

ВЕСТНИК

ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

№ 27 (127)
2008

ISSN 2071-0216

СЕРИЯ

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ
И ПРОГРАММИРОВАНИЕ»

Выпуск 2

*ПОСВЯЩАЕТСЯ
65- ЛЕТИЮ ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА*

Редакционная коллегия

к.ф.-м.н., проф. Заляпин В.И., к.ф.-м.н. Манакова Н.А. (*отв. секретарь*),
д.ф.-м.н., проф. Менихес Л.Д., д.ф.-м.н., проф. Свиридюк Г.А. (*отв. редактор*),
д.ф.-м.н., проф. Соколинский Л.Б.

Редакционный совет

акад. РАН Васильев С.Н., акад. РАН Еремин И.И. (*председатель*),
д.ф.-м.н., проф. Кадченко С.И., д.ф.-м.н., проф. Кожанов А.И., д.ф.-м.н., проф.
Лакеев А.В., д.ф.-м.н., проф. Панюков А.В., д.ф.-м.н., проф. Танана В.П.,
д.ф.-м.н., проф. Ухоботов В.И., д.ф.-м.н., проф. Федоров В.Е.,
чл.-кор. РАН Ченцов А.Г., д.т.н., проф. Ширяев В.И.

Содержание

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИДАКТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ЭЛЕКТРОННЫХ УЧЕБНЫХ КОМПЛЕКСОВ Н.С. Жигальская	4
СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ПОЛУЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА С.А. Загребина, М.М. Якупов	10
ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА И ЕЕ ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ Г.А. Закирова, А.И. Седов	19
ЛЕОНИД ДАВИДОВИЧ МЕНИХЕС (к шестидесятилетию со дня рождения) В.И. Заляпин	28
СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭПР-ДОЗИМЕТРИИ В.И. Заляпин	36
ОБ ОДНОМ УРАВНЕНИИ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА НА ГРАФЕ А.А. Замышляева	45
ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ВЫРОЖДЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ УРАВНЕНИЙ С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ШОУОЛТЕРА – СИДОРОВА А.В. Келлер	50
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ЧАСТИЧНОГО ЗЕРКАЛИРОВАНИЯ ПРИ БАЛАНСИРОВКЕ ЗАГРУЗКИ В ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СУБД ДЛЯ КЛАСТЕРНЫХ СИСТЕМ А.В. Лепихов	57
ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЕМ ОСКОЛКОВА Н.А. Манакова	63
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ОСЕВЫМ ТРЕХМЕРНЫМ ДЕФЕКТОМ А.А. Остсемин, П.Б. Уткин	71
ТЕХНИКА ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ПОТОКОВЫХ АЛГОРИТМОВ А.В. Панюков, В.А. Телегин	78
О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ САМОСОПРЯЖЕННОГО ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА А.И. Седов	100
О ЛОКАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАМЯТЬЮ В.Е. Федоров, О.А. Стахеева	104
ОРГАНИЗАЦИЯ БРОКЕРА РЕСУРСОВ В СИСТЕМЕ CAEVEANS А.В. Шамакина	110
О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ФИЛЬТРУЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ НА МНОГООБРАЗИИ Д.Е. Шафранов	117

Contents

MODELING OF THE E-LEARNING PACKAGES DIDACTIC STRUCTURE N.S. Zhigalskaya	4
EXISTENCE AND STABILITY OF SOLUTIONS OF ONE CLASS OF SEMILINEAR SOBOLEV-TYPE EQUATIONS S.A. Zagrebina, M.M. Yakupov	10
AN INVERSE SPECTRAL PROBLEM FOR LAPLACE OPERATOR AND IT'S APPROXIMATE SOLUTION G.A. Zakirova, A.I. Sedov	19
LEONID D. MENIKHES (to the sixtieth anniversary) Vladimir I. Zalyapin	28
STATISTICAL ANALYSIS OF THE EPR-MEASUREMENT RESULTS Zalyapin V.I., Shishkina E.A., Fattibene P., Wieser A., Ivanov D.V., Degteva M.O.	36
ON A SOBOLEV TYPE EQUATION DEFINED ON THE GRAPH A.A. Zamyshlyayeva	45
NUMERICAL SOLUTION OF THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR DEGENERATE LINEAR SYSTEM OF EQUATIONS WITH SHOWALTER – SIDOROV INITIAL CONDITIONS A.V. Keller	50
APPLICATION OF THE PARTIAL MIRRORING METHOD WHEN BALANCING THE LOAD IN THE PARALLEL DBMS FOR THE CLUSTER SYSTEMS A.V. Lepikhov	57
ON A MODEL OF OPTIMAL CONTROL OF THE OSKOLKOV EQUATION N.A. Manakova	63
MATHEMATICAL MODEL OF THE STRESS-STRAIN BEHAVIOUR OF CENTRAL THREE-DIMENSIONAL DEFECT A.A. Ostsemin, P.B. Utkin	71
SOFTWARE ENGINEERING OF THE FLOW ALGORITHMS A.V. Panyukov, V.A. Teleghin	78
EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE INVERSE SPECTRAL ANALYSIS PROBLEM FOR A SELF-ADJOINT DISCRETE OPERATOR A.I. Sedov	100
ON LOCAL SOLVABILITY OF LINEAR EVOLUTIONARY EQUATIONS WITH MEMORY V.E. Fedorov, O.A. Stakheeva	104
ORGANIZATION OF THE RESOURCES BROKER IN THE CAEBEANS SYSTEM A.V. Shamakina	110
ON THE CAUCHY PROBLEM FOR THE EQUATION OF FREE SURFACE OF FILTERED FLUID ON THE MANIFOLD D.E. Shafranov	117

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИДАКТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ЭЛЕКТРОННЫХ УЧЕБНЫХ КОМПЛЕКСОВ

Н.С. Жигальская

MODELING OF THE E-LEARNING PACKAGES DIDACTIC STRUCTURE

N.S. Zhigalskaya

Представлена структурно-иерархическая модель дидактического содержания электронного учебного комплекса. Электронный учебный комплекс включает следующие дидактические слои: развернутое теоретическое описание понятия, слайды презентаций, примеры, упражнения для самостоятельного выполнения, тесты для контроля остаточных знаний и библиографию.

Ключевые слова: электронная учебная энциклопедия, электронный учебный курс, электронное обучение, e-learning

This paper presents structural and hierarchical model of the didactic e-learning packages. E-learning package includes the following didactic aspects: a detailed theoretical definition of a concept, slides for presentations, examples, exercises for individual work, residual knowledge tests and a bibliography.

Keywords: e-learning encyclopedia, e-learning course, e-learning

Введение

В настоящее время высшее образование РФ идет по пути внедрения дистанционного образования в учебный процесс. Дистанционное образование позволяет учащемуся заниматься в удобное для себя время, в удобном месте и темпе без отрыва от производства, а также значительно снижает затраты на подготовку специалистов. Подавляющую роль здесь играют обучающие курсы на основе интернет-технологий. Доступность такого образования высока, достаточно иметь дома компьютер, подключенный к сети интернет. Однако до сих пор ведутся работы по созданию удобного и дружественного инструмента, осуществляющего разработку и сопровождение подобных электронных методических комплексов [1, 2]. В настоящее время имеются международные стандарты на структуру и представление элементов контента электронных учебных курсов (ЭУК). Базовым стандартом здесь является SCORM [3], обеспечивающий возможность переноса элементов контента из одного ЭУК в другой на физическом уровне. Однако до сих пор отсутствуют стандарты, определяющие принципы формирования дидактической структуры ЭУК. Это ограничивает возможность переноса методических разработок между различными ЭУК и препятствует получению максимального эффекта при внедрении электронного образования в высшей школе.

Целью настоящей работы является разработка универсальной компьютерной системы обучения UniCST (Universal Computer System for Tutoring), предоставляющая интерфейс разработки и сопровождения электронных учебных комплексов. Основным технологическим решением является использование структурно-иерархической модели дидактического содержания электронного учебного курса и энциклопедии, разработанной автором [4, 5].

1. Структурно-иерархическая модель дидактического содержания электронного учебного комплекса

Модель предусматривает двухуровневую методическую базу знаний. Первый уровень предполагает создание единого комплекса электронных энциклопедий по различным областям знаний. Второй уровень предполагает создание электронных учебных курсов на основе существующих энциклопедий путем экспорта учебных блоков и организации их в иерархическую структуру, адекватно реализующих рабочие учебные программы в соответствии с действующими образовательными стандартами направлений или специальностей. Концепция модели электронной учебной энциклопедии и электронного учебного курса представлена на рис. 1.

В рамках модели *Энциклопедия* описывает определенную предметную область, и учебный материал представляется в виде отдельных *Модулей*. Каждый модуль принадлежит какой-либо энциклопедии и является дидактически законченным описанием некоторого термина/понятия. Каждый модуль содержит набор именованных дидактических *Компонент*, благодаря чему модель должна поддерживать структурирование модуля по способам представления содержания обучения. Таким образом, один и тот же материал представляется несколькими способами (тексты лекций, аудио или видео материалы, библиографии, методические рекомендации по решению типовых задач, набор задач для лабораторных работ, контрольные тесты и проч.), называемыми *Компонентными типами*, каждый из которых обладает своими дидактическими возможностями. Каждый компонентный тип определяется путем задания его интерфейса: структуры данных (набора атрибутов) и набора операций.

Таким образом, компонентный тип T – это пара (A, F) . A – обозначает множество атрибутов, F – множество операций (функций). Каждый атрибут $a \in A$ представляет собой объект данных некоторого объектного типа. Допустимое множество объектных типов определяется стандартом (расширяет стандарт) SCORM [3]. Для любого атрибута определены две стандартные операции: «присвоить значение» и «выдать значение». При этом в качестве значения может фигурировать как значение простого типа, например, integer, так и указатель на объект данных. Это определяется конкретным объектным типом.

Каждая операция $f \in F$ компонентного типа выполняет некоторое действие над компонентой, которое может изменять или не изменять значения ее атрибутов.

В модели предусмотрен фиксированный набор компонентных типов:

- theory – развернутое теоретическое описание понятия;
- summary – краткое теоретическое описание понятия, определение или формула для расчета;
- examples – список примеров, иллюстрирующих те или иные отличительные черты понятия;
- exercises – список упражнений для самостоятельного выполнения;
- questions – открытый для студента список вопросов для самопроверки;
- test – закрытый для студента список вопросов для контроля усвоения учебного материала;
- bibliography – библиография по заданной теме.

Модель содержит ограниченные средства для создания расширений набора стандартных компонентных типов учебного материала с учетом спецификаций каждой конкретной



Рис. 1. Концепция ЭУЭ и ЭУК.

специальности или направления подготовки. Расширения объединяются в *профили*. Чтобы сделать профиль доступным для использования в модели, его применяют к энциклопедии. Для расширения возможностей модели служат *стереотипы*, позволяющие создавать новые виды строительных блоков, производные от существующих, но специфичные для конкретной задачи. Стереотип – это новый компонентный тип, определенный на основе уже существующего компонентного типа. Например, на основе компонентного типа «bibliography» может быть создан тип «e-bibliography» – интернет-библиография по заданной теме. Пусть задан некоторый профиль P . Пусть T – множество всех компонентных типов, определенных в профиле P .

Энциклопедия R содержит две части: схема энциклопедии и множество модулей. Энциклопедия описывает определенную предметную область. Все модули энциклопедии имеют одинаковую внутреннюю структуру, задаваемую схемой энциклопедии. Такой подход позволит, при использовании электронного учебного курса в учебном процессе, выделять способ представления материала в отдельные самостоятельные объекты. Например, список литературы по всему курсу, экзаменационный тест, задачник, учебник, методические указания, практикумы и проч.

Схема энциклопедии τ – это конечная упорядоченная последовательность пар вида:

$$\tau = \{ \langle c_j : t_j \rangle \mid t_j \in T, j = 1, \dots, k \},$$

где c_j – имя j -й компоненты. Имена компонент в рамках одной схемы энциклопедии должны быть уникальными.

В терминах модели модуль μ_s представляет собой конечный набор пар вида:

$$\mu_s = \{ \langle c_j, \nu_{sj} \rangle \mid j = 1, \dots, k \},$$

где c_j – имя j -й компоненты, ν_{sj} – значение соответствующего типа.

Конечный набор модулей, построенных на основе схемы энциклопедии и взятых в некотором порядке, назовем множеством модулей и обозначим M :

$$M = \{\mu_s | s = 1, \dots, q\},$$

где q – количество модулей.

Таким образом, энциклопедия R является парой:

$$R = (\tau, M).$$

Наполнением энциклопедий конкретным содержанием, или контентом, в рамках модели занимаются специалисты соответствующей предметной области.

Модель поддерживает структурирование учебного материала по уровням детализации и глубине освоения материала. Структурированное представление рабочей программы учебной дисциплины в рамках модели называется *Граф-планом*. Граф-план – это упорядоченное дерево, задающее иерархию разделов данной программы, корень которого соответствует дисциплине в целом. Узел дерева граф-плана называется *Темой*.

Таким образом, граф-план учебной дисциплины является упорядоченной парой

$$G = (V, E),$$

где $V = \{v_i | i = \overline{1, x}\}$ – множество всех вершин граф-плана (тем) и $E = \{e_i | i = \overline{1, y}\}$ – множество всех дуг граф-плана.

Причем выполнены условия:

- условие связности графа:

$$\forall v_{i1} \in V \exists e_j \in E, \exists v_{i2} \in V : e_j = (v_{i1}, v_{i2}),$$

- условие ацикличности графа:

$$\forall v_i \in V \neg \exists e \in E : e = (v_i, v_i).$$

Каждой вершине v_i граф-плана G поставим в соответствие модуль μ_s из множества M , это соответствие задается отображением

$$\phi(\mu_s, v_j) = \begin{cases} 0, & \text{нет сопоставления,} \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Электронный учебный курс является упорядоченной тройкой

$$C = (R, G, \phi).$$

Модель допускает автономную модификацию и развитие электронного учебного курса вне зависимости от энциклопедий, послуживших базой при его создании. Модель поддерживает итеративный характер разработки электронных учебных курсов и энциклопедий, что предполагает возможность внесения изменений в структуру и содержание электронных учебных курсов и энциклопедий в ходе их эксплуатации в учебном процессе. При этом модель поддерживает распространение обновлений в содержание и структуру электронных энциклопедий на электронные учебные курсы.

В рамках модели один и тот же блок учебного материала электронной энциклопедии может быть использован в разных электронных учебных курсах. При изменении блока учебного материала в электронной энциклопедии, эти изменения автоматически отражаются в каждом электронном учебном курсе, использующем данный блок. При этом модель предусматривает возможность применения этих изменений в соответствующих электронных учебных курсах и возможность сохранения старой версии учебного материала.

2. Реализация системы «niCST Lite»

Для реализации прототипа системы «UniCSTrLite» (Universal Computer System for Tutoring) были выбраны технология ADO.Net, язык программирования С, СУБД Microsoft SQL Server CE. Перечисленные технологии на сегодняшний день являются удобными инструментами разработки сложных windows-приложений.

Программные средства, входящие в систему «UniCSTrLite», обеспечивают технологическую поддержку процесса создания, модификации и использования электронных учебных энциклопедий. Можно выделить следующие основные инструменты, входящие в состав системы «UniCSTrLite».

- RedEnc – редактор энциклопедии, обеспечивающий создание и модификацию ЭУЭ, а также генерацию ЭУЭ в статический html-сайт;
- RedBib – редактор библиографии, обеспечивающий создание и модификацию библиографического списка ЭУЭ. Хранение и обработка библиографического списка осуществляется в виде xml-файла;
- RedComp – редактор компоненты модуля, обеспечивающий модификацию компонент модуля ЭУЭ с помощью приложений MS Word и MS PowerPoint;
- unicstLite.sdf – хранилище данных;
- encyclopedia.cs – доступ к данным.

3. Заключение

В данной работе была построена структурно-иерархическая модель дидактического содержания электронного учебного комплекса. Модель предусматривает двухуровневую методическую базу знаний. Первый уровень направлен на создание единого комплекса электронных энциклопедий по различным предметным областям. Второй уровень направлен на создание электронных учебных курсов на основе существующих энциклопедий. Электронная энциклопедия включает в себя набор дидактических компонент, благодаря чему модель поддерживает структурирование учебного материала по способам представления содержания обучения (тексты лекций, методические рекомендации по решению типовых задач, контрольные тесты и проч.).

На основе описанной модели был реализован прототип универсальной компьютерной системы электронного обучения «niCST Lite». Данная система может быть полезна учебным организациям для ведения образовательной деятельности.

Литература

1. Соколинский, Л.Б. Электронный учебный курс в эпоху Интернет: каким он должен быть? / Л.Б. Соколинский // Научный сервис в сети Интернет: тр. Всерос. науч. конф. (23 – 28 сент. 2002 г., г. Новороссийск). – М., 2002. – С. 206 – 207.
2. Жигальская, Н.С. Методы построения электронных интегрированных словарей, справочников и каталогов в World Wide Web / Н.С. Жигальская, Л.Б. Соколинский // Научный сервис в сети Интернет: труды Всерос. науч. конф. (23 – 28 сент. 2002 г., г. Новороссийск). – М., 2002. – С.159 – 160.
3. Advanced Distributed Learning. Sharable Content Object Reference Model (SCORM) 2004. / пер. с англ. Е.В. Кузьминой. – М., 2005.

