) dx + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, t) dx + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta w_{\tau})^2 dx d\tau + \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} w_{x_i \tau}^2 dx d\tau \leq C_5,$$

постоянная C_5 определяется входными данными задачи и не зависит от ε .

Третья априорная оценка имеет тот же вид, что и в случае фиксированного ε и является очевидным следствием первых двух оценок.

Исходя из трех априорных оценок, приходим к финальной оценке вида (28), в которой правая часть определяется лишь входными данными задачи и не зависит от ε .

Эта оценка и дает нам разрешимость задачи (16 $_{\varepsilon}$), (2), (3), (17) – (19) в пространстве V_0 . Найденная функция $u(x, t) = u^{\varepsilon}(x, t)$ является решением уравнения (16 $_{\varepsilon\lambda}$) с $\lambda = 1$.

Учитывая, что $w^{\varepsilon} = u_{tt}^{\varepsilon}$, исходя из финальной оценки, имеем

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{ttt x_i}^{\varepsilon 2}(x, t) dx \leq K.$$

При $t = t_i$ справедливы оценки $\|u_{ttt}^{\varepsilon}(x, t_i)\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C, i = 1, 2$.

Подпоследовательности $\{u_{ttt}^{\varepsilon}(x, t_1)\}, \{u_{ttt}^{\varepsilon}(x, t_2)\}$ равномерно ограничены в $W_2^1(\Omega)$. Тогда существует функция $u(x, t)$ такая, что при $m \rightarrow \infty$ имеют место следующие сходимости: $u_{ttt}^m(x, t_i) \rightarrow u_{ttt}(x, t_i), i = 1, 2$ сильно в $L_2(\Omega)$, $u_{ttt}^m(x, t) \rightarrow u_{ttt}(x, t), u_{ttt}^m(x, t) \rightarrow u_{ttt}(x, t), u_{tt}^m(x, t) \rightarrow u_{tt}(x, t), \Delta u_{tt}^m(x, t) \rightarrow \Delta u_{tt}(x, t), \sqrt{\varepsilon_m} \Delta u_{ttt}^m(x, t) \rightarrow 0$ при $\varepsilon_m \rightarrow 0$ слабо в $L_2(Q)$.

Из указанных сходимостей следует, что для предельной функции выполняется уравнение (16). Таким образом, найденная функция является решением краевой задачи (16), (2), (3), (17) – (19).

Проинтегрировав уравнение (16) по переменной τ от 0 до t , учитывая условия (2), (3), (17) (18), а также вид функций $B_i(x, 0), \gamma_1(x), \gamma_2(x)$ и $g_2(x)$ придем к равенству

$$u_{ttt}(x, t) - \Delta u_t(x, t) + a(x, t)u_{tt}(x, t) + a_t(x, t)u_t(x, t) + b(x, t)u_t(x, t) + b_t(x, t)u(x, t) = f_{1t}(x, t) + A_{3t}(x, t)u_1(x) + u_{tt}(x, t_1)A_{1t}(x, t) + u_{ttt}(x, t_1)A_{2t}(x, t) + A_{3t}(x, t) \int_0^{t_2} u_{\tau\tau} d\tau + A_{4t}(x, t)u_{tt}(x, t_2).$$

Вновь проинтегрировав полученное равенство по переменной τ от 0 до t , применяя условия (2), (3), (17), условия, налагаемые теоремой на функцию $A_2(x, 0)$, а также вид функций $\gamma_1(x), g_1(x), f_1(x, t)$ и $A_i(x, t)$, придем к равенству

$$u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) + a(x, t)u_t(x, t) + b(x, t)u(x, t) = f(x, t) + \sum_{i=1}^3 h_i(x, t) (\alpha_0^i(x) + \alpha_1^i(x)u_{tt}(x, t_1) + \alpha_2^i(x)u_{ttt}(x, t_1) + \alpha_3^i(x)u_t(x, t_2) + \alpha_4^i(x)u_{tt}(x, t_2)).$$

Положив функции $q_i(x)$ равными $a_i(x)$ согласно (9), придем к уравнению (1). Таким образом, найденная нами функция $u(x, t)$ будет являться решением уравнения (1). Выполнимость условий (5) – (7) показывается аналогично. Условие (19) краевой задачи, а также условия, налагаемые на функции $u_0(x), u_1(x)$ влекут выполнимость условия (4).

Таким образом, найденные нами функции $u(x, t), q_1(x), q_2(x), q_3(x)$ – есть решение первоначальной обратной задачи (1) – (7) из требуемых классов. \square

Литература

1. Романов, В. Г. Обратные задачи математической физики / В. Г. Романов. – М.: Наука, 1984.
2. Prilepko, A. I. Methods Solving Inverse Problems in Mathematical Phisic / A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin. – N. Y.: Marcel Deccer., 2000.
3. Anikonov, Yu. E. Multidimensional Inverse and I'll-Posed Problems for Differential equations / Yu. E. Anikonov – Utrecht: The Netherlands VSP BV, 1995.
4. Anikonov, Yu. E. Inverse and I'll-Posed Sources Problems / Yu. E. Anikonov – Utrecht: The Netherlands VSP BV, 1997.
5. Kabanikhin, S. I. Identification Problems of wave Phenomena – theory and numerics / S. I. Kabanikhin, A. Lorenzi – Utrecht: The Netherlands VSP BV, 2000.
6. Savateev, E. G. Well-posedness and reduction of an inverse problem for a hyperbolic equation / E. G. Savateev // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. – 1994. – V. 2, № 2. – P. 165 – 180.
7. Бубнов, В. А. О корректных краевых и обратных задачах для некоторых классов эволюционных уравнений: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / В. А. Бубнов. – Новосибирск, 1989. – 287 с.
8. Искендеров, А. Д. Некоторые обратные задачи об определении правых частей дифференциальных уравнений / А. Д. Искендеров // Изв. АН АзССР, Сер. физ-техн. и мат. наук. – 1976. – № 2. – С. 58 – 63.
9. Амиров, А. Х. К вопросу о разрешимости обратных задач / А. Х. Амиров // Докл. АН СССР. – 1986. – Т. 290, № 2. – С. 268 – 270.
10. Амиров, А. Х. К вопросу о разрешимости обратных задач / А. Х. Амиров // СМЖ. – 1987. – Т. 28, № 6. – С. 3 – 12.
11. Кожанов, А. И. Задача определения решения и правой части специального вида в параболическом уравнении / А. И. Кожанов // Обратные задачи и информационные технологии / Югорский НИИ инф. технологий. – 2002. – Т. 1, № 3. – С. 13 – 41.
12. Сафиуллова, Р. Р. Некоторые задачи для одного класса уравнений составного типа / Р. Р. Сафиуллова // Мат. заметки ЯГУ. – 2004. – Т. 11, № 2. – С. 58 – 63.
13. Kozhanov, A. I. Composite Type equations and Inverse Problems / A. I. Kozhanov – Utrecht: The Netherlands VSP BV, 1999.

Кафедра алгебры и геометрии,
Стерлитамакская государственная педагогическая академия
regina-saf@yandex.ru

Поступила в редакцию 23 марта 2009 г.

ОЦЕНКА НЕСУЩЕЙ ЧАСТОТЫ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИМПУЛЬСОВ МЕТОДОМ ПРОНИ

А. Л. Шестаков, А. С. Семенов, О. Л. Ибряева

CARRIER FREQUENCY ESTIMATION FOR RANDOM PULSE TRAIN USING PRONY'S METHOD

A. L. Shestakov, A. S. Semenov, O. L. Ibrayeva

Проводится анализ характеристик одного из алгоритмов оценки параметров синусоидального затухающего сигнала – метода Прони. Анализ проводится методом математического моделирования в предположении отсутствия априорной информации о времени начала сигнала. В качестве параметра, характеризующего работу метода, используется дисперсия оценки несущей частоты.

Ключевые слова: сегментированный метод Прони, оценка частоты, затухающая синусоида

This paper presents an analysis by means of mathematical model approach for system response to the random pulse train using the segmented Prony's method. The system response is the damped sinusoids sequence, and sinusoids can be partially overlapped. The observational interval is segmented in short segments, and Prony's method is applied to each of them. To characterize the method performance the carrier frequency variance estimate is used.

Keywords: segmented Prony's method, frequency estimation, damped sinusoid

Введение

Задача оценки параметров комплексного экспоненциального сигнала является одной из самых распространенных в различных областях техники. Это связано с тем, что отклик линейной системы на импульсное воздействие является суммой именно таких сигналов, т.е. оценив параметры сигналов на выходе системы, можно решить задачу идентификации системы и ее состояния. Попытка использования в этих целях преобразования Фурье дает не очень хорошие результаты, так как оно предназначено для оценки спектра сигнала, а не частоты и, кроме того, в классическом варианте не является статистически устойчивым. Метод Прони изначально был предназначен для оценки параметров линейной комбинации экспоненциальных функций [1], что позволяет сделать предположение о возможности его применения для диагностики линейных систем. Одним из допущений при разработке алгоритма обработки сигналов по методу Прони является предположение о точно известном времени начала сигнала, в связи с чем и при анализе этого метода делается такое же допущение [2]. В то же время, в случае действия на входе линейной системы случайного потока импульсных сигналов типа δ -функции, это предположение нельзя считать верным. Таким образом, возникает задача модификации метода Прони для потока импульсов в виде комбинации комплексных экспонент, возникающих в случайные моменты времени, и оценки его характеристик для этих условий.

1. Модель сигнала

Входным возбуждающим воздействием в рассматриваемой модели является последовательность δ -импульсов, возникающих в случайные моменты времени $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s, \dots, \tau_M$. Под действием каждого из δ -импульсов в системе возникает затухающее колебание с частотой $\omega = 2\pi f$ и коэффициентом затухания α . Для простоты в данной работе мы ограничимся случаем одной собственной частоты датчика, т.е. считаем, что система представляет собой резонансный контур с собственной частотой f .

Амплитуда колебания $A_s = A(\tau_s)$ является нормальной случайной величиной с математическим ожиданием равным нулю и среднеквадратичным отклонением σ . Величина A_s и есть «высота» δ -импульса, т.е. входное воздействие $u(t)$ имеет вид: $u(t) = \sum_{s=1}^M A_s \delta(t - \tau_s)$. Выходной сигнал представляет собой последовательность затухающих синусоид, возникающих в моменты времени τ_s :

$$S(t) = \sum_{s=1}^M A_s \cdot V(t - \tau_s) e^{(\alpha + i2\pi f)(t - \tau_s) + \varphi(\tau_s)}, \quad (1)$$

где $V(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$ Фаза $\varphi(\tau_s)$ – равномерная случайная величина на $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Пример входного потока импульсов и соответствующего ему выходного сигнала приведен на рис. 1. (В этом и последующих примерах статьи мы брали частоту дискретизации равной 250 кГц, собственную частоту $f = 32$ кГц, коэффициент затухания $\alpha = -20$ кГц и $\sigma = 0,5$.) Заметим, что синусоиды могут «наползать» друг на друга.

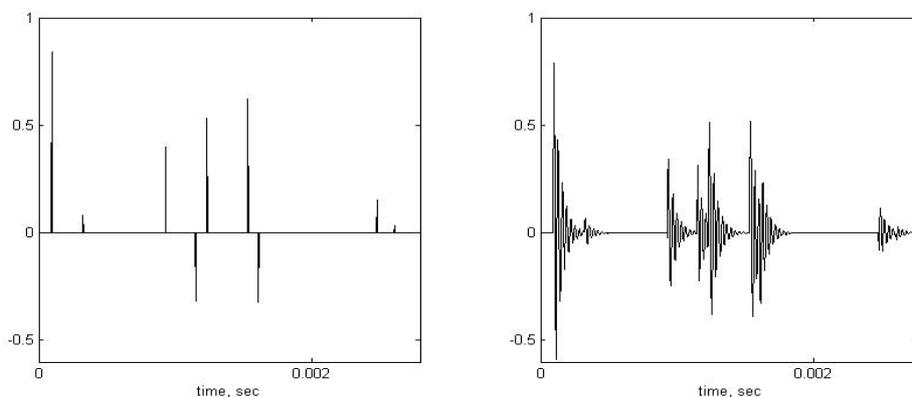


Рис. 1. Входное воздействие и выходной сигнал

В общем случае, к выходному сигналу должен быть добавлен шум, который считаем белым, нормально распределенным $N(0, \sigma_1)$. Отношение сигнал/шум (SNR) для данной модели сигнала будем вычислять по формуле:

$$\text{SNR} = 10 \lg \frac{\frac{1}{M} \sum_{s=1}^M \frac{1}{N} \sum_{k=n_s}^{n_s+N} y_k^2}{\sigma_1^2}.$$

Здесь M – число δ -импульсов на рассматриваемом временном отрезке сигнала, N – число отсчетов, за которое синусоида затухает до уровня 5% от энергии в момент возникновения импульса, n_s – номер отсчета, соответствующий времени τ_s , y_k – значения выходного сигнала в отсутствии шума.

Пример зашумленного сигнала для SNR=10 дБ приведен на рис. 2. Там же в увеличенном масштабе показан вид отклика на один импульс.