4. Жигальская, Н.С. Стандартизация содержания электронных учебных курсов и энциклопедий на основе структурно-иерархического подхода / Н.С. Жигальская, Л.Б. Соколинский // Новые информационные технологии в образовании: материалы междунар. науч.-практ. конф., Екатеринбург, 26 – 28 февраля 2008 г.: в 2 ч. – Екатеринбург, 2008. – Ч. 1. – С. 84 – 89.
5. Жигальская, Н.С. Модель вариантов использования универсальной среды электронного обучения UniCST / Н.С. Жигальская // Инновационные технологии обучения: проблемы и перспективы: Материалы всерос. науч.-метод. конф., Липецк, 29 – 30 марта 2008 г. – Липецк, 2008. – С. 204 – 207.
6. Жигальская, Н.С. Внедрение современных параллельных вычислительных технологий в образовательные стандарты подготовки ИТ-специалистов на базе модели электронного учебного курса / Н.С. Жигальская, М.Л. Цымблер // Преподавание ИТ в Российской Федерации: материалы VI открытой всерос. конф., Нижний Новгород, 12 – 13 мая 2008 г. – Нижний Новгород, 2008. – С. 22 – 25.

Кафедра «Системное программирование»,
Южно-Уральский государственный университет
zhnadya@rambler.ru

Поступила в редакцию 15 сентября 2008 г.

СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ПОЛУЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

С.А. Загребина, М.М. Якупов

EXISTENCE AND STABILITY OF SOLUTIONS OF ONE CLASS OF SEMILINEAR SOBOLEV-TYPE EQUATIONS

S.A. Zagrebina, M.M. Yakupov

Изучена однозначная разрешимость задачи Коши для полулинейного уравнения соболевского типа с относительно p -секториальным оператором и устойчивость решений этого уравнения в окрестности точки нуль в случае, когда оператор при производной необратим, в частности, его ядро нетривиально. В качестве конкретной интерпретации абстрактных результатов рассмотрена задача термоконвекции для уравнения Осколкова, моделирующего динамику несжимаемой вязкоупругой жидкости.

Ключевые слова: уравнение Осколкова, уравнения соболевского типа, относительно p -секториальный оператор, существование и устойчивость решений

The authors analyses the unique solvability of the Cauchy problem for the semilinear Sobolev type equation with a relatively p -sectorial operator, and the stability of solutions of this equation about a point of the origin of coordinates in case of the irreversibility of the operator under derivative, particularly when its core is nontrivial as an example of the results, the thermoconvection problem for the Oskolkov equation modeled dynamic of incompressible visco-elastic fluid is considered.

Keywords: Oskolkov equation, Sobolev type equation, relatively p -sectorial operator, existence and stability of solutions

Пусть \mathcal{U} и \mathfrak{F} – банаховы пространства; операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathfrak{F})$ (т.е. линеен и непрерывен), $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}; \mathfrak{F})$ (т.е. линеен, замкнут и плотно определен), $N \in C^\infty(\mathcal{U}_\alpha; \mathfrak{F})$. Здесь \mathcal{U}_α – банахово пространство, причем вложение $\mathcal{U}_\alpha \hookrightarrow \mathcal{U}$ плотно и непрерывно. Рассмотрим полулинейное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + N(u). \quad (1)$$

Если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathcal{U})$, то уравнение (1) тривиально редуцируется к уравнению

$$\dot{u} = Su + F(u), \quad (2)$$

где операторы $S \in L^{-1}M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U})$, $F \in L^{-1}N \in C^\infty(\mathcal{U}_\alpha; \mathcal{U})$. Если вдобавок

(А) оператор S секториален, то при любом $u_0 \in \mathcal{U}_\alpha$ и некотором $\tau \in \mathbb{R}_+$, $\tau = \tau(u_0)$, существует единственное решение $u \in C^\infty((0, \tau); \mathcal{U})$ задачи Коши $u(0) = u_0$ для уравнения (2) [1], п. 3.3;

(В) спектр $\sigma(S)$ оператора S таков, что $\sigma(S) \cap \{i\mathbb{R}\} = \emptyset$, а оператор F таков, что $F(0) = 0$ и $F'_0 = \mathbb{O}$, то в некоторой окрестности точки нуль существуют устойчивое и неустойчивое многообразия уравнения (2) [1], п. 5.2.

Нашей целью является изучение однозначной разрешимости задачи Коши для уравнения (1), а также устойчивости решений уравнения (1) в окрестности точки нуль в случае, когда оператор L необратим, в частности, его ядро $\ker L \neq \{0\}$. При выборе цели мы руководствовались не столько желанием пополнить теорию, сколько стремлением осмыслить начально-краевые задачи для неклассических уравнений математической физики, возникающих в последнее время в приложениях. Именно, в качестве конкретной интерпретации общих результатов мы рассмотрим задачу термоконвекции для уравнения Осколкова, моделирующего динамику несжимаемой вязкоупругой жидкости.

Трудности, которые нас ожидают как при изучении абстрактного уравнения (1), так и при изучении его конкретных интерпретаций, были отмечены еще первопроходцами [2, 3]. Это, во-первых, несуществование решений задачи Коши для уравнения (1) при любых начальных данных пусть даже из плотного в \mathcal{U} множества, а во-вторых, сильная неустойчивость решений уравнения (1). Данные трудности отмечались и преодолевались разными исследователями по-разному (см. далеко не полный перечень монографий [4 – 8], которые большей частью посвящены изучению линейных уравнений соболевского типа вида

$$L\dot{u} = Mu \tag{3}$$

в различных аспектах). Однако первое удовлетворительное объяснение несуществования и неустойчивости решений задачи Коши для линейных уравнений (3) дано в монографии [9]. Несуществование решений объясняется тем, что уравнение (3) необходимо рассматривать не на всем пространстве \mathcal{U} , а на некотором его подмножестве, понимаемом как фазовое пространство. Неустойчивость объясняется расщеплением фазового пространства на инвариантные пространства, порождающие дихотомии решений. Инвариантные пространства соответствуют расщеплению L -спектра оператора M .

Успех в линейном случае был обусловлен тем обстоятельством, что фазовым пространством уравнения (3) служит подпространство в \mathcal{U} . Поэтому был начат поиск таких полулинейных уравнений (1), фазовые пространства которых диффеоморфны некоторому подпространству в \mathcal{U} [10 – 13]. Затем для этих фазовых пространств при условии (L, p) -ограниченности оператора M было получено обобщение утверждения В для уравнения (1) [14, 15]. Кстати сказать, в [16] предложено утверждения вида В называть «теоремой Адамара – Перрона». Мы будем придерживаться этого термина и докажем теорему Адамара – Перрона для уравнения (1) в случае, когда оператор M (L, p) -секториален.

Статья организована следующим образом. В п. 1 представлены результаты гл. 3 и гл. 5 монографии [9], адаптированные к нашей ситуации. В п. 2 вводится понятие квазистационарной полутраектории и выясняется роль квазистационарной полутраектории в формировании фазового пространства и устойчивого и неустойчивого инвариантных многообразий. В п. 3 показывается существование устойчивого и неустойчивого инвариантных многообразий полулинейной задачи термоконвекции.

1. Относительно p -секториальные операторы

Введем в рассмотрение L -резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathcal{U})\}$ и L -спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M . Нетрудно показать, что множество $\rho^L(M)$ всегда открыто, поэтому множество $\sigma^L(M)$ всегда замкнуто. Пусть $\rho^L(M) \neq \emptyset$, тогда можно определить правую и левую p -резольвенты оператора M $R_{(\mu, p)}^L(M) = \prod_{q=0}^p R_{\mu_q}^L(M)$,

$L_{(\mu,p)}^L(M) = \prod_{q=0}^p L_{\mu_q}^L(M)$, где $R_{\mu}^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L_{\mu}^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$, а точки $\mu_q \in \rho^L(M)$, $q \in \{0, 1, \dots, p\}$.

Определение 1. Оператор M называется (L, p) -секториальным, если

- (i) существуют константы $a \in \mathbb{R}$ и $\Theta \in (\pi/2, \pi)$ такие, что сектор $S_{a,\Theta}^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \Theta, \mu \neq a\} \subset \rho^L(M)$,
- (ii) существует константа $K \in \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\max \left\{ \left\| R_{(\mu,p)}^L(M) \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \left\| L_{(\mu,p)}^L(M) \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})} \right\} \leq \frac{K}{\prod_{q=0}^p |\mu_q - a|}$$

при любых $\mu_q \in S_{a,\Theta}^L(M)$, $q \in \{0, 1, \dots, p\}$.

Пусть $\rho^L(M) \neq \emptyset$, введем в рассмотрение уравнения

$$R_{\alpha}^L(M)\dot{u} = (\alpha L - M)^{-1}Mu, \tag{4}$$

$$L_{\alpha}^L(M)\dot{f} = M(\alpha L - M)^{-1}f, \tag{5}$$

где $\alpha \in \rho^L(M)$.

Теорема 1. [1] Пусть оператор M (L, p) -секториален, тогда существует аналитическая разрешающая полугруппа уравнения (4) (уравнения (5)).

Искомые полугруппы задаются несобственными интегралами типа Данфорда – Тейлора соответственно

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{\mu}^L(M)e^{\mu t}d\mu, \quad F^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L_{\mu}^L(M)e^{\mu t}d\mu, \tag{6}$$

где $t \in \mathbb{R}_+$, контур $\Gamma \subset S_{a,\Theta}^L(M)$ такой, что $|\arg \mu| \rightarrow \Theta$ при $\mu \rightarrow \infty$, $\mu \in \Gamma$.

Введем в рассмотрение ядра полугрупп $U^{\cdot} = \{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ и $F^{\cdot} = \{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, $\ker U^{\cdot} = \{\varphi \in \mathfrak{U} : U^t\varphi = 0 \exists t \in \mathbb{R}_+\}$ и $\ker F^{\cdot} = \{\psi \in \mathfrak{F} : F^t\psi = 0 \exists t \in \mathbb{R}_+\}$. Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker U^{\cdot}$, $\mathfrak{F}^0 = \ker F^{\cdot}$ и через L_0 (M_0) обозначим сужение оператора L (M) на \mathfrak{U}^0 ($\mathfrak{U}^0 \cap \text{dom } M$).

Лемма 1. Пусть оператор M (L, p) -секториален, тогда

- (i) оператор $L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$;
- (ii) оператор $M_0 \in Cl(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$, причем существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$.

Построим оператор $G = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$. Нетрудно показать, что оператор G нильпотентен степени p . Введем в рассмотрение образы $\text{im } U^{\cdot} = \{u \in \mathfrak{U} : \lim_{t \rightarrow 0^+} U^t u = u\}$ и $\text{im } F^{\cdot} = \{f \in \mathfrak{F} : \lim_{t \rightarrow 0^+} F^t f = f\}$ полугрупп U^{\cdot} и F^{\cdot} соответственно. Положим $\mathfrak{U}^1 = \text{im } U^{\cdot}$, $\mathfrak{F}^1 = \text{im } F^{\cdot}$ и через L_1 (M_1) обозначим сужение оператора L (M) на \mathfrak{U}^1 ($\mathfrak{U}^1 \cap \text{dom } M$).

Лемма 2. Пусть оператор M сильно (L, p) -секториален, тогда

- (i) оператор $L_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$, оператор $M_1 \in Cl(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$.
- (ii) $\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$.

Рассмотрим линейное уравнение (3). Решением уравнения (3) назовем вектор-функцию $u \in C^{\infty}(\mathbb{R}_+; \mathfrak{U})$, удовлетворяющую ему. Как нетрудно убедиться, полугруппа U^{\cdot} (см (6)) является разрешающей полугруппой уравнения (3).

Определение 2. Множество $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{U}$ называется фазовым пространством уравнения (3), если

(i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (3) лежит в \mathfrak{F} как полутраектория (т.е. $u(t) \in \mathfrak{F}$, $t \in \mathbb{R}_+$);

(ii) для любого $u_0 \in \mathfrak{F}$ существует единственное ослабленное решение задачи Коши $u(0) = u_0$ для уравнения (3).

Теорема 2. Пусть оператор M (L, p) -секториален, тогда фазовое пространство уравнения (3) совпадает с образом разрешающей полугруппы U .

Очевидно, $\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1 \subset \mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1 \subset \mathfrak{F}$.

Теорема 3. [17] Оператор M сильно (L, p) -секториален точно тогда, когда выполняются следующие условия: оператор M (L, p) -секториален,

$$\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}, \quad \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}, \quad (7)$$

$$\text{существует оператор } L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1). \quad (8)$$

Заметим, что из (7) вытекает существование единиц $P = s - \lim_{t \rightarrow 0+} U^t$ и $Q = s - \lim_{t \rightarrow 0+} F^t$ полугрупп U и F соответственно.

Теорема 4. Пусть оператор M (L, p) -секториален и выполнено (7), (8). Тогда оператор $S = L_1^{-1}M_1 \in Cl(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$ секториален.

Пусть далее L -спектр оператора M

$$\sigma^L(M) \cap \{i\mathbb{R}\} = \emptyset. \quad (9)$$

Тогда разрешающую полугруппу уравнения (3) можно представить в виде $U^t = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_1} R_\mu^L(M) e^{t\mu} d\mu + (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_2} R_\mu^L(M) e^{t\mu} d\mu = U_1^t + U_2^t$, где Γ_1 – контур, целиком лежащий в левой полуплоскости и имеющий такой же вид, как в (6), а Γ_2 – замкнутый контур, целиком лежащий в правой полуплоскости и ограничивающий часть L -спектра $\sigma^L(M) \cap \{\mu \in \mathbb{C} : \text{Re } \mu > 0\}$. Нетрудно заметить, что полугруппа $\{U_2^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ продолжима до аналитической группы $\{U_2^\tau : \tau \in \mathbb{C}\}$, значит, существует ее единица $P_2 = U_2^0$, являющаяся, очевидно, проектором. Пусть выполнено (7), тогда существует проектор $P_1 = s - \lim_{t \rightarrow 0+} U_1^t = P - P_2$. Положим, $\mathfrak{U}^{1k} = \text{im } P_k$, $k \in \{0, 1\}$, очевидно $\mathfrak{U}^{11} \oplus \mathfrak{U}^{12} = \mathfrak{U}^1$.

Определение 3. Пусть \mathfrak{F} – фазовое пространство уравнения (3). Подмножество $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{F}$ называется инвариантным пространством уравнения (3), если при любом $u_0 \in \mathfrak{J}$ вектор-функция $u(t) = U^t u_0 \in \mathfrak{J}$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Теорема 5. Пусть оператор M (L, p) -секториален и выполнено (7), тогда подпространства \mathfrak{U}^{1k} , $k \in \{0, 1\}$ являются инвариантными пространствами уравнения (3).

Определение 4. Пусть \mathfrak{J} – инвариантное пространство уравнения (3). Пусть $u(t, u_0) = U^t u_0$ – решение задачи Коши для уравнения (3) с начальным значением $u_0 \in \mathfrak{J}$. Пространство \mathfrak{J} называется устойчивым (неустойчивым), если существуют константы $\alpha, C \in \mathbb{R}_+$ такие, что $\|u(t, u_0)\|_{\mathfrak{U}} \leq C e^{-\alpha t} \|u_0\|_{\mathfrak{U}}$ при $t \in \mathbb{R}_+$ ($\|u(t, u_0)\|_{\mathfrak{U}} \leq C e^{\alpha t} \|u_0\|_{\mathfrak{U}}$ при $t \in \mathbb{R}_-$).

Теорема 6. Пусть оператор M (L, p) -секториален, и выполнено (7) – (9). Тогда \mathfrak{U}^{11} – устойчивое, а \mathfrak{U}^{12} – неустойчивое инвариантные пространства уравнения (3).

Если выполнены условия (7) – (9), то пространства \mathfrak{U}^{1k} , $k \in \{0, 1\}$ являются инвариантными пространствами секториального оператора $S = L_1^{-1}M_1 \in Cl(\mathfrak{U}^1)$. Поскольку

спектр $\sigma(S) = \sigma^L(M)$, то пространство \mathcal{U}^{11} (\mathcal{U}^{12}) является устойчивым (неустойчивым) пространством уравнения $\dot{u}^1 = Su^1$. Заметим еще, что если $\sigma^L(M) \cap \{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \mu \geq 0\} = \emptyset$, то неустойчивое инвариантное пространство $\mathcal{U}^{12} = \{0\}$. В таком случае фазовое пространство $\mathcal{U}^1 \equiv \mathcal{U}^{11}$ и называется *асимптотически экспоненциально устойчивым пространством*.