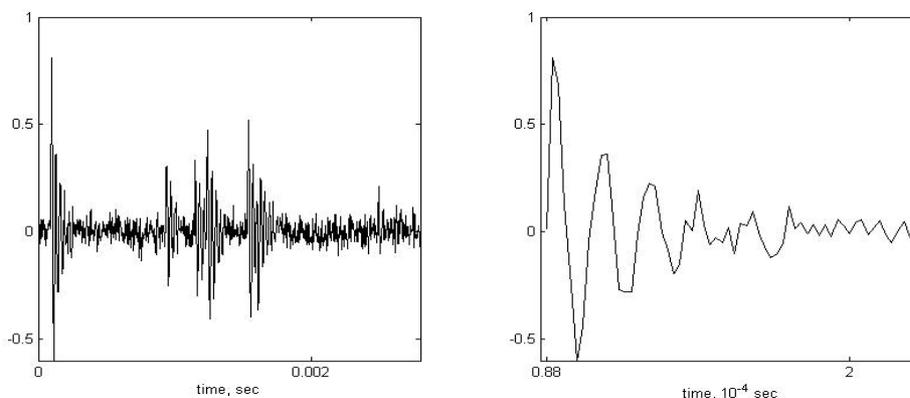


Рис. 2. Зашумленный сигнал с SNR=10 дБ

2. Предварительные замечания

Метод Прони обычно используется для сигналов, подобных приведенному на рис. 2. С точки зрения теории оценки параметров это означает, что задача обнаружения решена, и начало сигнала известно точно, т.е. требуется оценить только амплитуду A сигнала, постоянную затухания α , частоту ω и фазу φ . В случае нескольких синусоид, помимо параметров каждой, дополнительно требуется оценить и их число. Для практики обычно наибольший интерес представляют частота и постоянная затухания. Именно в такой постановке исследуется метод Прони в [2, 3].

Желание использовать метод Прони для представленного на рис. 2 сигнала (1) с шумом, приводит нас к следующим вопросам:

- какой длительности необходимо выбирать окно обработки,
- как устанавливать окно обработки (как определить начало импульса),
- что происходит, если начало окна обработки не совпадает с началом импульса,
- как работает алгоритм, если импульсы перекрываются.

Таким образом, при сигнале вида (1) мы сталкиваемся не только с задачей оценки параметров, но и с задачами обнаружения и различения сигналов.

Исходя из общих принципов обработки сигнала, можно предложить следующую модификацию метода Прони. Длительность окна обработки принимается примерно равной отрезку времени, в котором сосредоточено 90 – 95 % отдельного импульса, при условии, что начало окна обработки совпадает с началом импульса. Изначально окно обработки устанавливается в точку начала наблюдения сигнала. В этом положении проводится стандартная процедура метода Прони. При условии обнаружения сигнала проводится оценка его параметров, и окно обработки сдвигается на один отсчет, после чего процедура обработки методом Прони повторяется. Полученный массив данных затем обрабатывается с целью повышения качества оценки параметров.

Такой способ обработки носит название сегментированного метода Прони и используется, например, в [4]. Впервые же термин «сегментированный метод Прони» был, насколько нам известно, применен в [5]. Длина сегментов в этой работе не была, вообще говоря, одинаковой, кроме того, сдвиг осуществлялся на длину целого сегмента, с переходом к следующему. Важно отметить, что модельный сигнал (1) отличается от нестационарных сигналов,

рассматриваемых в работах [4, 5]. В указанных работах нестационарность определяется изменением частоты на интервале наблюдения. Напротив, в рассматриваемом случае частота на исследуемом отрезке постоянна, но сам полезный сигнал присутствует не всегда.

3. Применение сегментированного метода Прони для оценки параметров потока экспоненциально затухающих синусоид

Как уже отмечалось, мы будем использовать модификацию метода Прони, состоящую в том, чтобы обрабатывать последовательно отрезки сигнала длины $N \ll L$ ($L = 100\,000$ – число отсчетов всего сигнала), сдвигаясь на единицу. Для анализа составляющих сегментов будем использовать совместно сингулярные методы Прони вперед и назад [1]. Выделим несколько основных этапов.

Сначала по N отсчетам сигнала определяются параметры линейного предсказания вперед и назад. Затем из них формируются характеристические полиномы вперед $A(z)$ и назад $B(z)$, обладающие следующим свойством: корни полиномов $A(z)$, $B(z)$ есть соответственно:

$$z_k^a = e^{(\alpha_k + i2\pi f_k)T}, \quad z_k^b = e^{(-\alpha_k + i2\pi f_k)T}. \quad (2)$$

(Здесь $1 \leq k \leq p$, p – число комплексных экспонент, присутствующих в сигнале, α_k , f_k – коэффициент затухания и частота k -й экспоненты, T – период дискретизации сигнала.) Наконец, зная корни полиномов, можно найти частоты f_k .

Хорошо известно (см., например, [1]), что улучшению результатов способствует завышение числа истинных экспонент, присутствующих в сигнале. В этом случае, при анализе нулей обоих полиномов $A(z)$ и $B(z)$, возможно их разделение на истинные нули сигнала и нули шума. Мы также будем использовать завышенный порядок предсказания для обработки нашего сигнала.

Заметим далее, что, поскольку одна затухающая синусоида с частотой f соответствует двум комплексным экспонентам с частотами f и $-f$, то, ясно, что в этом случае $1/z_k^a$ будут являться корнями многочлена $B(z)$ и, наоборот, $1/z_k^b$ будут корнями $A(z)$. (Конечно, такое равенство корней в данном случае из-за наличия шума будет справедливо лишь приближенно.) Тогда в дальнейшем можно брать, например, корни многочлена $B(z)$, лежащие в верхней полуплоскости и по модулю большие единицы и корни многочлена $A(z)$ из нижней полуплоскости, по модулю меньшие единицы. Среди всех этих корней мы будем искать обратные друг к другу.

Здесь важно отметить серьезную трудность, которая возникает при разработке программного алгоритма: из-за наличия шума нам не удастся найти такие корни, что $\left| z_k^b - \frac{1}{z_l^a} \right| = 0$, и данное равенство будет справедливо лишь приближенно. Будем поэтому считать корни z_k^b , z_l^a обратными друг к другу, и не удовлетворяющими точному соотношению выше только по причине шума, если

$$\left| z_k^b - \frac{1}{z_l^a} \right| < \varepsilon, \quad (3)$$

где $\varepsilon > 0$ – параметр, значение которого мы задаем сами.

На рис. 3 построены корни многочлена $B(z)$ (из верхней полуплоскости, большие по модулю единицы) и корни многочлена $A(z)$ (из нижней полуплоскости, меньшие по модулю единицы), которые были получены при обработке 100 000 отсчетов модельного сигнала с SNR=10 дБ сегментированным методом Прони. Для обработки каждого сегмента длиной $N = 50$ отсчетов был использован завышенный порядок предсказания $p = 12$ (вместо истин-

ного порядка, равного двум). На правой половине рис. 3 показаны только те корни, которые удовлетворяют неравенству (3) при $\varepsilon = 0,01$. Они группируются возле положений истинных нулей сигнала. Именно по таким корням, используя соотношения (2), мы находим частоту сигнала. Учитывая, что на основе неравенства (3) определяется наличие сигнала, можно назвать параметр ε радиусом зоны обнаружения (РЗО) сигнала.

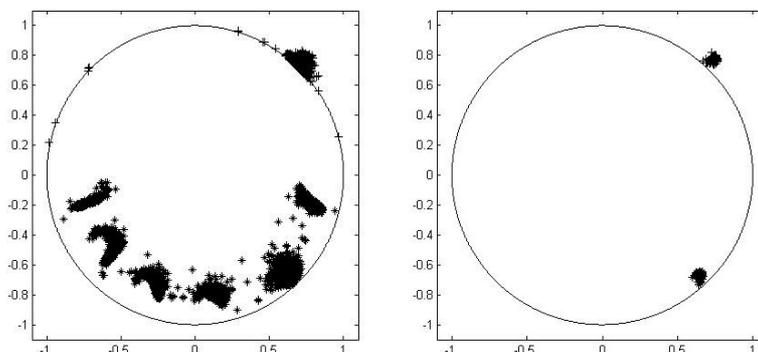


Рис. 3. Корни полиномов линейного предсказания

Для определения оптимального значения ε построим на рис. 4 график зависимости среднеквадратического отклонения σ оценки частоты от параметра ε для одного и того же сигнала с разным аддитивным шумом.

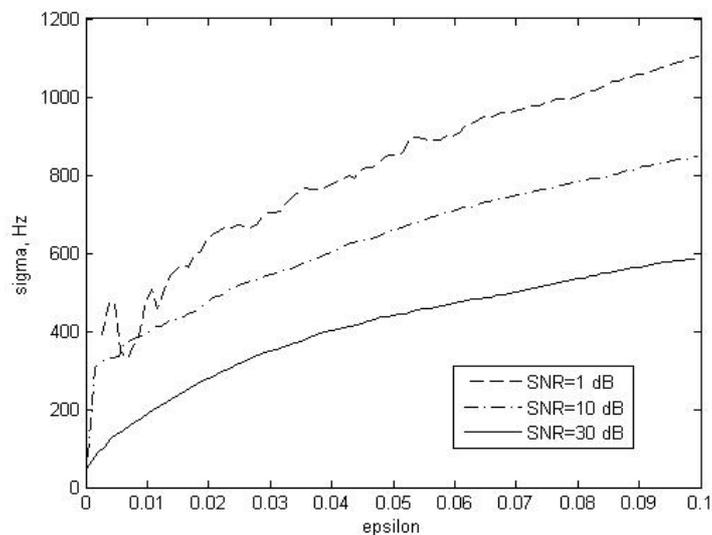


Рис. 4. Зависимость среднеквадратического отклонения от РЗО

Ясно, что с одной стороны, меньшее значение ε дает более точную оценку частоты. Однако, выбирая малые значения ε , мы возможно не получим никакой (даже «плохой») оценки частоты, так как не найдется ни одной пары столь близких корней. Кроме того, при малых значениях ε и плохом соотношении сигнал/шум, может происходить случайное попадание отдельных измерений в РЗО, что приведет к аномальным выбросам оценок. Поэтому ε не может быть выбрано слишком малым.

Исходя из приведенных соображений, примем далее $\varepsilon=0,01$, т.к. при этом значении заканчиваются осцилляции СКО на рис. 4 при $\text{SNR}=1$ дБ, которые могут явиться признаком наличия аномальных оценок. При данном ε обрабатываем сегментированным методом Прони 100 000 отсчетов нашего модельного сигнала, сдвигаясь каждый раз на один отсчет и применяя сингулярные методы Прони вперед и назад с порядком предсказания $p = 12$ для обработки составляющих сегментов длиной $N = 50$ отсчетов. В результате мы обнаружим целый набор найденных частот сигнала. (Разумеется, частоты найдутся не на всех сегментах.)

С помощью полученного набора частот построим гистограмму на рис. 5. Здесь по оси абсцисс отложены значения частот от 0 до 125 кГц (половина частоты дискретизации), а по оси ординат число появлений данной частоты. Таким образом, как и в случае спектра Фурье, этот рисунок показывает вклад каждой из частот в обработанный сигнал. Мы будем называть поэтому такую гистограмму **спектром Прони**. Заметим, что в [1] принято другое определение спектра Прони. Оно не подходит нам, поскольку рассматриваемый сигнал не укладывается в рамки допущений относительно вида колебаний, сделанных в [1]. По этой же причине в статье [5] для сигнала, частота которого может резко меняться со временем, используется иной способ вычисления спектра Прони. Нам в этой статье будет удобно вычислять спектр Прони, как описано выше.

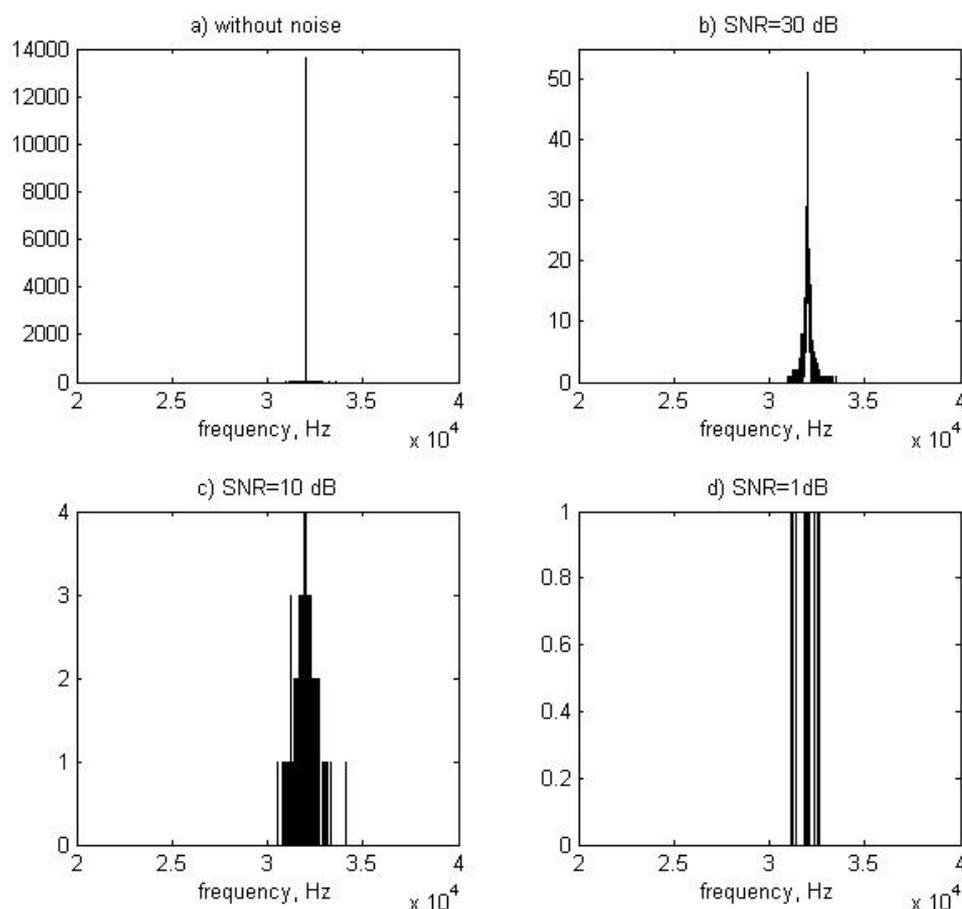


Рис. 5. Спектр Прони

На рис. 6 построена зависимость среднеквадратического отклонения σ оценки частоты от соотношения сигнал/шум.