2. Квазистационарные полутраектории

Пусть \mathcal{U} и \mathfrak{F} – банаховы пространства; операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathfrak{F})$, $M \in Cl(\mathcal{U}; \mathfrak{F})$, причем оператор M (L, p)-секториален, и выполнены (7) – (9). Тогда, полагая $\mathcal{U}_0^1 = \mathcal{U}^1$, $\mathcal{U}_1^1 = \operatorname{dom} M \cap \mathcal{U}^1$ с «нормой графика», аналогично [18] построим интерполяционные пространства $\mathcal{U}_\alpha^1 = [\mathcal{U}_0^1, \mathcal{U}_1^1]_\alpha$, $\alpha \in [0, 1]$. Далее, положим $\mathcal{U}_1^0 = \operatorname{dom} M \cap \mathcal{U}^0$ с «нормой графика» и построим пространства $\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}_1^0 \oplus \mathcal{U}_\alpha^1$, $\alpha \in [0, 1]$. Имеют место непрерывное и плотное вложение $\mathcal{U}_\alpha \hookrightarrow \mathcal{U}$, $\alpha \in [0, 1]$, и равенство $\mathcal{U}_1 = \operatorname{dom} M$ с «нормой графика». Фиксируем $\alpha \in [0, 1]$, и пусть оператор $N \in C^\infty(\mathcal{U}_\alpha; \mathfrak{F})$. Рассмотрим полулинейное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + N(u). \quad (10)$$

Вектор-функцию $u \in C^\infty((0, T); \mathcal{U}_1)$, удовлетворяющую при некотором $T \in \mathbb{R}_+$ этому уравнению, назовем *решением уравнения* (10). Решение $u = u(t)$ уравнения (10), удовлетворяющее соотношению $\lim_{t \rightarrow 0+} \|u(t) - u_0\|_{\mathcal{U}_\alpha} = 0$ при некотором $u_0 \in \mathcal{U}_\alpha$, назовем *решением задачи Коши*

$$u(0) = u_0 \quad (11)$$

для уравнения (10) (или просто *решением задачи* (10), (11)).

Поскольку оператор M (L, p)-секториален и выполнены (7), (8), то уравнение (10) эквивалентно системе из двух уравнений

$$G\dot{u}^0 = u^0 + M_0^{-1}N(u), \quad (12)$$

$$\dot{u}^1 = Su^1 + L_1^{-1}N(u), \quad (13)$$

где оператор $G = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_0)$ нильпотентен степени p , а оператор $S = L_1^{-1}M_1 \in Cl(\mathcal{U}^1)$ секториален. О трудностях, возникающих при решении уравнений (12), (13), сказано уже немало (см. напр. [19]).

Определение 5. Решение $u = u(t)$ уравнения (10) называется *квазистационарной полутраекторией*, если

$$G(\mathbb{I} - P)\dot{u}(t) \equiv 0, \quad t \in (0, T). \quad (14)$$

Решение задачи (10), (11) называется *квазистационарной полутраекторией уравнения (10), выходящей из точки u_0* , если выполнено (14).

Понятие квазистационарной полутраектории естественным образом обобщает понятие квазистационарной траектории [19]. Если ограничиться рассмотрением только квазистационарных полутраекторий, то мы с необходимостью придем к рассмотрению множества $\mathcal{M} = \{u \in \mathcal{U}_\alpha : (\mathbb{I} - Q)(Mu + N(u)) = 0\}$, на котором они лежат.

Пусть $\mathcal{M} \neq \emptyset$; будем говорить, что множество \mathcal{M} в точке $u_0 \in \mathcal{M}$ является *банаховым C^∞ -многообразием*, если существуют окрестности $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$ и $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{U}_\alpha^1$ точек u_0 и $u_0^1 = Pu_0 \in \mathcal{U}_\alpha^1$ соответственно и C^∞ -диффеоморфизм $D : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}$ такой, что D^{-1} есть сужение проектора P на \mathcal{M} . Множество \mathcal{M} называется *банаховым C^∞ -многообразием*, если оно является таковым в каждой своей точке. Связное банахово C^∞ -многообразие называется *простым*.

Теорема 7. Пусть в точке $u_0 \in \mathfrak{M}$ множество \mathfrak{M} является банаховым C^∞ -многообразием, тогда существует квазистационарная полутраектория уравнения (10), выходящая из точки u_0 .

Приведем набросок доказательства. В условиях теоремы уравнение (13) можно привести к виду

$$\dot{u}^1 = Su^1 + F(u^1), \quad (15)$$

в окрестности $\mathfrak{D}_1 \hookrightarrow \mathfrak{U}_\alpha^1$ точки u_0^1 , где оператор $F = L_1^{-1}M_1D \in C^\infty((\mathfrak{D}_1; \mathfrak{U}))$. Пользуясь результатом [1], найдем решение $u^1 \in C^\infty((0, T); \mathfrak{U}_\alpha^1)$ задачи Коши $u^1(0) = u_\alpha^1$ для уравнения (15). Вектор-функция $u(t) = Du^1(t)$ будет решением задачи (10), (11), причем будет выполнено (14).

Определение 6. Множество $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{U}_\alpha$ называется *фазовым пространством* уравнения (10), если

- (i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (10) лежит на \mathfrak{F} , т.е. $u(t) \in \mathfrak{F}$, $t \in (0, T)$;
- (ii) для любого $u_0 \in \mathfrak{F}$ существует единственное решение задачи (10), (11).

В дальнейшем нас будут интересовать случаи, когда фазовое пространство \mathfrak{F} уравнения (10) будет совпадать со множеством его квазистационарных полутраекторий \mathfrak{M} . Отметим, что такой случай заведомо имеет место, если оператор $N \equiv \mathbb{O}$ (см. теорему 4), или если $p = 0$ [18], [19].

Положим теперь $\mathfrak{U}_\alpha^{1k} = \mathfrak{U}^{1k} \cap \mathfrak{U}_\alpha^1$, $k \in \{1, 2\}$. Пусть множество \mathfrak{M} – простое банахово C^∞ -многообразие, а фазовое пространство $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. Через $u(t, u_0)$ обозначим квазистационарную полутраекторию уравнения (10), выходящую из точки u_0 .

Определение 7. Множество $\mathfrak{M}^{s(u)} = \{u_0 \in \mathfrak{M} : \|P_1 u_0\|_{\mathfrak{U}} \leq R_1, \|u(t, u_0)\|_{\mathfrak{U}} \leq R_2, t \in \mathbb{R}_{+(-)}\}$ такое, что

- (i) $\mathfrak{M}^{s(u)}$ диффеоморфно замкнутому шару в $\mathfrak{U}_\alpha^{1(12)}$ с центром в начале координат радиуса R_1 ;
- (ii) $\mathfrak{M}^{s(u)}$ касается $\mathfrak{U}_\alpha^{1(12)}$ в начале координат;
- (iii) при любом $u_0 \in \mathfrak{M}^{s(u)}$ $\|u(t, u_0)\|_{\mathfrak{U}} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty(-\infty)$

называется *устойчивым (неустойчивым) инвариантным многообразием уравнения (10)*.

Теорема 8. Пусть оператор N таков, что $N(0) = 0$, $N'_0 = \mathbb{O}$. Тогда при некоторых R_k , $k \in \{1, 2\}$, существуют устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия уравнения (10). Причем, если для некоторого $u_0 \in \mathfrak{M}$ имеет место $\|P_1 u_0\|_{\mathfrak{U}} \leq R_1$ или $\|P_2 u_0\|_{\mathfrak{U}} \leq R_1$ и $\|u(t, u_0)\|_{\mathfrak{U}} \leq R_2$ при $t \rightarrow +\infty$ или при $t \rightarrow -\infty$, то $u_0 \in \mathfrak{M}^s \cup \mathfrak{M}^u$.

Приведем набросок доказательства. На первом этапе показывается, что уравнение (15) удовлетворяет условиям теоремы Адамара – Перрона. Действительно, оператор $S \in Cl(\mathfrak{U}^1)$ секториален, и его спектр $\sigma(S) = \sigma^L(M)$. Далее, по построению $F(0) = 0$ и $F'_0 \equiv \mathbb{O}$. Итак, существует устойчивое \mathfrak{M}^s и неустойчивое \mathfrak{M}^u инвариантные многообразия уравнения (15). Положим

$$\mathfrak{M}^s = \{u \in \mathfrak{M} : u = (\mathbb{I} + \delta)(u^1), u^1 \in \mathfrak{N}^s\},$$

и покажем, что \mathfrak{M}^s – искомое устойчивое многообразие уравнения (10). Прежде всего заметим, что для любого $u_0 \in \mathfrak{M}^s$ $\|P_1 u_0\|_{\mathfrak{U}} = \|P_1 u_0^1\|_{\mathfrak{U}} \leq \rho(2M)^{-1}$, где $u_0^1 \in \mathfrak{N}^s$. Отсюда, если положить $R_1 = \rho(2M)^{-1}$, то требуемый C^k -диффеоморфизм шара в \mathfrak{U}_α^{11} и \mathfrak{M}^s задается формулой $D = \mathbb{I} + \delta(\mathbb{I} + \sigma)$. Далее, поскольку любое решение $u(t, u_0)$ уравнения (10) имеет вид $u(t, u_0) = (\mathbb{I} + \delta)u^1(t, Pu_0)$, причем $\delta(u) = o(u)$ при $\|u\|_{\mathfrak{U}} \rightarrow 0$, то $\|u(t, u_0)\|_{\mathfrak{U}} = \|(\mathbb{I} + \delta)u^1(t, Pu_0)\|_{\mathfrak{U}} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$. Кроме того, отсюда вытекает существование константы

R_2 такой, что $\|u(t, u_0)\|_{\mathcal{U}} \leq R_2$, $t \in \mathbb{R}_+$. Наконец, касание \mathfrak{M}^s пространства \mathcal{U}^l в начале координат вытекает из того, что $(\mathbb{I} - D)(u) = o(u)$ при $\|u\|_{\mathcal{U}} \rightarrow 0$.

Существование неустойчивого инвариантного многообразия \mathfrak{M}^u доказывается аналогично.

Аналогично п. 1 заметим, что если $\sigma^L(M) \cap \{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \mu \geq 0\} = \emptyset$, то фазовое пространство уравнения (10) совпадает с устойчивым инвариантным многообразием.

3. Полулинейная задача терموконвекции

Гибрид системы уравнений Осколкова [21] и уравнения теплопроводности в приближении Обербека – Буссинеска

$$\begin{cases} (\lambda - \nabla^2)v_t = \nu \nabla^2 v - (v \cdot \nabla)v - \nabla p + g\gamma S, \quad \nabla \cdot v = 0, \\ S_t = \delta \nabla^2 S - v \cdot \nabla S + \gamma \cdot v, \end{cases} \quad (16)$$

моделирует терموконвекцию вязкоупругой несжимаемой среды Кельвина – Фойгта [20]. Если одна из горизонтальных компонент скорости равна нулю, то система (16) превращается в систему

$$\begin{cases} (\lambda - \Delta)\Delta \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nu \Delta^2 \psi - \frac{\partial(\psi, \Delta \psi)}{\partial(x, y)} + \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = \delta \Delta \theta - \frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x, y)} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{cases} \quad (17)$$

моделирующую плоскопараллельную терموконвекцию в слое вязкоупругой несжимаемой среды Кельвина – Фойгта.

Пусть $\Omega = (0; a) \times (0; b) \subset \mathbb{R}^2$. Нас интересует фазовое пространство, а также устойчивое и неустойчивое инвариантные пространства задачи Бенара

$$\psi(x, 0, t) = \Delta \psi(x, 0, t) = \psi(x, b, t) = \Delta \psi(x, b, t) = 0, \quad (18)$$

$$\theta(x, 0, t) = \theta(x, b, t) = 0, \quad (19)$$

$$\text{функции } \psi \text{ и } \theta \text{ периодичны по } x \text{ с периодом } a \quad (20)$$

в цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$. Положим [22] $\mathcal{U} = \mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{G} \times \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{V} = \{v \in W_2^4(\Omega) : v \text{ удовлетворяет (18), (20)}\}$, $\mathfrak{W} = \mathfrak{G} = \mathfrak{H} = L_2(\Omega)$; операторы

$$L = \begin{pmatrix} (\lambda - \Delta)\Delta & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \nu \Delta^2 & \alpha \frac{\partial}{\partial x} \\ \beta \frac{\partial}{\partial x} & \delta \Delta \end{pmatrix}.$$

Очевидно, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathfrak{F})$, а оператор $M \in Cl(\mathcal{U}; \mathfrak{F})$, $\operatorname{dom} M = \mathfrak{V} \times \{w \in W_2^2(\Omega) : w \text{ удовлетворяет (19), (20)}\}$. Причем оператор M $(L, 0)$ -секториален [22].

Положим $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0$, а через \mathcal{U}_1 обозначим линейал $\operatorname{dom} M$, снабженный «нормой графика». В качестве \mathcal{U}_N возьмем пространство $\mathcal{U}_N = \mathfrak{V} \times \{w \in W_2^1(\Omega) : w \text{ удовлетворяет (19), (20)}\}$. Очевидно $\mathcal{U}_1 \hookrightarrow \mathcal{U}_N \hookrightarrow \mathcal{U}_0$, причем все вложения плотны и непрерывны. Формулой $N : u \rightarrow \operatorname{col} \left(\frac{\partial(\Delta v, v)}{\partial(x, y)}, \frac{\partial(v, w)}{\partial(x, y)} \right)$ определим оператор $N : \mathcal{U}_N \rightarrow \mathfrak{F}$. Нетрудно показать, что оператор $N \in C^\infty(\mathcal{U}; \mathfrak{F})$ [23], кроме того легко заметить, что $N(0) = 0$, $N'_0 = \mathbb{O}$. Построим множество \mathfrak{M} , на котором находятся все квазистационарные траектории задачи Бенара для уравнения (11).

(i) $\mathfrak{M} = \mathcal{U}_\alpha$, если $\lambda \neq \lambda_j$;

$$(ii) \mathfrak{M} = \left\{ u \in \mathfrak{U}_\alpha : \iint_{\Omega} \frac{\partial(\Delta v, v)}{\partial(x, y)} \varphi_j dx dy + \nu \lambda^2 = 0 \right\}, \text{ если } \lambda = \lambda_j;$$

$$(iii) \mathfrak{M} = \left\{ u \in \mathfrak{U}_\alpha : \iint_{\Omega} \frac{\partial(\Delta v, v)}{\partial(x, y)} \varphi_{mn}^k dx dy + \nu \lambda^2 = 0, k = 1, 2 \right\}, \text{ если } \lambda = \lambda_{mn}.$$

Здесь символами φ_{mn} , φ_{kl} , φ_j обозначены нормированные функции каждого семейства собственных функций оператора Лапласа Δ , определенного в области Ω и удовлетворяющих условиям (18), (20), а символами λ_{mn} , λ_{kl} , λ_j – соответствующие собственные значения (см. [22]).

Теорема 9. [23] При любых $\nu \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \in \mathbb{R}$ множество \mathfrak{M} является простым банаховым C^∞ -многообразием, моделируемым пространством \mathfrak{U}_N^1 .

Отсюда в силу теорем 8 и 9 вытекает следующая

Теорема 10. При любых $\alpha, \beta, \delta, \nu \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \in \mathbb{R}$ существует бесконечномерное устойчивое и не более чем конечномерное неустойчивое инвариантные многообразия задачи Бенара для уравнений (17).

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить свою искреннюю благодарность Г.А. Свиридюку за постановку задачи и интерес к работе.

Литература

1. Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. – М.: Мир, 1985.
2. Coleman, B.N. Instability, uniqueness and nonexistence theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{xxt}$ on a strip / B.N. Coleman, R.J. Duffin, V.J. Mizel // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1965. – V.19. – P. 100 – 116.
3. Levine, H.A. Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Du_t = -Au + F(u)$ / H.A. Levine // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1973. – V.51, №5. – P. 371–386.
4. Showalter, R. E. Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations / R. E. Showalter. – London; San Francisco; Melbourne: Pitman, 1977.
5. Favini, A. Degenerate differential equations in Banach spaces / A. Favini, A. Yagi. – New York; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker Inc, 1999.
6. Pyatkov, S.G. Operator theory. Nonclassical problems / S.G. Pyatkov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2002.
7. Lyapunov – Shmidt method in nonlinear analysis and applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinithyn, M. Falaleev. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 2002.
8. Demidenko, G.V. Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest – order derivative / G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii. – New York; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003.
9. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.
10. Свиридюк, Г.А. Многообразие решений одного операторного сингулярного псевдопараболического уравнения / Г.А. Свиридюк // Докл. акад. наук СССР. – 1986. – Т.289, №6. – С. 1315 – 1318.

11. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для системы Осколкова / Г.А. Свиридюк, М.М. Якупов // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32, №11. – С. 1538 – 1543.
12. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, В.О. Казак // Мат. заметки. – 2002. – Т. 71, №2. – С. 292 – 297.
13. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство задачи Коши-Дирихле для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Изв. вузов. Математика. – 2003. – №9. – С. 36 – 41.
14. Китаева, О.Г. Устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия уравнения Осколкова / О.Г. Китаева, Г.А. Свиридюк // Неклассические уравнения математической физики: тр. семинара, посвященного 60-летию проф. В.Н. Врагова / Ин-т математики им. С.Л. Соболева СО РАН. – Новосибирск, 2005. – С. 161 – 166.
15. Китаева, О.Г. Устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия уравнения Хоффа / О.Г. Китаева // Вестн. МаГУ. Сер. Математика. – Магнитогорск, 2005. – Вып. 8. – С. 96 – 112.
16. Арнольд, В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд, Ю.С. Ильяшенко // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальное направление. – М., 1985. – Т. 1. – С.7 – 149.
17. Федоров, В.Е. О некоторых соотношениях в теории вырожденных полугрупп / В.Е. Федоров // Вестн. ЮУрГУ. Мат. моделирование и программирование. – 2008. №15 (115). – С. 89 – 99.
18. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором / Г.А. Свиридюк // Алгебра и анализ. – 1994. – Т.6, №5. С. 252 – 272.
19. Свиридюк, Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк// Изв. РАН. Сер. матем. – 1993. – Т.57, №3. – С. 192 – 207.
20. Свиридюк, Г.А. Некоторые математические задачи динамики вязкоупругих несжимаемых сред / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Вестн. МаГУ. Сер. Математика. Магнитогорск, 2005. – Вып. 8. – С. 5 – 33.
21. Осколков, А.П. Нелокальные задачи для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С.Л. Соболева / А.П. Осколков // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1991. – Т.198. – С. 31 – 48.
22. Загребина, С.А. Задача Шоултера – Сидорова – Веригина для линейных уравнений соболевского типа / С.А. Загребина // Неклассические уравнения математической физики: сб. тр. междунар. конф. «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», посвящ. 100-летию со дня рождения акад. И.Н.Векуа. – Новосибирск, 2007. – С. 150 – 157.
23. Якупов, М.М. Фазовые пространства некоторых задач гидродинамики: дис. ... канд. физ.-мат. наук./ М.М. Якупов. – Челябинск, 1999.