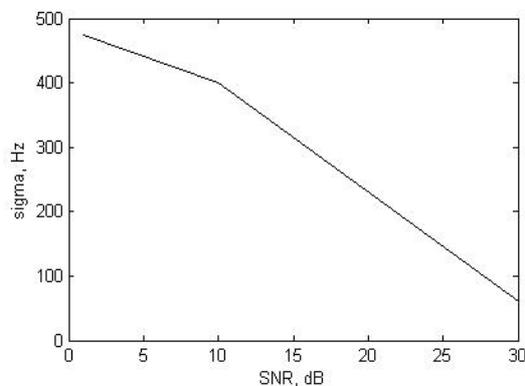


Рис. 6. Зависимость среднеквадратического отклонения σ оценки частоты от соотношения сигнал/шум

На рис. 7 приведена зависимость отклонения $\delta = |\bar{f} - f|$ мат. ожидания частоты \bar{f} (от истинного значения $f = 32\,000$ Гц) от соотношения сигнал/шум.

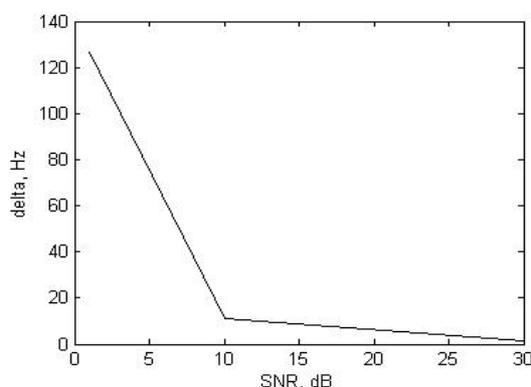


Рис. 7. Зависимость отклонения мат. ожидания частоты (от истинного значения) от соотношения сигнал/шум

4. Применение преобразования Фурье для оценки параметров потока экспоненциально затухающих синусоид

Для анализа перспектив использования метода Прони в задаче оценки параметров экспоненциального сигнала, рассмотрим характеристики преобразования Фурье при обработке сигнала (1), описанного выше. Чтобы повысить достоверность сравнения методов Прони и Фурье, необходимо максимально совместить условия обработки.

С этой целью метод Фурье реализуется в виде модификации Уэлча с окном обработки $N = 50$ отсчетов и смещением окна обработки на один отсчет, что аналогично параметрам сегментированного метода Прони, рассматриваемого ранее.

Для оценки влияния размеров окна на характеристики преобразования Фурье все расчеты были проведены также для размеров окна $N = 1000$. На рис. 8 показан спектр чистого сигнала и сигнала с $\text{SNR}=1$ дБ для значений $N = 50, 1000$.

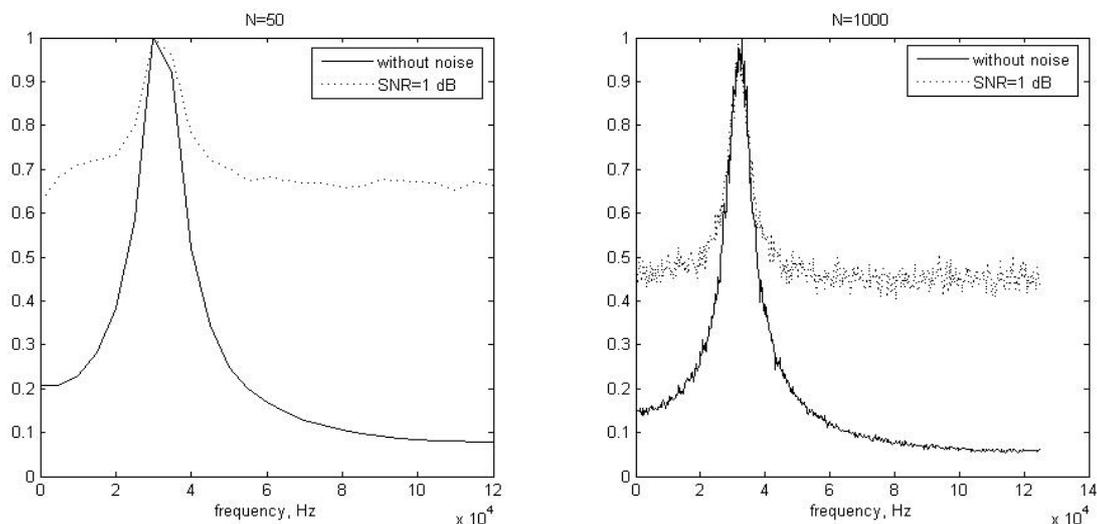


Рис. 8. Спектр чистого модельного сигнала и сигнала с $\text{SNR}=1$ дБ, полученный методом Уэлча для окна размеров $N = 50, 1000$

После получения спектра на каждом окне обработки найдем частоту, имеющую наибольшую мощность и повторим эту операцию при каждом смещении окна. Тогда можно построить гистограмму, аналогичную приведенным на рис. 5 и показанную на рис. 9 ($N = 50$) и рис. 10 ($N = 1000$).

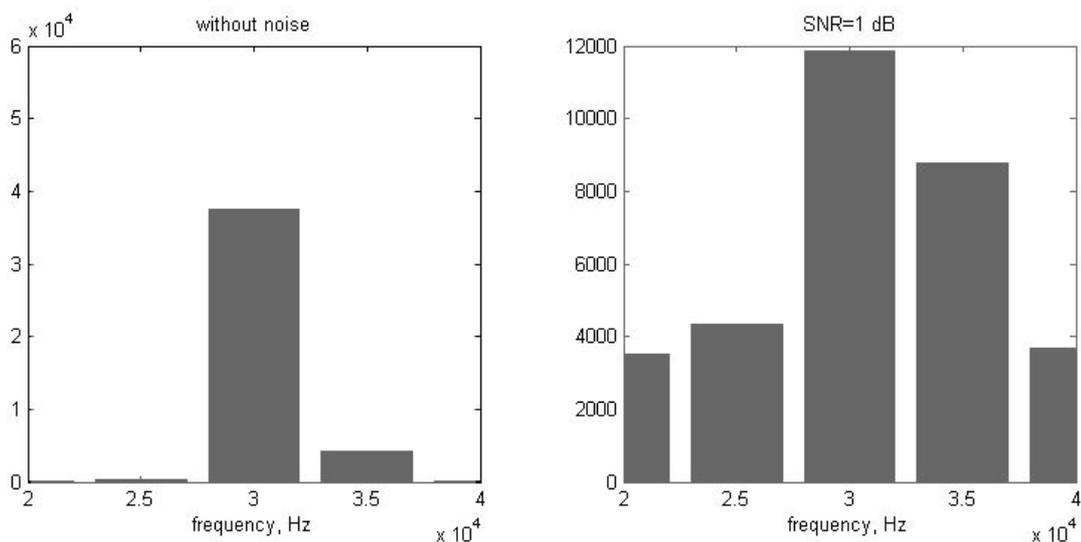


Рис. 9. Гистограмма частот для случая $N = 50$

Эти гистограммы позволяют вычислить необходимые статистические характеристики метода. Результаты расчета при различных значениях шума приведены на рис. 11 (зависимость среднеквадратического отклонения от SNR) и рис. 12 (зависимость отклонения от мат. ожидания от SNR).

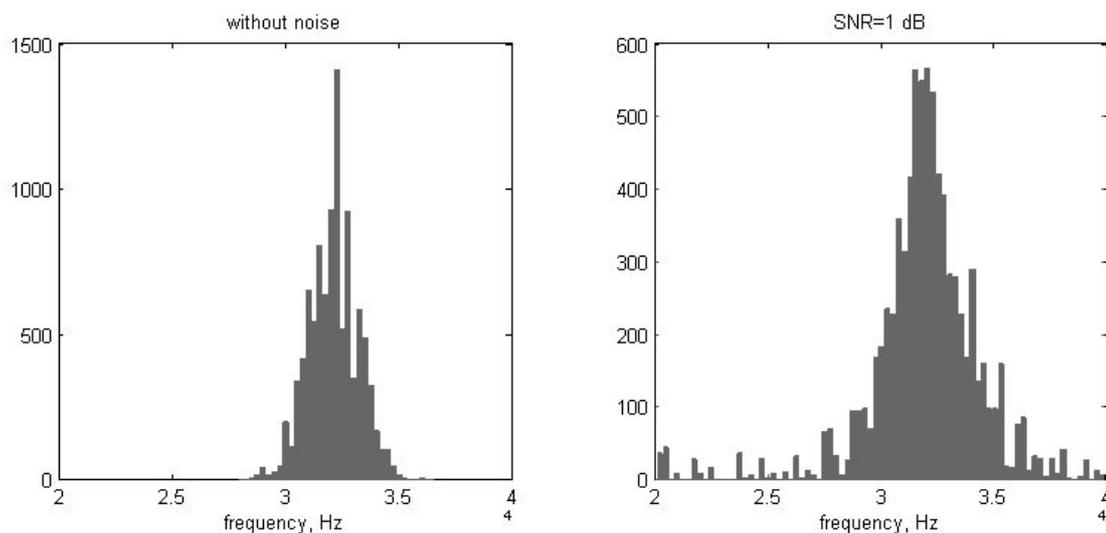


Рис. 10. Гистограмма частот для случая $N = 1000$

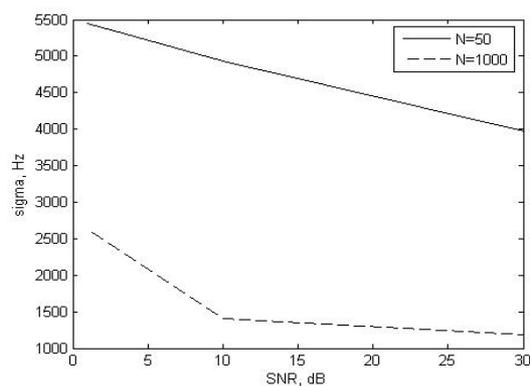


Рис. 11. Зависимость среднеквадратического отклонения частоты от соотношения сигнал/шум

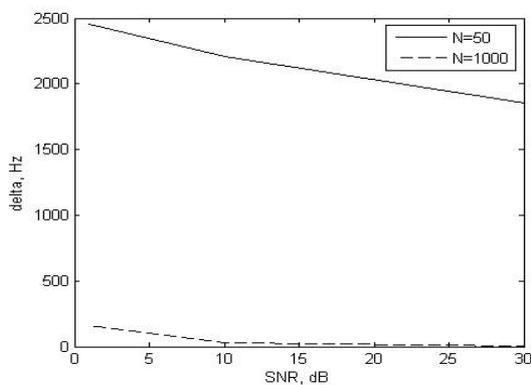


Рис. 12. Зависимость отклонения мат. ожидания частоты (от истинного значения) от соотношения сигнал/шум

Заключение

В данной работе предложена модификация метода Прони для потока импульсов в виде комбинации комплексных экспонент, возникающих в случайные моменты времени. Основываясь на проведенных исследованиях, можно сделать следующие выводы:

1. Модифицированный метод Прони позволяет достигнуть погрешности оценки частоты 1 % уже при соотношении сигнал/шум около 15 дБ и 50 отсчетов окна наблюдения. Заметим, что преобразование Фурье не позволяет добиться такого результата даже при соотношении сигнал/шум 30 дБ и 1000 отсчетов окна наблюдения. Таким образом, метод Прони имеет большие перспективы при решении задачи оценки частоты экспоненциально затухающего сигнала и, в частности, может быть использован для оценки состояния линейных систем.

2. В данной статье впервые введено понятие радиуса зоны обнаружения сигнала. Для практического использования можно рекомендовать значение параметра РЗО около 0,01 независимо от соотношения сигнал/шум и иных параметров сигнала.

3. В целях разработки рекомендаций для решения практических задач в дальнейших работах необходимо рассмотреть ряд вопросов, имеющих существенное влияние на характеристики метода, а именно: 1) оценить возможность работы метода при многочастотных импульсах; 2) рассмотреть влияние перекрытия импульсов на характеристики метода; 3) исследовать влияние отношения длительности окна к длительности импульса на точность метода; 4) рассмотреть параметры оценки постоянной затухания; 5) оценить возможность обработки массива отсчетов, полученных при сегментарной обработке, для повышения точности метода.

Работа выполнялась в рамках госконтракта НК-166П на поисковую научно-исследовательскую работу «Разработка и исследование методов оценки состояния преобразователя давления в ходе технологического процесса».