Кафедра «Уравнения математической физики»,
Южно-Уральский государственный университет
zsophiya@mail.ru

Поступила в редакцию 21 августа 2008 г.

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА И ЕЕ ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Г.А. Закирова, А.И. Седов

AN INVERSE SPECTRAL PROBLEM FOR LAPLACE OPERATOR AND IT'S APPROXIMATE SOLUTION

G.A. Zakirova, A.I. Sedov

Исследуются обратные спектральные задачи для математических моделей с оператором Лапласа. Построен алгоритм численного нахождения приближенного решения.

Ключевые слова: оператор Лапласа, обратная спектральная задача, приближенное решение

The authors consider inverse spectral problems for mathematical models with Laplace operator. They obtain a numerical algorithm for the approximate solution founding.

Keywords: Laplace operator, inverse spectral problem, approximate solution

Введение

Пусть

$$\Pi = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_N) : 0 \leq x_j \leq a_j, j = 1, \dots, N\}, a_j > 0.$$

В пространстве $L_2(\Pi)$ рассмотрим дискретный самосопряженный оператор T_0 , определенный краевой задачей Дирихле

$$-\Delta v = \lambda v, \quad v|_{\partial\Pi} = 0, \quad (1)$$

где Δ — оператор Лапласа, $\partial\Pi$ — граница Π .

В настоящей работе исследуется обратная задача для степени оператора T_0 , порожденного краевой задачей (1). Основным методом исследования является так называемый резольвентный метод, теоретически обоснованный в работах [1, 2]. Применяя идеи этого метода, мы доказываем теоремы существования решения поставленной обратной задачи. Впервые рассматривается случай, когда оператор Лапласа имеет непростой спектр. В работе также описывается процедура численного нахождения приближенного решения.

Отметим, что обратные спектральные задачи в различных постановках играют фундаментальную роль в различных разделах математики и имеют множество приложений в естествознании. Большинство работ в этом направлении связаны с обыкновенными дифференциальными операторами. Что касается операторов в частных производных, то здесь, в основном, рассматривается степень оператора Лапласа с простым спектром. Так, в работах [1 – 6] решена обратная задача для степени оператора Лапласа больше 2 на прямоугольнике. В работах [7 – 8] поставленная задача решена для степени больше 3/2, в работах [9 – 10] – для степени больше единицы. Обратная задача для оператора Лапласа с кратным спектром ранее не исследовалась.

1. Постановка обратной задачи

Рассмотрим оператор $T = \int_0^\infty \lambda^\beta dE(\lambda)$, являющийся степенью оператора T_0 , где $E(\lambda)$ — спектральное разложение единицы оператора T_0 , $\beta \geq 1$, $\lambda^\beta > 0$ при $\lambda > 0$.

Очевидно, спектр $\sigma(T)$ оператора T неоднократный. Иногда, для удобства будем нумеровать упорядоченные по возрастанию собственные числа $\lambda_m = \lambda_{(m_1, m_2, \dots, m_N)}$ оператора T и связанные с ними спектральные объекты одним нижним натуральным индексом и одним верхним, при этом верхний индекс будет отвечать за кратность ν_t собственного числа λ_t , т.е. $\lambda_t = \lambda_t^k = \lambda_t^j$, $k = \overline{1, \nu_j}$.

Пусть P — оператор умножения на вещественную функцию $p \in L_2(\Pi)$, называемую потенциалом.

Обозначим через μ_t собственные числа оператора $T + P$, занумерованные в порядке возрастания действительных частей с учетом алгебраической кратности, а через u_t — соответствующие им ортонормированные в $L_2(\Pi)$ собственные функции.

Рассмотрим следующую обратную задачу спектрального анализа.

Пусть дана последовательность комплексных чисел $\{\xi_t\}_{t=1}^\infty$, близкая к спектру оператора T . При различных степенях $\beta \geq 1$ требуется доказать существование оператора P , такого что спектр $\sigma(T + P)$ совпадает с последовательностью $\{\xi_t\}_{t=1}^\infty$.

2. Основные спектральные тождества

Сформулируем вспомогательные утверждения, на которых базируется доказательства основных результатов данной статьи. Доказательства самих вспомогательных утверждений приведены в работе [11].

Обозначим:

$$\begin{aligned} R_0(\lambda) &= (T - \lambda E)^{-1}, \quad R(\lambda) = (T + P - \lambda E)^{-1}; \\ a_t &= \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda = \frac{\lambda_{t+1} + \lambda_t}{2}\}, \quad \Gamma_t = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \in a_t\}, \quad \gamma_t = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda_t - \lambda| = r_0\}, \\ r_t &= \frac{1}{2} \min\{\lambda_{t+1} - \lambda_t; \lambda_t - \lambda_{t-1}\}, \quad r_0 = \inf_t r_t; \\ \Omega_t &= \{\lambda : |\lambda_t - \lambda| \geq r_0\}, \quad \Omega = \bigcap_{t=1}^\infty \Omega_t, \quad V = \prod_{j=1}^n a_j. \end{aligned}$$

Лемма 1.

Если $\|P\| < r/2$, где $0 < r \leq r_0$, то оператор $T + P$ — дискретен, причем

(i) если $R_0(\lambda) \in \mathfrak{S}_q$, то $R(\lambda) \in \mathfrak{S}_q$, $1 \leq q < \infty$,

(ii) если $\lambda_t \in \mathbb{C} \setminus \Omega_t$, то $\mu_t^s \in \mathbb{C} \setminus \Omega_t$, $s = \overline{1, \nu_t}$, ν_t — кратность собственного числа λ_t .

Теорема 1. Если $\beta \geq N/2$, $\|P\| < r/2$, где $0 < r \leq r_0$, то для любого $t \in \mathbb{N}$ имеет место спектральное тождество:

$$\sum_{s=1}^{\nu_t} \mu_t^{(s)} = \nu_t \lambda_t - \sum_{s=1}^{\nu_t} (P v_t^{(s)}, v_t^{(s)}) + \alpha_t(p), \quad (2)$$

$$\text{где } \alpha_t(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_t}} \lambda \operatorname{Sp} \left[R(\lambda) (P R_0(\lambda))^2 \right] d\lambda.$$

3. Степень оператора Лапласа с потенциалом на N-мерном параллелепипеде

В данном разделе доказывается теорема существования решения обратной спектральной задачи для оператора Лапласа на многомерном параллелепипеде. Приводятся условия, налагаемые на произвольную последовательность, при соблюдении которых спектр возмущенного оператора будет совпадать с данной последовательностью.

Лемма 2.

Если $\beta > \frac{3N}{4}$, то ряд $\sum_{t=1}^{\infty} r_t^2 \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^4$ сходится.

Если $\beta > N$, то ряд $\sum_{t=1}^{\infty} r_t \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^2$ сходится.

Обозначим сумму первого ряда через s^2 , а второго через s_{∞} .

Основные результаты данного раздела выражают следующие утверждения.

Теорема 2. Пусть $\beta > \frac{3N}{4}$, $r \in (0, \min\{r_0, \frac{1}{s\sqrt{2^N}}\})$. Если для комплексной последовательности $\{\xi_t^k\}$ выполняется неравенство:

$$\sqrt{2^N V} \left(\sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu_t} |\xi_t^k - \lambda_t|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{r}{2}(1 - \omega),$$

где $\omega = \sqrt{2^N} sr < 1$, то существует потенциал $p \in L_2(\Pi)$ такой, что для любого $t \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\nu_t} \xi_t^k = \sum_{k=1}^{\nu} \mu_t^k, \quad (3)$$

где $\sigma(T + P) = \{\mu_t^k\}$.

Теорема 3. Пусть $\beta > N$, $r < \min\{r_0, \frac{1}{s_{\infty} 2^N}\}$, $\omega = 2^N s_{\infty} r$. Если для комплексной последовательности $\{\xi_t^k\}$ выполняется неравенство:

$$2^N \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu_t} |\xi_t^k - \lambda_t| < \frac{r}{2}(1 - \omega),$$

то существует потенциал $p \in L_{\infty}(\Pi)$, такой, что для любого $t \in \mathbb{N}$ выполняется

$$\sum_{k=1}^{\nu_t} \xi_t^k = \sum_{k=1}^{\nu} \mu_t^k, \quad (4)$$

где $\sigma(T + P) = \{\mu_t^k\}$.

Введем в рассмотрение следующую систему функций:

$$\varphi_m(x) = \sqrt{\frac{2^{N+q}}{V}} \prod_{j=1}^N \cos\left(\frac{2\pi m_j x_j}{a_j}\right),$$

где $m = (m_1, \dots, m_N)$, $m_j \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, q – число ненулевых индексов в мультииндексе m . При $m_j \in \mathbb{N}$ эту систему будем нумеровать нижним и верхним индексами так же, как и систему $\{v_m\}$, т.е. в соответствии с нумерацией собственных чисел λ_t^k .

Лемма 3. Множества M вещественных функций $p \in L_2(\Pi)$, обладающих следующими свойствами:

$$p(a_1 - x_1, x_2, \dots, x_N) = p(x_1, a_2 - x_2, \dots, x_N) = \dots = p(x_1, x_2, \dots, a_N - x_N) = \\ = p(x_1, x_2, \dots, x_N) \text{ для почти всех } (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \Pi, \quad (5)$$

$$(p, \varphi_m) = 0, \text{ при } \prod_{j=1}^N m_j = 0, \quad m_j = 0, 1, \dots, \quad (6)$$

$$\|p\|_{L_2} \leq \frac{r}{2}. \quad (7)$$

замкнуто в $L_2(\Pi)$.

Лемма 4. Если $\|P_j\| \leq r/2$, $0 < r \leq r_0$, $j = 1, 2$, то

$$|\alpha_t(p_1) - \alpha_t(p_2)| \leq r r_t \|P_1 - P_2\| \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^2.$$

Перейдем к доказательству теоремы 2.

Доказательство. В пространстве $L_2(\Pi)$ рассмотрим уравнение относительно p :

$$p = \alpha_0 - \alpha(p), \quad (8)$$

где

$$\alpha_0 = (-1)^N \sqrt{2^N V} \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu_t} (\xi_t^k - \lambda_t) \varphi_t^k, \quad (9)$$

$$\alpha(p) = (-1)^N \sqrt{2^N V} \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu_t} \frac{\alpha_t(p)}{\nu_t} \varphi_t^k. \quad (10)$$

Из вида уравнения следует, что решение удовлетворяет свойствам (5) и (6).

Введем оператор $A : L_2(\Pi) \rightarrow L_2(\Pi)$, определяемый равенством: $Ap = \alpha_0 - \alpha(p)$.

Так как $\|Ap\|_{L_2} \leq \|\alpha_0\| + \|\alpha(p)\| \leq \frac{r}{2}(1 - \omega) + \frac{r}{2}\omega = \frac{r}{2}$, то оператор A отображает замкнутый шар $U(0, \frac{r}{2})$ в себя. Можно показать, что пересечение данного шара с множеством функций, удовлетворяющих свойствам (5) и (6), замкнутое множество. Используя лемму (4) покажем, что оператор A сжимающий в этом подпространстве.

$$\|Ap_1 - Ap_2\|_{L_2} = \|\alpha(p_1) - \alpha(p_2)\| = \sqrt{2^N V} \left(\sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu_t} \frac{|\alpha_t(p_1) - \alpha_t(p_2)|^2}{\nu_t} \right)^{1/2} \leq$$

$$\sqrt{2^N} r \|p_1 - p_2\|_{L_2} = \omega \|p_1 - p_2\|_{L_2}.$$

По принципу С.Банаха уравнение (8) имеет единственное решение p .

Определим оператор P , действующий в $L_2(\Pi)$, следующим образом: $Pv(x) = p(x)v(x)$, где p — решение уравнения (8). Оператор $T + P$ дискретный, и его собственные числа μ_m также можно занумеровать одним нижним и одним верхним индексами. Покажем, что решение p и есть искомый потенциал.

Умножим скалярно уравнение (8) на функции φ_t^k и просуммируем по $k = \overline{1, \nu_t}$. Получим

$$\sum_{k=1}^{\nu_t} (p, \varphi_t^k) = (-1)^N \sqrt{2^N V} \sum_{k=1}^{\nu_t} \xi_t^k - \nu_t \lambda_t - (-1)^N \sqrt{2^N V} \alpha_t(p). \quad (11)$$

Используя свойства (5)–(6), преобразуем

$$(Pv_m, v_m) = \frac{2^N}{V} \int_{\Pi} p(x_1, \dots, x_N) \prod_{j=1}^N \sin^2\left(\frac{\pi m_j x_j}{a_j}\right) dx_1 \dots dx_N =$$

$$\frac{(-1)^N}{V} \int_{\Pi} p(x_1, \dots, x_N) \prod_{j=1}^N \cos\left(\frac{2\pi m_j x_j}{a_j}\right) dx_1 \dots dx_N = \frac{(-1)^N}{\sqrt{2^N V}}(p, \varphi_m).$$

Отсюда, учитывая кратность

$$\sum_{k=1}^{\nu_t} (Pv_t^k, v_t^k) = \frac{(-1)^N}{\sqrt{2^N V}} \sum_{k=1}^{\nu_t} (p, \varphi_t^k). \quad (12)$$

Подставляя (11) в (12) и сравнивая с (2), получаем (3). \square

Замечание 1. Оператор $T + P$, обладающий свойством (3), неединственен.

Действительно, достаточно поменять местами два члена последовательности $\{\xi_t^k\}_{t=1}^{\infty}$, попадающих в одну сумму $\sum_{k=1}^{\nu_t} |\xi_t^k - \lambda_t|^2$, и мы получим другую последовательность $\{\tilde{\xi}_t^k\}_{t=1}^{\infty}$.

Объединим в один класс P все операторы, спектр которых обладает свойством (3). Если мы не будем различать представителей этого класса, то можем говорить о единственности решения обратной задачи.

4. Возмущенный оператор Лапласа с неядерной резольвентой на N -мерном параллелепипеде

Как уже говорилось во введении, чаще всего в обратных задачах рассматривается степень оператора Лапласа, так как в данном случае мы будем иметь ядерную резольвенту. Но в приложениях более важную роль играет сам оператор Лапласа, а не его степени. С помощью специально подобранных аналитических функций в работе [12] удалось получить результат для оператора Лапласа с простым спектром, но формулировался он не для самих собственных чисел, а для значений введенных функций, зависящих от собственных чисел. В данной работе полученный результат обобщен на случай кратного спектра.

Пусть функции $f_t : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ таковы, что $f_t(\lambda_n) = \delta_{tn}$, где δ_{tn} — символ Кронекера и пусть $\beta_t = \sup_{\operatorname{Re} \lambda > 0} (|\lambda|^2 \cdot |f_t(\lambda)|) < \infty$. Введем функции $g_t(\lambda) = \int_0^\lambda f_t(z) dz$.

Можно показать, что функции

$$f_t(\lambda) = A_t \left(\frac{e^{-\lambda} - 1}{\lambda} \right)^2 \left(\prod_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda} e^{-\lambda_k}) \right) \left(\prod_{k=1, k \neq t}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda}{\lambda_k + \lambda} \right), \operatorname{Re} \lambda > 0,$$

где нормирующие множители A_t выбраны из условия $f_t(\lambda_t) = 1$, $t \in \mathbb{N}$ удовлетворяют указанным выше условиям.

Теорема 4. Если для комплексной последовательности $\{\xi_t^{(k)}\}$ существует подпоследовательность $\{c_t\} \subset \{a_t\}$ такая, что выполняются следующие неравенства:

$$(i) \omega = 2^{N-1} r_0 \max_{\lambda \in \Omega} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\beta_t}{c_t} < 1,$$

$$(ii) \quad 2^N \sum_{t=1}^{\infty} \left| \sum_{\lambda_j < c_t} \sum_{k=1}^{\nu_j} \left(g_t(\xi_j^{(k)}) - g_t(\lambda_j) \right) \right| < \frac{r_0}{2} (1 - \omega),$$

то существует потенциал p , такой, что для любого $t \in \mathbb{N}$

$$\sum_{\lambda_j < c_t} \sum_{k=1}^{\nu_j} g_t(\mu_j^{(k)}) = \sum_{\lambda_j < c_t} \sum_{k=1}^{\nu_j} g_t(\xi_j^{(k)}).$$

Доказательство этой теоремы основывается на тех же идеях, что и теорема(2)

5. Степень оператора Лапласа с потенциалом на равнобедренном прямоугольном треугольнике

В данном разделе впервые рассматривается непрямоугольная область.