Литература

1. Марпл-мл., С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: пер. с англ. / С. Л. Марпл-мл. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
2. Кузнецов, Ю. В. Сравнительная характеристика алгоритмов оценки параметров резонансной модели объектов / Ю. В. Кузнецов, В. Ю. Щекатуров, А. Б. Баев // Вестн. МАИ. – 1997. – Т. 4, №2. – С. 70 – 76.
3. Кузнецов, Ю. В. Использование метода Прони и его модификаций при оценке параметров резонансной модели / Ю. В. Кузнецов, А. Б. Баев // Будущее авиации и космонавтики: сб. тез. ст. науч.-исслед. работ студентов. – М.: Изд-во МАИ, 1998. – С. 46 – 49.
4. Кухаренко, Б. Г. Технология спектрального анализа на основе быстрого преобразования Прони / Б. Г. Кухаренко // Информ. технологии. – 2008. – №4. – С. 38 – 42.
5. Barone, P. The segmented Prony method for the analysis of non-stationary time series / P. Barone, E. Massaro, A. Polichetti // Astron. Astrophys. – 1989. – V. 209. – P. 435 – 444.

Кафедра информационно-измерительной техники,
Южно-Уральский государственный университет
oli80@mail.ru

Поступила в редакцию 10 сентября 2009 г.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО НЕКЛАССИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А. С. Шипилов

ON STABILITY OF SOLUTIONS FOR A NONCLASSICAL EQUATIONS

A. S. Shipilov

Для уравнения $\lambda u_t - u_{txx} = \nu u_{xx} - u_x u$ доказано существование конечномерного неустойчивого и бесконечномерного устойчивого инвариантных многообразий.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, неустойчивое и устойчивое инвариантные многообразия

One proved the existence of finite dimensional stable manifold and infinite dimensional unstable manifold for the equation $\lambda u_t - u_{txx} = \nu u_{xx} - u_x u$.

Keywords: Sobolev type equations, unstable and stable invariant manifolds

Уравнение

$$\lambda u_t - u_{txx} = \nu u_{xx} - u_x u \quad (1)$$

является одномерным аналогом системы Осколкова, а также гибридом уравнений Бенджамина – Бона – Махони и Бюргерса. В [1] показано, что фазовое пространство задачи Дирихле

$$u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \quad (2)$$

для уравнения (1) есть объединение двух непересекающихся связных компонент. Результат получен в рамках общей теории полулинейных уравнений соболевского типа вида

$$L\dot{u} = Mu + N(u). \quad (3)$$

В [2] теорема Адамара – Перрона о существовании устойчивого и неустойчивого многообразий в окрестности начала координат распространена на уравнение (3) при следующих условиях.

(A1) Оператор $M(L, p)$ -ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ (т.е. оператор $M(L, \sigma)$ -ограничен, и ∞ – устранимая особая точка ($p = 0$) либо полюс порядка $p \in \mathbb{N}$ L -резольвенты оператора M . Терминология формализована в [3]).

(A2) L -спектр оператора M $\sigma^L(M) = \sigma_e^L(M) \cup \sigma_r^L(M) \neq \emptyset$, где $\sigma_e^L(M) = \{\mu \in \sigma^L(M) : \operatorname{Re} \mu < 0 \text{ (} \operatorname{Re} \mu > 0)\}$.

(A3) Оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $N(0) = 0$, $N'_0 = \mathbb{O}$, где \mathfrak{U} и \mathfrak{F} – банаховы пространства, N'_u – производная Фреше оператора M в точке $u \in \mathfrak{U}$.

(A4) Фазовым пространством уравнения (3) служит простое банахово C^∞ -многообразие. (Напомним [1], что банахово C^r -многообразиие, $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, называется простым, если любой его атлас эквивалентен атласу, содержащему единственную карту).

Цель настоящей работы – снять требование простоты многообразия в (A4), чтобы можно было доказать существование устойчивого и неустойчивого инвариантных многообразий задачи (1), (2).

1. Теорема Адамара – Перрона

Пусть \mathfrak{U} и \mathfrak{F} – банаховы пространства; операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (т.е. линейен и непрерывен), $M \in Cl(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (т.е. линейен, замкнут и плотно определен), $N \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Пусть выполнены условия (A1), (A2), тогда [3, гл. 4 и гл. 5] существует расщепление фазового пространства \mathfrak{U}^1 уравнения $Li = Mu$ в прямую сумму $\mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}^s \oplus \mathfrak{U}^u$ экспоненциально устойчивого и неустойчивого инвариантных пространств этого уравнения. Пусть выполнено следующее условие.

(A5) Фазовое пространство \mathfrak{M} уравнения (3) таково, что $\mathfrak{M} \ni 0$, и существует окрестность $\mathfrak{D}_0 \subset \mathfrak{M}$, C^∞ -диффеоморфно проектирующаяся вдоль \mathfrak{U}^0 на окрестность $\mathfrak{D}_0^1 \subset \mathfrak{U}^1$.

Определение 1. Множество $\mathfrak{M}^s = \{u_0 = \mathfrak{D}_0 : \|P_s u_0\| \leq R_1, \|u(t, u_0)\| \leq R_2, t \in \mathbb{R}_+\}$ ($\mathfrak{M}^u = \{u_0 \in \mathfrak{D}_0 : \|P_u u_0\| \leq R_1, \|u(t, u_0)\| \leq R_2, t \in \mathbb{R}_-\}$) такое, что

(i) $\mathfrak{M}^{s(u)}$ C^∞ -диффеоморфно замкнутому шару в $\mathfrak{U}^{s(u)}$ с центром в начале координат радиуса R_1 ;

(ii) $\mathfrak{M}^{s(u)}$ касается $\mathfrak{U}^{s(u)}$ в начале координат;

(iii) при любом $u_0 \in \mathfrak{M}^{s(u)}$ $\|u(t, u_0)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$)

называется *устойчивым (неустойчивым) инвариантным многообразием* уравнения (32).

Здесь через $P_{s(u)}$ обозначен проектор вдоль $\mathfrak{U}^{u(s)} \oplus \mathfrak{U}^0$ на $\mathfrak{U}^{s(u)}$; через $u(t, u_0)$ обозначено решение задачи Коши $u(0) = u_0$ для уравнения (3). Существование и единственность такого решения (*квазистационарной траектории* [4]) при $t \in (-\tau, \tau)$ следует из существования фазового пространства (условие (A5)). Заметим еще, что определение 1 имеет менее локальный характер, чем его прототип в [2].

Теорема 1. Пусть выполнены условия (A1) – (A3) и (A5). Тогда существуют устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия уравнения (3). Причем, если для некоторого $u_0 \in \mathfrak{D}_0$ имеет место $\|P_{e(r)} u_0\| \leq R_1$ и $\|u(t, u_0)\| \leq R_2$ при $t \rightarrow +\infty$ или при $t \rightarrow -\infty$, то $u_0 \in \mathfrak{M}^s \cup \mathfrak{M}^u$.