Пусть $K = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y \leq \pi\}$. В пространстве $L_2(K)$ рассмотрим дискретный самосопряженный полуограниченный снизу оператор T_0 , порожденный краевой задачей Дирихле (1).

Введем оператор $T = \int_0^{\infty} \lambda^{\beta} dE(\lambda)$, где $E(\lambda)$ — спектральное разложение единицы, $\beta > 1$, $\lambda^{\beta} > 0$ при $\lambda > 0$.

Нетрудно показать, что собственным числам $\lambda_{mn} = (m^2 + n^2)^{\beta}$ оператора T соответствуют собственные функции $v_{mn} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\sin mx \sin ny - \sin nx \sin my)$, $m > n > 0$, образующие ортонормированный базис в $L_2(K)$.

Положим:

$$1) s_{\Delta} = \sum_{m>n>0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{2k}} r_{2^k(m+n), 2^k(m-n)} \max_{\lambda \in \gamma_{2^k(m+n), 2^k(m-n)}} \|R_0(\lambda)\|_2^2 + \frac{1}{2^{2k+1}} r_{2^{k+1}m, 2^{k+1}n} \max_{\lambda \in \gamma_{2^{k+1}m, 2^{k+1}n}} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \right);$$

$$2) 0 < r_{\Delta} < \min \left\{ \frac{1}{3\sqrt{2}s_{\Delta}}; r_0 \right\};$$

$$3) \phi_{mn} = \frac{2}{\pi} (\cos mx \cos ny + \cos nx \cos my), \quad m, n = 0, 1, \dots$$

Теорема 5. Пусть $\beta > 2$, $r \in (0, \min\{r_0, \frac{1}{3\sqrt{2}s_{\Delta}}\})$. Если для комплексной последовательности $\{\xi_{mn}\}$ выполняется неравенство:

$$\frac{4}{\pi} \sum_{m>n>0} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} (\xi_{2^k(m+n), 2^k(m-n)} - \lambda_{2^k(m+n), 2^k(m-n)}) - \frac{1}{2^{2k+1}} (\xi_{2^{k+1}m, 2^{k+1}n} - \lambda_{2^{k+1}m, 2^{k+1}n}) \right| < \frac{r}{2} (1 - \omega),$$

где $\omega = 3\sqrt{2}s_{\Delta}r < 1$, то существует функция $p \in L_{\infty}(K)$ такая, что для любого $t \in \mathbb{N}$

$$\sum_{m^2+n^2=\lambda_t} (\mu_{mn} - \frac{1}{2} \mu_{m+n, m-n}) = \sum_{m^2+n^2=\lambda_t} (\xi_{mn} - \frac{1}{2} \xi_{m+n, m-n}), \quad (4.1)$$

где $\sigma(T + P) = \{\mu_{mn}\}$.

6. Численные расчеты

В этом разделе описывается процедура получения приближенного решения обратной спектральной задачи. Для этого используется основное уравнение, приведенное в процессе

доказательства теоремы (2) существования решения обратной задачи. Для простоты ограничимся изложением двумерного случая.

Поставим задачу найти приближенное решение, существование которого показано в теореме (2).

Введем в рассмотрение следующую систему функций:

$$\varphi_{mn}(x) = \frac{4}{\sqrt{ab}} \cos \frac{2\pi mx}{a} \cos \frac{2\pi ny}{b}.$$

При $m, n > 0$ эту систему будем нумеровать нижним и верхним индексами в соответствии с нумерацией собственных чисел λ_t^k .

Уравнение $p = \alpha_0 - \alpha(p)$, где

$$\alpha_0 = \sqrt{ab} \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu_t} (\xi_t^k - \lambda_t^k) \varphi_t^k, \quad \alpha(p) = \sqrt{ab} \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu_t} \frac{\alpha_t(p)}{\nu_t} \varphi_t^k,$$

$$\alpha_t(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} \lambda \operatorname{Sp}[R(\lambda)(PR_0(\lambda))^2] d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} \lambda \operatorname{Sp}\left[\sum_{k=2}^{\infty} R_0(\lambda)(PR_0(\lambda))^k\right] d\lambda,$$

имеет единственное решение p .

Найти его можно методом последовательных приближений.

Пусть $p_0 \equiv 0$, тогда $p_{t+1} = \alpha_0 - \alpha(p_t)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} p_t = p$.

Найдем приближенное решение \tilde{p} .

$\tilde{p} = \alpha_0 - \tilde{\alpha}(\alpha_0)$, где

$$\tilde{\alpha}(p) = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu_t} \frac{\tilde{\alpha}_t(p)}{\nu_t} \varphi_t^k, \quad \tilde{\alpha}_t(p) = \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_t^{(k)}(p),$$

здесь

$\alpha_t^{(k)}$ — k -тая поправка теории возмущений:

$$\alpha_t^{(k)}(p) = \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int_{\gamma_t} \lambda \operatorname{Sp} [R_0(\lambda)(PR_0(\lambda))^k] d\lambda = \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi i k} \int_{\gamma_t} \operatorname{Sp}[PR_0(\lambda)]^k d\lambda.$$

Оценим разности k -х поправок, $k \geq 2$.

$$\begin{aligned} |\alpha_t^{(k)}(p) - \alpha_t^{(k)}(p_1)| &= \frac{1}{2\pi k} \left| \int_{\gamma_t} \operatorname{Sp} [(PR_0(\lambda))^k - (P_1R_0(\lambda))^k] d\lambda \right| \leq \\ &\frac{r_t}{k} \max_{\lambda \in \gamma_t} \left\| (PR_0(\lambda))^k - (P_1R_0(\lambda))^k \right\|_1 \leq \\ &\frac{r_t}{k} \max_{\lambda \in \gamma_t} \left\| \sum_{s=0}^{k-1} (P_1R_0(\lambda))^s (P - P_1)R_0(\lambda)(PR_0(\lambda))^{k-s-1} \right\|_1 = \\ &\frac{r_t}{k} \max_{\lambda \in \gamma_t} \left(\sum_{s=0}^{k-1} \|P - P_1\| \left(\frac{r}{2}\right)^{k-1} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \|R_0(\lambda)\|^{k-2} \right) = \\ &r_t \|P - P_1\| \left(\frac{r}{2}\right)^{k-1} \max_{\lambda \in \gamma_t} \left(\|R_0(\lambda)\|_2^2 \|R_0(\lambda)\|^{k-2} \right). \end{aligned}$$

Здесь P_1 — оператор умножения на p_1 , т.е. на α_0 . Далее оценим модуль разности:

$$|\alpha_t(p) - \alpha_t(p_1)| \leq r_t \|P - P_1\| \frac{r}{2} \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{2}\right)^k \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|^k \leq$$

$$rr_t \|P - P_1\| \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^2 < rr_t (\|P\| + \|P_1\|) \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^2 < \frac{2r^2 r_t}{\sqrt{ab}} \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^2.$$

Итак,

$$|\alpha_t(p) - \tilde{\alpha}_t(\alpha_0)| < \frac{2r^2 r_t}{\sqrt{ab}} \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^2.$$

$$\tilde{\alpha}_t(\alpha_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} \lambda \operatorname{Sp}[R_0(\lambda)(P_1 R_0(\lambda))^2] d\lambda =$$

$$= \sum_{j \neq t} \sum_{k=1}^{\nu_t} \frac{(\alpha_0 \varphi_t^k, \varphi_j^k) \cdot (\alpha_0 \varphi_j^k, \varphi_t^k)}{\lambda_t^k - \lambda_j^k} = \sum_{j \neq t} \sum_{k=1}^{\nu_t} \frac{(\alpha_0 \varphi_t^k, \varphi_j^k)^2}{(\lambda_t^k - \lambda_j^k)}.$$

Таким образом, $\tilde{p} = \alpha_0 - \sqrt{ab} \sum_t (\sum_{j \neq t} \sum_{k=1}^{\nu_t} \frac{(\alpha_0 \varphi_t^k, \varphi_j^k)^2}{(\lambda_t^k - \lambda_j^k)}) \varphi_t^k$.

На основе полученного результата в среде Maple 6 впервые создан программный продукт, позволяющий численно находить приближенное решение поставленной обратной задачи.

Положим для примера $a = 1$, $b = \sqrt[4]{3}$, $\beta = 5/2$, $\xi_{mn} = \lambda_{mn} + 0.0001$. Тогда приближенное решение, вычисленное по первым четырем членам последовательности $\{\xi_{mn}\}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{p} = & 0.3999996438 \cos(25.13274123x) \cos(9.548376831y) + 0.4006108966 + \\ & + 0.3996028571 \cos(4.774188417y) + 0.3999774004 \cos(9.548376831y) + \\ & + 0.3999955835 \cos(14.32256525y) + 0.3998713899 \cos(6.283185308x) + \\ & + 0.3999953594 \cos(19.09675367y) + 0.3999939656 \cos(6.283185308x) \cos(9.548376831y) + \\ & + 0.3999665522 \cos(6.283185308x) \cos(4.774188417y) + \\ & + 0.3999990308 \cos(6.283185308x) \cos(19.09675367y) + \\ & + 0.3999987184 \cos(6.283185308x) \cos(14.32256525y) + 0.3999958620 \cos(12.56637062x) + \\ & + 0.4000013739 \cos(12.56637062x) \cos(14.32256525y) + \\ & + 0.3999970936 \cos(12.56637062x) \cos(9.548376831y) + \\ & + 0.3999958348 \cos(12.56637062x) \cos(4.774188417y) + \\ & + 0.4000019328 \cos(18.84955592x) + 0.3999996560 \cos(12.56637062x) \cos(19.09675367y) + \\ & + 0.3999997128 \cos(18.84955592x) \cos(14.32256525y) + \\ & + 0.3999993495 \cos(18.84955592x) \cos(9.548376831y) + \\ & + 0.3999984754 \cos(18.84955592x) \cos(4.774188417y) + \\ & + 0.3999999510 \cos(18.84955592x) \cos(19.09675367y) + \\ & + 0.3999999768 \cos(25.13274123x) + 0.3999999242 \cos(25.13274123x) \cos(19.09675367y) + \\ & + 0.3999998700 \cos(25.13274123x) \cos(14.32256525y) + \\ & + 0.3999995842 \cos(25.13274123x) \cos(4.774188417y). \end{aligned}$$

Литература

1. Дубровский, В.В. К обратной задаче для степени оператора Лапласа с непрерывным потенциалом / В.В. Дубровский, А.В. Нагорный // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, № 9. – С. 1563 – 1567.
2. Дубровский, В.В. Обратная задача для степени оператора Лапласа с потенциалом из L_2 / В.В. Дубровский, А.В. Нагорный // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, № 9. – С. 1552 – 1561.
3. Дубровский, В.В. Устойчивость решения обратных задач спектрального анализа / В.В. Дубровский, А.В. Нагорный А.В. // Дифференц. уравн. – 1992. – Т. 28, № 5. – С. 839 – 843.
4. Дубровский, В.В. Теорема существования в обратной задаче спектрального анализа / В.В. Дубровский // Дифференц. уравн. – 1997. – Т. 33, № 12. – С. 1702 – 1703.
5. Дубровский, В.В. Теорема о существовании решения обратной задачи спектрального анализа для степени оператора Лапласа / В.В. Дубровский, А.С. Великих // Электромагнитные волны & электронные системы. – 1998. – Т. 3, № 5. – С. 6 – 9.
6. Дубровский, В.В. Обратная задача спектрального анализа и интерполяция по Л. Карлесону / В.В. Дубровский // Математические заметки. – 2001. – Т. 70, вып. 3. – С. 468 – 471.
7. Садовничий, В.А. Об обратной задаче спектрального анализа для степени оператора Лапласа с потенциалом / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский, Е.А. Пузанкова // Докл. Акад. наук. – 1999. – Т. 367, № 3. – С. 307 – 309.
8. Садовничий, В.А. Обратная задача спектрального анализа для степени оператора Лапласа на прямоугольнике / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский, Е.А. Пузанкова // Дифференц. уравн. – 2000. – Т. 36, № 12. – С. 1695 – 1698.
9. Садовничий, В.А. Обратная задача спектрального анализа для степени оператора Лапласа с потенциалом на прямоугольнике / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский, В.В. Дубровский (мл.) // Докл. Акад. наук. – 2001. – Т. 377, № 3. – С. 310 – 312.
10. О восстановлении потенциала в обратной задаче спектрального анализа / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский, В.В. Дубровский (мл.), Е.А. Пузанкова // Докл. Акад. наук. – 2001. – Т. 380, № 4. – С. 462 – 464.
11. Седов, А.И. Обратная задача спектрального анализа для степени оператора Лапласа на равнобедренном прямоугольном треугольнике / А.И. Седов, Г.А. Закирова // Вестн. СамГУ, Естественнонаучная серия. – 2008. – № 2(61). – С. 34 – 42.
12. Седов, А.И. Обратная задача спектрального анализа для одного дифференциального оператора в частных производных с неядерной резольвентой / А.И. Седов, В.В. Дубровский // Электромагнитные волны & электронные системы. – 2005 – Т. 10, № 1 – 2. – С. 1 – 8.

Кафедра математического анализа,
Магнитогорский государственный университет
zakirova81@mail.ru

Поступила в редакцию 22 сентября 2008 г.

ЛЕОНИД ДАВИДОВИЧ МЕНИХЕС (к шестидесятилетию со дня рождения)

В.И. Заляпин

LEONID DAVIDOVICH MENIKHES (to the sixtieth anniversary)

Vladimir I. Zalyapin

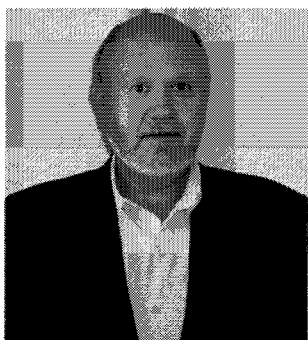
Статья посвящена шестидесятой годовщине со дня рождения профессора, доктора физико-математических наук, заведующего кафедрой функционального анализа ЮУрГУ, председателя Челябинского регионального отделения Научно-методического Совета по математике Минобрнауки РФ Менихеса Леонида Давидовича.

Ключевые слова: Менихес Л.Д., юбилей, некорректные задачи, регуляризация

This article is dedicated to the sixtieth anniversary of Menikhes Leonid Davidovich. He is Professor, Dr. of Physics and Mathematics, Head of the Functional Analysis Dep. of the SUSU, Chairman of Chelyabinsk Regional Branch of the Scientific and Methodological Council of Mathematics of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation.

Keywords: Menikhes L., anniversary, ill-posed problems, regularization

Введение



2 октября 2007 года исполнилось 60 лет со дня рождения заведующего кафедрой функционального анализа ЮУрГУ, профессора, доктора физико-математических наук Леонида Давидовича Менихеса. Его выдающиеся работы в области регуляризации некорректных задач широко известны в нашей стране и за рубежом. Он самобытный и оригинальный педагог – лекции Леонида Давидовича по математическому и функциональному анализу пользуются популярностью у студентов. С именем Леонида Давидовича связаны многие яркие страницы истории математики в ЧПИ–ЧГТУ–ЮУрГУ.

1. Начало

Леонид Давидович Менихес родился 2 октября 1947 года в Челябинске. Его отец – крупный инженер, один из руководителей ЧТЗ, из когорты сподвижников легендарного «директора Танкограда» И.М. Зальцмана – родился в г. Одессе. Там же окончил машиностроительный (впоследствии – политехнический) институт, после чего был направлен на работу в г. Харьков. В сентябре 1941 года вместе с Харьковским моторным заводом был эвакуирован в Челябинск. Мать – домохозяйка.

В 1955 году Л.Д. Менихес начал учиться в школе №48, которая располагалась рядом с домом. Проявив недюжинные способности и интерес к математике, в 9 классе перешел (поступил!) в математическую школу №30.

В школьные годы он принимал участие в олимпиадах по математике разного ранга. Неоднократно был призером и победителем областных олимпиад. Однако попробовать свои силы во Всесоюзной олимпиаде Леониду Давидовичу не пришлось. Как раз в тот год, когда Леня получил первую премию на областной олимпиаде, областным руководством образования было принято решение послать на Всесоюзную олимпиаду учеников выпускных классов. А он учился тогда только в восьмом

2. Московский университет. Студенчество

В 1965 году, досрочно сдав экзамены сразу за два класса – 10 и 11, Леонид Давидович закончил школу с серебряной медалью (4 по русскому языку) и в этом же году поступил на механико-математический факультет МГУ, на специальность «математика». Еще на младших курсах, когда подавляющее большинство соучеников почти все свое время посвящали текущему учебному процессу — посещению лекций и практических занятий, сдаче экзаменов — Леонид Давидович начал интересоваться другой, неучебной, математикой. Он стал посещать спецкурсы, не являющиеся обязательными для младшекурсника, участвовал в работе нескольких спецсеминаров. И хотя глубоко ничем в это время не занимался, но укрепил свой интерес к математике и заложил основы своего личного видения математики, как науки и как сферы приложения своих сил.

В соответствии с учебным планом механико-математического факультета МГУ, начиная с третьего курса каждый студент начинал заниматься научной деятельностью под руководством персонального наставника. Интересы Леонида Давидовича к этому моменту вполне определились и он выбрал своим руководителем одного из крупнейших советских математиков, специалиста по метрической теории функций члена-корреспондента АН СССР Д.Е. Меньшова. Основные работы Меньшова Д.Е. были посвящены действительному и комплексному анализу, а полученные им результаты на долгие годы определили направления развития математической науки в мире. Специфической особенностью семинара Д.Е. Меньшова, который стал посещать Леонид Давидович, было критическое направление мышления его участников, выражавшееся в глубоком и скрупулезном анализе изучавшихся там проблем, с одной стороны, и умении построить, сконструировать контрпример к формулируемым участниками семинара утверждениям, с другой. Леонид Давидович, обладая сходным стилем мышления, органично вписался в работу семинара.

Тематика его первой научной работы была связана с проблемой суммирования рядов. В этой классической области Леониду Давидовичу удалось получить новый результат о критериях регулярности суммирования по мере. Это направление исследований впоследствии (2006 – 2007 гг.) было продолжено его ученицей А. Новичихиной.

Дипломная работа Менихеса Л.Д. была посвящена исследованию множителей Вейля.

Напомним читателю, что если $\{\varphi_n\}$ – ортонормированная система, то множителем сходимости Вейля называется неубывающая положительная последовательность $\{\omega_n\}$ такая, что из сходимости ряда $\sum a_n^2 \cdot \omega_n$ следует сходимость почти всюду на $[0; 1]$ ряда $\sum a_n \cdot \varphi_n(t)$. Многие математики (Фату, Г. Вейль, Планшерель, Харди, Лузин и др.) находили различные множители Вейля для тригонометрических и ортогональных рядов. Отдельными свойствами упомянутых множителей интересовались А.Н. Колмогоров, П.Л. Ульянов и др. Фундаментальные результаты для них в двадцатых годах прошлого века получил Д.Е. Меньшов.

В 50-х годах XX века венгерский математик К. Тандори усилил ряд утверждений Д.Е. Меньшова, в частности, он доказал, что для любой возрастающей стремящейся к бесконечности последовательности $\{\omega_n\}$ такой, что $\omega_n = O(\log^2 n)$, существует ортонормированная система $\{\varphi_n\}$ такая, что $\{\omega_n\}$ – ее точный множитель Вейля.

Д.Е. Меньшов поставил перед Леонидом Давидовичем задачу: для любой ли такой последовательности существует полная ортонормированная система $\{\varphi_n\}$, для которой $\{\omega_n\}$ – ее точный множитель Вейля?

Студент пятого курса Л.Д. Менихес в своей дипломной работе положительно ответил на этот вопрос.

Д.Е. Меньшов хотел оставить Леонида Давидовича в аспирантуре, однако отдельные технические и организационные трудности не позволили ему этого сделать, и в 1970 году Леонид Давидович закончил обучение в МГУ и был направлен на работу в Челябинский политехнический институт, на кафедру высшей математики.

3. Политехнический институт

Челябинский политехнический институт представлял собой типичный ВУЗ «оборонного значения», с сильными в научном и прикладном отношении инженерно-техническими кафедрами и факультетами. Подавляющее большинство специальностей были «математикоемкими» и требовали фундаментальной подготовки в области математики. Поэтому кафедры, обеспечивающие математическую подготовку студентов ЧПИ, традиционно были укомплектованы квалифицированными и знающими сотрудниками.

Кафедра высшей математики №1, куда приехал Леонид Давидович после окончания МГУ, возглавлялась доцентом А.Д. Кацманом – хорошим математиком, блестящим педагогом и руководителем, много сделавшим для развития математики в Челябинске. А.Д. Кацман собрал на кафедре крепких профессионалов, которые вели учебный процесс по курсу высшей математики на ряде факультетов ЧПИ, успешно справляясь с поставленными перед ними учебно-методическими задачами. Однако научный потенциал кафедры был невысок. Несмотря на все усилия заведующего по активизации научной деятельности, отсутствие значимой научной школы и лоскутность интересов отдельных исследователей не позволяли кафедре выйти на серьезный научный уровень.

Л.Д. Менихес начал работу на кафедре в должности ассистента. Запас знаний, полученных в МГУ, позволял молодому преподавателю, даже при отсутствии опыта педагогической работы, не тратить значительных усилий и времени на подготовку к занятиям, однако большая академическая нагрузка (до 24(!) часов в неделю «у доски») и отсутствие на кафедре должной научной атмосферы не благоприятствовали усердным занятиям наукой.

Леонид Давидович вел занятия со студентами, одновременно не чураясь работы со школьниками. Олимпиады, конкурсы, физико-математическая школа, организованная в ЧПИ по инициативе А.Д. Кацмана – вот поле деятельности и круг интересов молодого сотрудника кафедры.

Ясно, что долго так продолжаться не могло – творческая составляющая менталитета Леонида Давидовича требовала выхода, и, благодаря содействию заведующего кафедрой, в 1973 году Л.Д. Менихес поступил в аспирантуру Уральского государственного университета, к члену-корреспонденту АН СССР В.К. Иванову.

4. Уральский университет. Аспирантура

2 октября 1973 года Леониду Давидовичу исполнилось 26, Валентину Константиновичу Иванову за день до этого исполнилось 65. Известный советский математик, один из создателей и лидеров Уральской математической школы, автор многочисленных трудов по алгебре, теории чисел, теории обобщенных функций, математической физике, один из основоположников теории решения некорректных задач, и молодой, пылкий математик быстро нашли общий язык.

Первой задачей, предложенной Леониду Давидовичу маститым ученым, была проблема умножения обобщенных функций. Еще в 30-х годах прошлого столетия Л. Шварц показал, что нельзя определить произведение распределений так, чтобы сохранялись основные свойства произведения функций. В.К. Иванов ввел так называемые гиперраспределения и показал, что можно определить произведение распределений медленного роста так, что произведением распределений будет гиперраспределение и нужные свойства при этом сохраняются. Леонид Давидович обобщил результат Иванова В.К., доказав, что аналогичным образом можно определить умножение произвольных распределений.

В то время в центре научных интересов Иванова В.К. и его учеников находились проблемы вычислительной математики, в особенности вопросы, связанные с регуляризацией некорректных задач. Незадолго до этого (1966) работы Иванова В.К. и академика Тихонова А.Н. в этом направлении были удостоены Ленинской премии. Леонид Давидович, находясь в кругу учеников Иванова В.К., не мог пройти мимо этой новой, бурно развивающейся теории.

Побудительным мотивом, заставившим Л.Д. Менихеса заняться теорией некорректных задач, стало, конечно, общение с В.К. Ивановым, однако решающую роль в определении конкретного направления исследований Леонида Давидовича сыграл научный контакт с В.А. Винокуровым, исследования которого отличались тонкостью анализа и глубиной теоретического осмысления возникавших в новой теории проблем.

Квалифицированное руководство, атмосфера научного поиска, общение с активно работающими продуктивными математиками благотворно сказывалось на научной деятельности Л.Д. Менихеса. Им были получены важные результаты по регуляризуемости отображений — найден критерий линейной регуляризуемости в терминах теории двойственности банаховых пространств, исследована регуляризуемость спектральных операторов и т.п. В течение нескольких лет он опубликовал немалое число работ, из них 4 – в Докладах АН СССР. Но главным результатом стал пример нерегуляризуемого интегрального уравнения.

В своих первых работах (1963) по регуляризации интегральных уравнений А.Н. Тихонов показал, что построенный им регуляризатор, регуляризует интегральное уравнение не на всех, а только на дифференцируемых функциях. Возник вопрос — как регуляризовать интегральное уравнение на всем пространстве $C[0; 1]$? Усилия всех исследователей в то время были направлены на поиски подобной регуляризации, поскольку считалось, что если и есть нерегуляризуемые уравнения, то с плохими (например, разрывными) ядрами. Были найдены и описаны различные классы регуляризуемых интегральных уравнений.

Тем более неожиданным был построенный (1978) Леонидом Давидовичем пример нерегуляризуемого интегрального уравнения с бесконечно дифференцируемым симметричным ядром.

Основную роль в конструкции примера играет понятие характеристики подпространств в сопряженных пространствах, введенное в 40-х годах 20 века французским математиком Ж. Диксмье. Все обычные подпространства, встречающиеся в анализе, имеют ненулевую характеристику. Построение подпространств нулевой характеристики всегда вызывало значительные затруднения. Леониду Давидовичу удалось создать оригинальный метод построения подпространств нулевой характеристики, который и позволил ему построить нерегуляризуемое интегральное уравнение.

Отметим, что созданный Менихесом Л.Д. метод сам по себе является значительным вкладом в классический функциональный анализ, независимо от роли, которую он сыграл при построении упомянутого примера.

В 1979 году в Совете Уральского государственного университета Леонид Давидович успешно защитил кандидатскую диссертацию.

5. Политехнический институт – продолжение

Вернувшись в 1976 году в ЧПИ, Леонид Давидович продолжил педагогическую деятельность, читая лекции и проводя практические занятия на металлургическом, энергетическом и автотракторном факультетах. В 1979 году он был избран на должность доцента кафедры высшей математики, в 1983 году ему было присвоено ученое звание доцента.

Продолжилась и научная деятельность Менихеса Л.Д. Классическая регуляризационная тематика была практически исчерпана, работа по построению конкретных регуляризаторов для важных прикладных задач не привлекала Леонида Давидовича. Он решил перенести основные понятия теории регуляризации на топологические векторные пространства. Здесь обнаружилась определенная сложность в сравнении с классической теорией – классическое определение регуляризуемости использует наличие метрики, которой, вообще говоря, в топологических пространствах нет.

Леонид Давидович успешно эту трудность преодолел и активно начал развивать новую теорию. Оказалось, что новая теория существенно отличается от классической, в частности, если в классической теории в рефлексивных банаховых пространствах все уравнения регуляризуемы, то в топологических пространствах это уже не так. Леонидом Давидовичем был построен пример нерегуляризуемого уравнения в рефлексивном пространстве Фреше.

В это время Леонид Давидович много ездит, участвует в конференциях различного ранга – от региональных до международных, укрепляет научные контакты, выступает с докладами о своих результатах.

В начале 90-х годов коллега Л.Д. Менихеса по школе В.К. Иванова – профессор В.П. Танана – инициировал исследования Леонида Давидовича по конечномерным аппроксимациям неустойчивых задач.

Используя введенное ранее В.П. Тананой понятие полноты последовательности операторов, Л.Д. Менихес совместно с Виталием Павловичем нашел критерий сходимости конечномерных аппроксимаций различных методов регуляризаций.

Этот критерий позволил им получить новое решение проблемы равномерной сходимости конечномерных аппроксимаций в методе тихоновской регуляризации.

А.Н. Тихонов анонсировал без доказательства этот результат еще в 1963 году. Группа его учеников построила общую теорию аппроксимации, из которой следовало доказательство результата Тихонова.

Менихес Л.Д. же и Танана В.П. независимо получили прямое оригинальное доказательство упомянутого результата точно в той формулировке, которую дал А.Н. Тихонов.

Результаты Л.Д. Менихеса по регуляризации в топологических пространствах и конечномерным аппроксимациям неустойчивых задач легли в основу его докторской диссертации, блестяще защищенной в 1998 году в Совете Новосибирского государственного университета.

6. ЮУрГУ. Механико-математический факультет

К этому моменту времени – концу двадцатого века – патриархальный Челябинский политехнический институт претерпел значительные изменения. Пройдя кратковременную стадию технического университета, он получил статус классического государственного университета, оброс большим количеством несвойственных оборонному техническому ВУЗу естественно-научных и гуманитарных факультетов и специальностей.

В 1995 году усилиями проф. Зельдовича Б.Я. и Заляпина В.И. на базе нескольких специальностей энергетического и приборостроительного факультетов был образован поток усиленной физико-математической подготовки, вскоре переросший в полноценный факультет прикладной математики и физики. Конечно, математик масштаба Л.Д. Менихеса не мог оставаться в стороне от этих новаций. Программы углубленных курсов математического анализа, дифференциальных уравнений и функционального анализа, их первая апробация – целиком и полностью заслуга Леонида Давидовича.

В 2002 году Университет получил лицензию на подготовку специалистов-математиков. Разработчиком программ курсов математического анализа, функционального анализа, теории некорректных задач и др. стал профессор Менихес Л.Д. Он погрузился в эту работу с головой. Впервые ему была предоставлена возможность учить студентов чистой математике. И он с энтузиазмом неопита взялся за это дело. В первом выпуске специалистов по специальности 010101 – «Математика» было пять (!) учеников Леонида Давидовича.

В 2003 году факультет прикладной математики и физики был разделен на механико-математический и физический факультеты. На новом, механико-математическом факультете, основателем кафедры функционального анализа и ее заведующим стал Леонид Давидович.

Он член Ученого Совета факультета, заместитель декана по научной работе, член Ученого Совета Университета.

Когда создавалось Челябинское региональное отделение Научно-методического Совета по математике Минобрнауки РФ, Леонид Давидович единогласно был признан его лидером. Он пользуется заслуженным авторитетом в математических кругах города. Традиционно он – председатель Государственных аттестационных комиссий в различных ВУЗах Челябинска.

Не прекращается и научная деятельность. Леонид Давидович подвергает детальному анализу созданный им метод построения подпространств нулевой характеристики и с успехом использует его для сравнения различных достаточных условий регуляризуемости (эта тематика была развита (2006, 2007) в работах его учениц А. Баязитовой и О. Соколик). Одновременно Леонид Давидович работает над построением метода продолженного оператора, впоследствии ставшего основой доказательства новых достаточных условий регуляризуемости.

Главным результатом этого времени следует считать доказательство возможности сведения задачи о регуляризуемости к исследованию единственности некоторой другой задачи с помощью метода продолжения оператора.

Леонид Давидович активно публикуется в ведущих математических изданиях России – его работы можно найти в Докладах РАН (серия «МАТЕМАТИКА»), Математических заметках, Сибирском математическом журнале и др. По-прежнему много ездит, участвует в конференциях и школах. Основными центрами притяжения его научных интересов остаются Москва, Екатеринбург, Новосибирск.

Леонид Давидович много знает и много умеет. Всю свою жизнь он посвятил единственной и нежно любимой им МАТЕМАТИКЕ. Глубокая эрудиция, высокий профессионализм, умение быстро, «сходу» войти в проблему и вычленить в ней содержательное ядро – вот составляющие его научной ментальности. «Острый» глаз позволяет ему быстро и безошибочно находить неточности, нелепости и ошибки в статьях, книгах и рукописях. Это качество делает его незаменимым членом редакционных коллегий авторитетных изданий.

Леонид Давидович член редколлегии Вестника ЮУрГУ (серии «МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ХИМИЯ», «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ»), ответственный редактор раздела «МАТЕМАТИКА» Известий Челябинского научного центра УрО РАН.

Леонид Давидович полон сил и энергии. Новые творческие замыслы и планы дождаются своей реализации, и коллеги знают, что рано или поздно они воплотятся в новые теории и теоремы.

7. Публикации

Леонидом Давидовичем опубликовано более 60 научных и более 20 учебных, учебно-методических и методических работ. Ниже приведен список наиболее значимых его научных публикаций.

Литература

1. Суммирование в линейных топологических пространствах // Математические записки УрГУ. – 1975. – Т. №9, тетр. 2. – С. 65 – 76.
2. Об одной теореме из теории произведения распределений // Математические записки УрГУ. – 1975. – Т. №9, тетр. 2 – С. 77 – 81.
3. Необходимое и достаточное условие линейной регуляризуемости // Докл. Акад. наук СССР. – 1976 – Т. 229, №6. – С. 1211 – 1214. (с Винокуровым В.А).
4. Некоторые вопросы регуляризации в нормированных пространствах / Л. Д. Менихес // «Исследования по современному математическому анализу». – Свердловск, 1977. – С. 61 – 69.
5. О регуляризуемости отображений, обратных к интегральным операторам // Докл. Акад. наук СССР. – 1978. – Т. 241, №2. – С. 282 – 285.
6. Условия линейной и конечномерной регуляризуемости линейных обратных задач // Докл. Акад. наук СССР. – 1978. – Т. 241, №5. – С. 1041 – 1045. (с Пличко А.Н.).
7. Условия линейной и конечномерной линейной регуляризуемости // «Исследования по функциональному анализу». – Свердловск, 1978. – С. 79 – 85.
8. О равномерной регуляризации некорректных задач // Изв. вузов. Матем. – 1979. – №11. – С. 51 – 57.
9. Линейная регуляризуемость отображений, обратных к линейным операторам // Изв. вузов. Матем. – 1979. – №12. – С. 63 – 71.
10. О линейной регуляризуемости обратных задач // «Исследование операторных уравнений в функциональных пространствах». – Свердловск, 1983. – С. 81 – 89.
11. О некоторых проблемах линейной регуляризуемости // Докл. Акад. наук СССР. – 1983. – Т. 270, №1. – С. 37 – 41. (с Винокуровым В.А., Доманским Е.Н., Пличко А.Н.)
12. Регуляризуемые функции в топологических векторных пространствах // Теория и методы решения некорректно поставленных задач и их приложения: тр. Всесоюз. школы-семинара по некорректно поставленным задачам. Саратов, 23 – 30 июня 1985 г. – Саратов, 1985. – С. 75 – 76.
13. Регуляризуемость в топологических пространствах // «Прикладные задачи математического анализа»: тем. сб. науч. тр. – Челябинск, 1986. – С. 71 – 79.
14. Регуляризуемость в пространствах дифференцируемых функций // XI Всесоюзная школа по теории операторов в функциональных пространствах: тез. докл. Челябинск, 26 – 30 мая, 1986 г. – Челябинск, 1986. – Ч. I. – С. 42.
15. До теорії регуляризованості в топологічних векторних просторах // Укр. матем. журн. – 1990 – Т. 42, №6. – С. 87 – 92. (с Пличко А.М.).
16. Напряженно-деформированное состояние двухслойных сосудов при статическом нагружении // Проблемы прочности. – 1991. – №1. – С. 71 – 79. (с Остсеминым А.А.).
17. Напряженно-деформированное состояние двухслойных сосудов при динамическом нагружении // Проблемы прочности. – 1991. – №5. – С. 81 – 85. (с Остсеминым А.А.).