Внимательный анализ доказательства прототипа этой теоремы в [2] показывает, что без потери общности можно заменить (A4) условием (A5). По традиции, восходящей к В.И. Арнольду [5, гл. 3, § 4], утверждения о существовании устойчивого и неустойчивого инвариантных многообразий принято называть *теоремами Адамара – Перрона*. Заметим еще, что непустота устойчивого (неустойчивого) инвариантного многообразия находится в прямой зависимости от непустоты компоненты $\sigma_{e(r)}^L(M)$ L -спектра оператора M , т.е. если $\sigma_{e(r)}^L(M) = \emptyset$, то $\mathfrak{M}^{e(r)} = \{0\}$. Поэтому формулировка теоремы содержит все возможные варианты.

2. Инвариантные многообразия

Следуя [1], редуцируем задачу (1), (2) к уравнению (3). Для этого пространства \mathfrak{U} и \mathfrak{F} положим как в [1]; и формулами

$$\langle Lu, v \rangle = \int_a^b (u_x v_x + \lambda uv) dx,$$

$$\langle Mu, v \rangle = -v \int_a^b u_x v_x dx,$$

$$\langle N(u), v \rangle = - \int_a^b uu_x v dx, \quad u, v \in \mathfrak{U}$$

зададим операторы $L, M, N : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$. Аналогично [1] нетрудно получить следующий результат.

Лемма 1.

(i) При всех $\lambda, \nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, причем оператор $M (L, 0)$ -ограничен.

(ii) Оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.

Итак, в силу (i) леммы 1 условие (A1) выполнено. Далее, поскольку $\langle N'_u v, w \rangle = - \int_a^b (uv)_x w dx$, то условие (A3) тоже выполнено. Теперь пусть $\{\lambda_k\}$ – собственные

значения однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа $\langle \Delta u, v \rangle = - \int_a^b u_x v_x dx$ на интервале (a, b) , занумерованные по убыванию, тогда L -спектр оператора M будет иметь следующий вид:

$$\sigma^L(M) = \left\{ \mu_k = \frac{\nu \lambda_k}{\lambda - \lambda_k} : k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda = \lambda_l\} \right\}.$$

Если взять $\nu \in \mathbb{R}_+$ (что соответствует физическому смыслу), то при любых $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ только конечное множество (возможно, пустое) точек μ_k может оказаться в правой полуплоскости комплексной плоскости, а все остальные точки будут находиться в левой полуплоскости, накапливаясь к точке $-\nu$, причем $\sigma^L(M) \cap \{i\mathbb{R}\} = \emptyset$. Значит, условие (A2) тоже выполнено.

Для проверки условия (A5) построим фазовое пространство задачи (1), (2).

$$\mathfrak{M} = \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{U}, \lambda \notin \{\lambda_k\}, \\ \{u \in \mathfrak{U} : \langle Mu + N(u), \varphi_l \rangle = 0, \lambda = \lambda_l\}. \end{array} \right.$$

Здесь φ_l – нормированный в смысле $L_2(a, b)$ собственный вектор оператора Лапласа, соответствующий λ_l . Если $\lambda \notin \{\lambda_k\}$, то условие (A5) очевидно выполняется. Пусть $\lambda = \lambda_l$, тогда, как показано в [1], фазовое пространство состоит из двух связных компонент, каждая из которых моделируется одним из полупространств $\mathfrak{U}_-^1 = \{v \in \mathfrak{U}^1 : \langle v, (\varphi_l^2)_x \rangle < 4\lambda\nu\}$, $\mathfrak{U}_+^1 = \{v \in \mathfrak{U}^1 : \langle v, (\varphi_l^2)_x \rangle > 4\lambda\nu\}$. При любых $\nu \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ одно из этих полупространств обязательно содержит окрестность нуля, куда диффеоморфно проектируется окрестность нуля одной из компонент фазового пространства. Таким образом, условие (A5) выполнено и при $\lambda = \lambda_l$. Итак, доказана

Теорема 2. При любых $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\nu \in \mathbb{R}_+$ задача (1), (2) имеет не более чем конечномерное неустойчивое и бесконечномерное устойчивое инвариантные многообразия.

Автор искренне признателен Г. А. Свиридюку за постановку задачи и полезные дискуссии.

Литература

1. Свиридюк, Г. А. Фазовое пространство задачи Коши-Дирихле для одного неклассического уравнения / Г. А. Свиридюк, А. В. Анкудинов // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 11. – С. 1556 – 1661.
2. Китаева, О. Г. Устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия уравнения Осколкова / О. Г. Китаева, Г. А. Свиридюк // Неклассические уравнения математической физики: сб. тр. – Новосибирск, 2005. – С. 261 – 267.

3. Sviridyuk, G. A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. – Utrecht – Boston – Köln – Tokyo: VSP, 2003.
4. Свиридюк, Г. А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г. А. Свиридюк // Изв. Рос. Акад. наук, сер. матем. – 1993. – Т. 57, № 3. – С. 192 – 207.
5. Арнольд, В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд, Ю.С. Ильяшенко // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 1. – М., 1985. – С. 7 – 150.

Кафедра математического анализа,
Южно-Уральский государственный университет
shipilov@mail.ru

Поступила в редакцию 26 февраля 2009 г.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. В редакцию предоставляется печатная (2 экз.) и электронная (в формате TEX) версии работы (при этом должно быть строго выдержано соответствие между файлом и твердой копией), экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф. И. О., место работы, звание и должность, контактная информация). Подпись авторов и дата ставятся в левом нижнем углу на всех экземплярах.

2. Структура статьи: УДК, название (не более 10 – 12 слов), список авторов, аннотация, список ключевых слов на русском языке, далее следует название, список авторов, аннотация, список ключевых слов на английском языке, текст работы, литература (в порядке цитирования, ГОСТ 7.1 – 2003).

3. Параметры набора. Страницы рукописи должны быть пронумерованы. Шрифт – 12 pt. Поля: зеркальные, верхнее – 30, нижнее – 30, внутри – 25, снаружи – 25 мм. Отступ красной строки 0,7 см, межстрочный интервал – одинарный. В статье нумеруются лишь те формулы, на которые по тексту есть ссылки.

4. Рисунки все черно-белые. Необходимо предоставить рисунки в виде отдельных файлов (в формате *.eps).

5. Адрес редакции Вестника ЮУрГУ, серия «Математическое моделирование и программирование»

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, механико-математический факультет, кафедра УМФ, ответственно-му редактору проф. Свиридюку Георгию Анатольевичу.

6. Адрес электронной почты: mummi@ems.ru

7. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления статей можно загрузить с сайта ЮУрГУ (<http://www.susu.ac.ru>) следуя ссылкой: «Научные исследования», «Издательская деятельность», «Вестник ЮУрГУ», «Серии».

8. Плата с авторов за публикацию рукописей не взимается.

9. Подписной индекс Вестника ЮУрГУ, серия «Математическое моделирование и программирование»: 29126, каталог «Пресса России». Периодичность выхода – 2 номера в год (май и ноябрь).

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 24.10.2009. Формат 60×84 1/8. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 13,95. Уч.-изд. л. 13,33. Тираж 500 экз. Заказ 441/482.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ. 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.