18. On convergence of approximations criterion for linear Ill-Posed Problems solution // Inverse and Ill-Posed Problems: Abstract of International conference dedicated to the memory of academician A.N. Tikhonov. Moskow, September 10 – 13. – Moskow, 1996. – С. 61. (with Tanana V.P.).
19. Convergence criterion for approximations in the residual method in Banach Spaces // J.Inv. and Ill-Posed Problems. – 1997. – V. 5, №3. – С. 81 –91. (with Tanana V.P.).
20. Конечномерная аппроксимация в методе М.М. Лаврентьева // Сиб. журн. вычисл. математики /РАН. Сиб. отд-ние. – Новосибирск, 1998. – Т. 1, №1. – С. 27 – 39. (с Тананой В.П.).
21. К вопросу о сходимости конечномерных аппроксимаций метода регуляризации // Юж.-Урал. гос. ун-т. – М., 1998. – 15 с. – Деп. в ВИНТИ 01.04.98, №971-В98. (с Тананой В.П.).
22. On the convergence of approximations of the regularization method and the Tikhonov regularization method of n-th order // J.Inv. and Ill-Posed Problems. – 1998. – V. 6, №3. – Р. 66 – 88. (with Tanana V.P.).
23. О критерии сходимости аппроксимаций метода регуляризации в банаховых пространствах // Докл. Акад. наук. – 1998. – Т. 363, №5. – С. 1061 – 1064. (с Тананой В.П.).
24. О критериях сходимости аппроксимаций метода регуляризации // Сиб. мат. журн. – 1999. – Т. 40, №1. – С. 130 – 141. (с Тананой В.П.).
25. О регуляризуемости некоторых классов отображений, обратных к интегральным операторам // Математические заметки. – 1999. – Т. 65, №2. – С. 222 – 229.
26. Напряженно-деформированное состояние двухслойных сосудов // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2001. – №1. – С. 29 – 37. (с Остсеминым А.А.)
27. Об одном условии регуляризуемости интегральных уравнений // Изв. Челяб. науч. центра. – Челябинск, 2001. – Вып. 3(12). – С. 5 – 10.
28. О регуляризуемости линейных обратных задач в банаховых пространствах // Вестн. Челяб. ун-та. Серия. Математика. Механика. Информатика. – Челябинск, 2002. – №1(6). – С. 38 – 41. (с Тананой В.П.).
29. К теории регуляризации неустойчивых задач // Изв. Челяб. науч. центра. – Челябинск, 2002. – Вып. 3(16). – С. 6 – 8.
30. Напряженно-деформированное состояние двухслойных сосудов при динамическом нагружении // Вестн. машиностроения. – 2003. – №8. – С. 23 – 27. (с Остсеминым А.А.).
31. Регуляризация неустойчивых задач // Наука и технология: тр. XXIII Рос. школы. Спец. вып., посвящ. 60-летию Юж-Урал гос. ун-та. – М., 2003. – С. 153 – 167.
32. О регуляризации неустойчивых задач в пространствах непрерывных функций// Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2003. – №6(22). – С. 9–16.
33. Об одном достаточном условии регуляризуемости линейных обратных задач // Мат. заметки. – 2007. – Т. 82, №2. – С. 242 – 247.

Кафедра математического анализа,
Южно-Уральский государственный университет
vzal@susu.ac.ru

Поступила в редакцию 10 июля 2008 г.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭПР-ДОЗИМЕТРИИ

*Заляпин В.И., Шишкина Е.А., Fattibene P., Wieser A., Иванов Д.В.,
Дегтева М.О.*

STATISTICAL ANALYSIS OF THE EPR-MEASUREMENT RESULTS

Zalyapin V.I., Shishkina E.A., Fattibene P., Wieser A., Ivanov D.V., Degteva M.O.

Построена статистическая модель процедуры ЭПР измерений поглощенной дозы ионизирующего излучения в эмали зубов. На основании экспериментальных данных, независимо полученных в лабораториях Института физики металлов (Екатеринбург, Россия), Исследовательского центра Гельмгольца (Мюнхен, Германия) и Высшего института здравоохранения (Рим, Италия), построена калибровочная кривая, позволяющая пересчитывать амплитуды ЭПР сигнала в поглощенные дозы.

Ключевые слова: Ионизирующее излучение, ЭПР-измерения, регрессия, обратная регрессия

The statistical modeling of the EPR measurements of the absorbed ionizing dose in the teeth enamel was considered. The calibration curve to convert from EPR measurements to absorbed dose was build on the basis of the independent experimental data from IMP (Russia, Ekaterinburg), GMBH (Germany, Munich), ISS (Italy, Rome).

Keywords: Ionizing radiation, EPR spectroscopy, regression, inverse regression

Введение

В кристаллах эмали зубов под действием ионизирующего излучения образуются стабильные радикалы CO_3^{2-} . Их количество пропорционально суммарной поглощенной энергии. Метод электронного парамагнитного резонанса (ЭПР) детектирует количество радиационно-индуцированных CO_3^{2-} по величине амплитуды резонансного сигнала. Удельная (нормированная на массу измеряемого образца) амплитуда ЭПР сигнала позволяет оценить величину, пропорциональную поглощенной в эмали дозе и накопленную в течение всей жизни донора ([1]). Суммарная накопленная доза в эмали формируется под действием всех типов облучения: а) внешнего, включающего влияние окружающей среды и медицинские обследования; б) внутреннего, обусловленного естественными радионуклидами внутри зубов; и в) облучения, связанного с радиационными инцидентами.

Ключевым моментом ЭПР дозиметрии является построение калибровочной кривой и оценка рассеяния относительно нее экспериментальных результатов. Идеальный ЭПР отклик (аппаратура с нулевым уровнем шума и 100% воспроизводимостью результата) на поглощенную дозу в идеальном образце (100% гидроксипатит без включений органических соединений и ионов металлов) должен быть линейным. Однако реальные измерения содержат погрешности, искажающие ожидаемую картину.

С целью создания калибровочных кривых и оценки точности и сравнимости результатов, получаемых на основании различных ЭПР-дозиметрических методик, было предпринято межлабораторное сравнение, в котором участвовали три института: IMP – Институт Физики Металлов (Екатеринбург, Россия); GMBH – Исследовательский центр Гельмгольца (Мюнхен, Германия) и ISS – Высший Институт Здравоохранения (Рим, Италия). Три метода приготовления образцов тестировались последовательно каждой из лабораторий, использующей собственный метод измерений, отличающийся как аппаратурно, так и методом анализа спектров. Уникальность каждого метода приводит к тому, что аппаратурные измерения амплитуды ЭПР сигнала фиксируются в относительных единицах шкалы, характерной только для данного измерителя. Таким образом, существует необходимость в создании алгоритма, учитывающего уникальность каждого метода и при этом позволяющего сопоставлять результаты, получаемые разными исследовательскими группами. Целью данной работы было создание и верификация метода статистического оценивания зависимости ЭПР отклика на поглощенную дозу. Экспериментальный материал, полученный в рамках межлабораторного сравнения методов ЭПР дозиметрии, послужил основой для оценок дозовой зависимости ЭПР отклика.

1. Материалы и методы

Образцы зубов, использованные в эксперименте, были получены из стоматологических клиник, где они удалялись исключительно по медицинским показаниям. Доноры не проживали на радиационно-загрязненных территориях. Эмаль отделялась от дентина и каждая исследовательская группа – участник межлабораторного сравнения – химически обрабатывала эмаль согласно собственному протоколу подготовки образцов к ЭПР измерениям. Образцы предварительно индивидуально тестировались методом ЭПР дозиметрии, чтобы исключить возможные высокие дозы за счет случайных ошибок идентификации либо неучтенных медицинских облучений. Затем каждая лаборатория готовила смесь из эмали зубов, чтобы получить физическое приближение однородного образца. Следует отметить, что смешанные образцы ISS и IMP были приготовлены из зубов сельских жителей Уральского региона возрастом 50 ± 5 (IMP) и 65 ± 12 (ISS) лет. GMBH использовал зубы молодых египетских доноров (точный возраст не регистрировался, но характер спектра образцов, дополнительно не облучавшихся, свидетельствует о весьма слабой радиационной компоненте). Методика химического приготовления и ЭПР измерений подробно описана в работах [2, 3].

Смешанные образцы разбивались на порции приблизительно по 100 мг, и каждая лаборатория дооблучала свои образцы по схеме, представленной в табл.1.

Таблица 1.

Схема дооблучения образцов

Доза облучения, Гр	0	0,1	0,2	0,5	1,0	1,5
Кол-ство образцов	5	5	5	5	5	5

Замечание 1. Дозы облучения, приведенные в таблице, являются округленными. Реальные величины доз варьировались в пределах $\pm 0,05$ Гр относительно указанных. В расчетах принимались во внимание точные величины.

Замечание 2. IMP измерил дополнительно 27 необлученных порций смешанного образца.

Каждая лаборатория выполняла ЭПР измерения, как на собственных, так и на образцах, приготовленных в двух других лабораториях. Подробно дизайн межлабораторного сравнения описан в [4].

2. Обозначения и допущения

Амплитуду измеряемого сигнала будем обозначать η , дозу ионизирующего облучения, поглощенную образцом – ξ .

Исходя из физики процесса ЭПР измерений, будем искать модель процесса в виде линейной по параметрам центрированной модели первого порядка по переменной ξ , взятой в виде:

$$\eta = \theta_1(\xi - \bar{\xi}) + \theta_2. \quad (1)$$

Положим $Y = \{Y_i^{jk}\} = \{Y_p\}_{p=1, N}$ – вектор ЭПР измерений образцов, $k = 1, 2, 3$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $j = 1, 2, \dots, n_i$, компоненты которого упорядочены в лексиграфическом порядке по индексам i, j, k . Здесь:

k – идентификатор лаборатории, в которой проводились измерения, $k = 1$ – институт физики металлов (ИМП), $k = 2$ – центр Гельмгольца (ГМВН), $k = 3$ – институт здравоохранения (ISS);

i – номер дозового уровня пробы, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, I$, $I = 33$ – номера доз исследуемых образцов в диапазоне от 0 и до 1500 mGy соответственно;

j – порядковый номер пробы, n_k – количество проб, исследовавшихся в k -й лаборатории, $n_1 = 112$, $n_2 = 90$, $n_3 = 90$, $n_1 + n_2 + n_3 = N = 292$;

Пусть, далее, $X = \{X_p\}$ – вектор дозовых уровней всех исследуемых проб, компоненты которого упорядочены также, как и компоненты вектора $\{Y_p\}$.

Модель измерений, которая предполагается аддитивной относительно ошибок, запишем в виде:

$$Y_p = \theta_1 \cdot (X_p - \bar{X}) + \theta_2 + \varepsilon_p. \quad (2)$$

Измерения предполагаются центрированными ($M\varepsilon = 0$) и, вообще говоря, не равноточными, так что рассеяние ошибок описывается дисперсионной матрицей \mathbf{V} , $\mathbf{V} = M\varepsilon\varepsilon^T = \sigma^2 \cdot \mathbf{Q}$, где матрица \mathbf{Q} и параметр σ описывают особенности процедуры ЭПР измерений, в частности, относительную точность измерений.

Известно (например, [5]), что, положив $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}\right)^T$ и введя новые измерения по формуле $Z = \mathbf{Q}^{-\frac{1}{2}} \cdot Y$, модель (2) можно привести к модели, в которой модифицированные измерения \hat{Z} обладают свойством независимости и равноточности. При этом метод наименьших квадратов (МНК), дающий возможность получать наилучшие (с точки зрения точности) коэффициенты регрессии зависимости в предположении независимости и равноточности измерений, переходит во взвешенный метод наименьших квадратов (ВМНК) для неравноточной модели (2) с зависимыми измерениями.

3. Шкалирование измерений

Как уже было отмечено выше, для реализации единого подхода к исследованию зависимости ЭПР амплитуд от уровней поглощенной дозы, необходимо привести все имеющиеся измерения к одной шкале. В настоящей работе мы использовали три способа объединяющего шкалирования – грубое масштабирование, масштабирование по диапазону и масштабирование по регрессии.

3.1. Грубое масштабирование

Анализ масштаба и диапазона ЭПР-измерений, проведенных в ИМП и ГМВН, позволяют в первом приближении считать, что измерения, полученные в упомянутых лабораториях, фиксировались в одной и той же шкале, в то время как шкала измерений в ISS отличалась от шкалы, используемой в ИМП и ГМВН, нормирующим множителем $\kappa = 100$, так что $100 \cdot$

$Y_i^{j1} = 100 \cdot Y_i^{j2} = Y_i^{j3}$. Соответствующим образом были пересчитаны показатели точности проведенных измерений, в качестве которых были взяты оценки среднеквадратичных отклонений повторных измерений образцов.

Полученные таким образом данные сохраняют все индивидуальные особенности ЭПР-измерений, присущие участвовавшим в эксперименте лабораториям. В дальнейшем мы будем измерения в этой шкале обозначать Y_{100} .

3.2. Масштабирование по диапазону

Масштабирование по диапазону представляет собой линейное преобразование измерений в соответствии с соотношением

$$\tilde{Y}_i^{jk} = \frac{Y_i^{jk} - \min_{i,j} Y_i^{jk}}{\max_{i,j} Y_i^{jk} - \min_{i,j} Y_i^{jk}}$$

Поскольку структура интервальной шкалы не меняется при линейных преобразованиях, с помощью такого преобразования мы приходим к единой шкале измерений в различных лабораториях, сохранив при этом информацию об индивидуальных особенностях измерений в каждой из них.

Соответствующим образом модифицируются показатели точности проведенных измерений, в качестве которых, как и выше, брались оценки среднеквадратичных отклонений повторных измерений образцов.

В дальнейшем мы будем измерения в этой шкале обозначать Y_{norm} .

3.3. Масштабирование по регрессии

Масштабирование по регрессии представляет собой процедуру переноса значений одной монотонной функции на другую с помощью сравнения их величин при одном и том же значении независимой переменной. Предполагается, что сравниваемые функции имеют тождественный диапазон изменения независимой переменной.

Подробнее, пусть $x \in [a; b]$ – независимая переменная, $y = \varphi(x)$, $\bar{y} = \psi(x)$ – пара монотонных функций, определенных на промежутке $[a; b]$. Имеет место очевидное тождество

$$\forall x_0 \in [a; b] : \quad x_0 = \varphi^{-1}(y(x_0)) = \psi^{-1}(\bar{y}(x_0)).$$

Процедура переноса представляет собой замену значений одной функции соответствующим по аргументу значением другой: если, например, $\varphi_0 = \varphi(x_0)$, то модифицированное значение этой функции дается равенством $\varphi_0^{\text{mod}} = \psi(\varphi^{-1}(y(x_0)))$.

С целью однородного шкалирования измерений, полученных в различных лабораториях, возьмем в качестве эталонной шкалирующей функции функцию $y = x$. В качестве функций, описывающих измерения, подлежащие шкалированию, были взяты линейные регрессионные зависимости амплитуд ЭПР-измерений, полученные для каждой лаборатории в отдельности:

$$Y_p^k = \theta_1^k X_p + \theta_2^k, \quad k = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Таблица 2.

Регрессии $Y_i^{jk} = \theta_1^k X_i + \theta_2^k, k = 1, 2, 3$

Лаборатория	θ_1	θ_2	SE_{θ_1}	SE_{θ_2}	R	R^2
IMP	$3,294 \cdot 10^{-3}$	0,6985	$6,45 \cdot 10^{-5}$	$3,9 \cdot 10^{-2}$	0,98	0,96
GMBH	$3,741 \cdot 10^{-3}$	0,179	$5,84 \cdot 10^{-5}$	$3,75 \cdot 10^{-2}$	0,99	0,98
ISS	$3,592 \cdot 10^{-1}$	53,781	$6,3 \cdot 10^{-3}$	4,54	0,988	0,975

В соответствии с вышеизложенным, процедура шкалирования дается соотношениями

$$Y_{\text{mod}}^k = \frac{Y^k - \theta_2^k}{\theta_1^k}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Как и выше, соответствующим проделанному преобразованию образом модифицируются и показатели точности преобразованных ЭПР-измерений.

Использованные в процедуре масштабирования линейные зависимости (3) были получены ВМНК, веса которого оценивались методом наибольшего правдоподобия. Результаты приведены в табл. 2, где R – множественный коэффициент корреляции, R^2 – коэффициент детерминации, SE_{θ} – стандартная ошибка соответствующего коэффициента регрессии.

3.4. Анализ шкалированных статистик

Все три использованных способа объединяющего шкалирования дали достаточно близкие результаты – полученные выборки хорошо коррелируют друг с другом, как показывает табл. 3.

Таблица 3.

Корреляции шкалированных измерений

	Y_{100}	Y_{norm}	Y_{mod}
Y_{100}	1	0,993	0,996
Y_{norm}	0,993	1	0,991
Y_{mod}	0,996	0,991	1

Полученные взвешенным методом наименьших квадратов регрессионные зависимости шкалированных переменных представлены в табл. 4. Веса для ВМНК оценивались методом максимального правдоподобия и во всех случаях оказались пропорциональными $\frac{1}{\sqrt{std}}$, где std – модифицированные оценки точности измерений, в качестве которых, как и выше, брались оценки среднеквадратичных отклонений повторных измерений образцов.

Для удобства сравнения, нижеприведенные регрессии нормированы на диапазон $[0; 1]$ – $0 \leq \tilde{Y} \leq 1$. Как и выше R – множественный коэффициент корреляции, R^2 – коэффициент детерминации, SE_{θ} – стандартная ошибка соответствующего коэффициента регрессии.

Таблица 4.

Регрессии шкалированных переменных $Y = \theta_1(X - \bar{X}) + \theta_2$

Переменная	θ_1	θ_2	SE_{θ_1}	SE_{θ_2}	R	R^2
\tilde{Y}_{100}	$4,5 \cdot 10^{-4}$	0,254	$5,26 \cdot 10^{-6}$	$2,73 \cdot 10^{-3}$	0,981	0,962
\tilde{Y}_{norm}	$5,15 \cdot 10^{-4}$	0,270	$6,8 \cdot 10^{-6}$	$3,53 \cdot 10^{-3}$	0,976	0,953
\tilde{Y}_{mod}	$4,87 \cdot 10^{-4}$	0,268	$5,12 \cdot 10^{-6}$	$2,65 \cdot 10^{-3}$	0,985	0,970

Центрирование линий регрессии осуществлялось взвешиванием дозовых уровней с помощью весов w_i , оцененных для реализации ВМНК методом максимального правдоподобия –

$$\bar{X} = \frac{1}{\sum_i w_i} \sum_j X_j \cdot w_j.$$

Подобное центрирование, как известно (например [5]), обеспечивает статистическую независимость коэффициентов регрессии, полученных ВМНК.

4. Калибровочная линия

Для дальнейшего анализа и построения калибровочной линии, связывающей ЭПР-измерения и дозовые уровни, была выбрана регрессия, построенная по данным, полученным шкалированием исходных переменных по регрессии, как наиболее значимая и обладающая наилучшими точностными и надежностными характеристиками в сравнении с регрессиями, полученными грубым масштабированием и масштабированием по диапазону.

Ее уравнение в масштабе шкалированных данных имеет вид

$$Y_{\text{mod}} = 0,999 \cdot (X - \bar{X}) + 429,012, \quad (5)$$

где X – поглощенная образцом доза, Y_{mod} – модифицированный ЭПР-отклик на дозу X , полученный в соответствии с соотношением (4), $\bar{X} = 425,9375$ – взвешенное среднее поглощенных доз. Дисперсионные характеристики модели представлены в табл. 5.

Таблица 5.

Дисперсионный анализ регрессии Y_{mod}

Источник	Сумма квадр.	Степени св.	Средний квадрат.	F отн.	Значимость
Модель	$1,042 \cdot 10^7$	1	$1,042 \cdot 10^7$	9063,06	0,000
Остатки	$3,28 \cdot 10^5$	285	1149,46		
Адекв.	56693,1	31	1828,81	1,71	0,0134

95%-доверительные интервалы для коэффициентов регрессии даются неравенствами, соответственно

$$0,978 \leq \theta_1 \leq 1,020, \quad 418,37 \leq \theta_2 \leq 439,02.$$

Угловой коэффициент θ_1 регрессии (5) можно считать равным 1 – гипотеза $H_0 : \theta_1 = 1$ против альтернативы $H : \theta_1 \neq 1$ согласуется с имеющимися данными с надежностью не худшей, чем 90% (уровень значимости $p \leq 0,01$). В то же время свободный член θ_2 можно признать равным \bar{X} . Соответствующая гипотеза согласуется с имеющимися данными на уровне значимости $p \leq 0,01$.

Как следует из вышеизложенного, в качестве калибровочной кривой может быть использована модель ЭПР-измерений, представленная в виде

$$Y_{\text{mod}} = X, \quad (6)$$

где, напомним, X – уровень поглощенной образцом дозы (в mGy), Y_{mod} – модифицированная амплитуда соответствующего ЭПР-отклика, подсчитанная в соответствии с (4).

Результаты теста на адекватность модели (5) – (6), основанного на сравнении изменчивости модели с изменчивостью исходных данных, отражен в последней строке табл. 5. Следует признать гипотезу об адекватности линейной формы представления зависимости модифицированных ЭПР-измерений от поглощенных доз согласующейся на 95% доверительном уровне с экспериментальными данными.

Отметим, что процедура пересчета по формулам (4) требует определенной осторожности, в связи с имеющим место рассеянием коэффициентов θ_i^k , $i = 1, 2$, $k = 1, 2, 3$ используемой линейной регрессии, вносящим дополнительную неопределенность в анализируемые данные. Грубая оценка соотношений (4) показывает, что шкалированные переменные будут, в первом приближении, лежать в пределах, определяемых неравенством

$$Y_0^{\text{mod}} (1 - \delta) \leq Y_{\text{mod}} \leq Y_0^{\text{mod}} (1 + \delta), \quad Y_0^{\text{mod}} = \frac{Y - \theta_2}{\theta_1},$$

где величина δ характеризует возможные вариации углового коэффициента регрессии. Значения параметра δ для различных лабораторий приведена в табл. 6.

Таблица 6.

Параметры рассеяния углового коэффициента регрессии

Лаб	IMP	GMBH	ISS
δ	$4 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$3,5 \cdot 10^{-2}$

Видно, что вариации исходных данных, связанные с процедурой шкалирования, для всех лабораторий не превышают 4%. Следует заметить, что разное качество приготовления образцов влияет на вариацию углового коэффициента регрессии. Параметры рассеяния, приведенные в табл. 6 для лабораторий-измерителей, оцененные на основе всех измерений, могут рассматриваться как мажорирующая оценка.

На фоне естественной изменчивости данных, принимающей для различных лабораторий значения от, примерно, 15% и до 19%, вариацией исходных данных, связанной с процедурой шкалирования, можно в дальнейшем пренебречь.

Важным показателем качества представления данных зависимостью (5) – (6) является доля выбросов исходных данных, по которым оценивались коэффициенты регрессии. В нашем случае выбросы составляют около 2,5% , в абсолютном исчислении 7 точек. Из них за пределами 95% доверительных границ для линии регрессии находится всего одна точка (в табл. 7 выделена полужирным шрифтом).

Таблица 7.

Выбросы модели (5)

Лаб., ЭПР	Лаб., образцы	Доза	Y_{mod}	Модель	Отклонение	Норм. откл
IMP	IMP	1004	1387,83	1006,5	381,328	2,51
IMP	GMBH	1500	1726,83	1502,0	224,823	2,57
IMP	ISS	99,26	-85,2548	102,66	-187,915	-2,93
IMP	ISS	1501	1123,6	1503,25	-379,654	-2,70
GMBH	IMP	498	290,502	501,003	-210,501	-2,54
GMBH	IMP	1519	2051,8	1520,98	530,811	4,36
ISS	IMP	1004	1200,24	1006,5	193,741	2,87

В первой колонке указана лаборатория, в которой производились измерения, во второй – место изготовления образцов. В последней колонке представлен коэффициент студентизированного отклонения, показывающий, во сколько раз отклонение модифицированного экспериментального измерения от модельного значения превышает стандартное.

Исключение выбросов из анализа, как показывают расчеты, приводит к статистически незначимому изменению коэффициентов модели (5) и не меняют гипотетических параметров модели (6).

За основу дальнейших рассмотрений возьмем калибровочную линию (6).

5. Обращение регрессионной зависимости (6)

С точки зрения калибровки ЭПР-измерений, значительный интерес представляет решение обратной задачи – восстановления измеряемой поглощенной дозы по наблюдаемому значению ЭПР-измерения.

Пусть получены k равнооточных ЭПР-измерений $y_i, i = 1, 2 \dots k$, модифицированных в соответствии с правилом (4) и отвечающих одному и тому же значению x . Легко видеть,

что точечной оценкой x^* истинного значения x измеряемой поглощенной дозы служит, в соответствии с моделью (6), величина $x^* = \bar{Y}_{\text{mod}}$, где \bar{Y}_{mod} – взвешенное среднее измерений y_i . Задача обращения калибровочной линии (6) состоит в нахождении $\kappa \cdot 100\%$ доверительных границ для x при известном значении $x^* = \bar{Y}_{\text{mod}}$.

Если $Y_{\text{mod}}^-(x)$, $Y_{\text{mod}}^+(x)$ – соответственно нижняя и верхняя доверительные границы для $Y_{\text{mod}}(x)$, так, что с надежностью κ выполняется

$$Y_{\text{mod}}^-(x) \leq Y_{\text{mod}}(x) \leq Y_{\text{mod}}^+(x),$$

то доверительные границы для x легко могут быть найдены из уравнений

$$x^- : Y_{\text{mod}}^-(x) = Y_{\text{mod}}(x), \quad x^+ : Y_{\text{mod}}^+(x) = Y_{\text{mod}}(x).$$

Границы $Y_{\text{mod}}^-(x)$, $Y_{\text{mod}}^+(x)$ даются соотношениями

$$Y_{\text{mod}}^\pm(x) = x \pm t_\kappa \cdot \sqrt{(x - \bar{x})^2 s_{\theta_1}^2 + s_{\theta_2}^2 + \frac{s^2}{k}}.$$

Для наших данных $s^2 = 1149,5$ – оценка параметра σ^2 , $s_{\theta_1}^2 = 1,2 \cdot 10^{-3}$, $s_{\theta_2}^2 = 29,27$ – оценки дисперсий коэффициентов регрессии θ_1 , θ_2 , t_κ – $\kappa \cdot 100\%$ коэффициент Стьюдента, $k = 3$ – количество повторных измерений.

Например, для $t_\kappa = 2$ для нахождения границ x^- , x^+ получаем уравнение

$$x^\pm = \frac{\bar{Y}_{\text{mod}} - 1 \pm \sqrt{0,002\bar{Y}_{\text{mod}}^2 - 2,045\bar{Y}_{\text{mod}} + 630}}{0,998}.$$

Полученные соотношения были использованы для пробного детектирования поглощенных образцами доз. Для исследования были взяты результаты так называемого «слепого» теста, когда каждая из лабораторий измеряла образцы с неизвестной измерителю поглощенной дозой.

Результаты детектирования представлены в табл. 8. Предварительный анализ этих результатов показывает, что, как и следовало ожидать, надежность и точность детектирования возрастает с ростом детектируемой дозы.

Таблица 8.

Результаты пробного детектирования

Измер.	Изготов.	Доза	ЭПР	Y_{mod}	x^-	x^+
GMBH	GMBH	0	0,1547	-6,4997	-31,9154	18,9160
GMBH	GMBH	0	0,1715	-2,0011	-27,2329	23,2308
GMBH	GMBH	0	0,2427	17,0294	-7,4276	41,4864
GMBH	GMBH	120	0,6147	116,4605	95,9509	136,9702
GMBH	GMBH	460	1,8380	443,4660	432,6538	454,2782
GMBH	IMP	680	2,4432	605,2355	594,0367	616,4344
GMBH	GMBH	1300	5,4333	1404,5131	1363,1619	1445,8642
GMBH	IMP	1500	5,3039	1369,9354	1330,0822	1409,7887

Окончание табл. 8.

Измер.	Изготов.	Доза	ЭПР	Y_{mod}	x^-	x^+
ISS	GMBH	0	83,9	83,8502	62,0676	105,6329
ISS	IMP	0	37,5	-45,3257	-72,3389	-18,3125
ISS	GMBH	0	80,6	74,6631	52,5177	96,8086
ISS	GMBH	0	66,3	34,8525	11,1162	58,5887
ISS	GMBH	120	131,5	216,3669	199,5655	233,1683
ISS	IMP	150	86,8	91,9237	70,4585	113,3890
ISS	IMP	350	197,5	400,1086	388,5985	411,6187
ISS	GMBH	460	246,1	535,4092	524,9762	545,8423
ISS	IMP	680	312,7	720,8213	706,8259	734,8166
ISS	GMBH	1300	535,6	1341,3669	1302,7484	1379,9855
ISS	IMP	1500	530,1	1326,0551	1288,0970	1364,0132
IMP	GMBH	0	0,5441	-46,8900	-73,9680	-19,8120
IMP	GMBH	0	0,4083	-88,0844	-116,8761	-59,2927
IMP	GMBH	0	0,7311	9,8996	-14,8471	34,6463
IMP	GMBH	120	0,8501	46,0123	22,7248	69,2998
IMP	IMP	350	1,8655	354,2895	341,7536	366,8255
IMP	GMBH	460	2,0594	413,1579	401,8885	424,4273
IMP	GMBH	1300	5,1151	1340,7855	1302,1920	1379,3791

Работа выполнена при поддержке Евросоюза, в рамках интегрированного проекта SOUL (Southern Urals Radiation Risk Research), контракт FP6-516478

Литература

1. Ikeya, M. ESR dosimetry for atomic bomb survivors using shell buttons and tooth enamel / Ikeya M., Miyajima J., Okajima S // Japanese J. of Applied Physics. – 1984. – V. 23. – P. 697 – 699.
2. ISS protocol for EPR tooth dosimetry / Onori S., Aragno D., Fattibene P., Petetti E. and Pressello M. C. // Radiation Measurements. – 2000. – V. 32, Issue 5 – 6. – P. 787 – 792.
3. Shishkina, E.A. Issues in the validation of external dose: background and internal dose components of cumulative dose estimated using the electron paramagnetic resonance (EPR) method. Final Report for Milestone 7, Part 1. / E.A. Shishkina, V.A. Shved, M.O. Degteva, E.I. Tolstykh, D.V. Ivanov, S.N. Bayankin, A. Wieser, H.Y. Goksu, N.A. El-Paramawy, N. Semiochkina, P. Jacob, L.R. Anspaugh and B.A. Napier. – Chelyabinsk and Salt Lake City: Urals Research Center for Radiation Medicine and University of Utah; September 2003.
4. Assessment of performance parameters for EPR dosimetry with tooth enamel / Wieser A., Fattibene P., Shishkina E.A., Ivanov D.V., De Coste V., Gettler A., Onori S. // Radiation Measurements. – 2008. – V. 43, Issues 2 – 6. – P. 731 – 736.
5. Дрейпер, Н. Прикладной регрессионный анализ. Т.1 / Н. Дрейпер, Г. Смит. – Москва: ФиС, 1986.

Кафедра математического анализа,
Южно-Уральский государственный университет
vzal@susu.ac.ru

Поступила в редакцию 24 сентября 2008 г.

ОБ ОДНОМ УРАВНЕНИИ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА НА ГРАФЕ

А.А. Замышляева

ON A SOBOLEV TYPE EQUATION DEFINED ON THE GRAPH

A.A. Zamyshlyeva

Изучается начально-краевая задача для уравнения Буссинеска – Лява, определенного на графе. Проводится редукция к абстрактной задаче Коши для уравнения соболевского типа второго порядка. Получена теорема о фазовом пространстве исходного уравнения.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, фазовое пространство, M, N -функции, дифференциальные уравнения на графах

The author considers the initial-boundary value problem for the Boussinesque – Löve equation which is defined on graph by reducing it to the Cauchy problem for the Sobolev type equation of the second order. The author obtains a theorem on the phase space of such equation.

Keywords: Sobolev type equations, phase space, M, N -functions, differential equations defined on graphs

Введение

В последнее время теория графов привлекает все более пристальное внимание специалистов различных областей знания. Давно известны тесные контакты теории графов с топологией, теорией групп и теорией вероятностей. За последние годы тематика теории графов стала еще более разнообразной. Краевые и начально-краевые задачи для уравнений на графах начали изучать в конце прошлого века практически одновременно в разных регионах нашей планеты. Здесь можно отметить работы S. Kosugu, C. Cattaneo, G. Medolla, A.G. Setti, F. Barra. Независимо от этих авторов и впервые в России краевыми и начально-краевыми задачами для уравнений на графах начал заниматься Ю.В. Покорный [1] со своими учениками. Ими изучены качественные свойства дифференциальных уравнений на многообразиях типа сети, функция Грина, дифференциальные неравенства, разработана теория эллиптических уравнений на ветвящихся многообразиях.

Г.А. Свиридчук [2] рассмотрел начально-краевую задачу для полулинейного уравнения соболевского типа первого порядка на графе, эти результаты были развиты в работе [3].

Данная работа посвящена изучению уравнения Буссинеска – Лява [4]

$$(\lambda - \Delta)u_{tt} = \alpha(\Delta - \lambda')u_t + \beta(\Delta - \lambda'')u, \quad (0.1)$$

описывающего продольные колебания упругого стержня, где параметры $\lambda, \lambda', \lambda'' \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ характеризуют среду, причем отрицательные значения параметра λ не противоречат физическому смыслу задачи. Пусть $G = G(\mathcal{V}; \mathcal{E})$ – конечный связный ориентированный

граф, где $\mathcal{V} = \{V_i\}$ – множество вершин, а $\mathcal{E} = \{E_j\}$ – множество дуг. Мы предполагаем, что каждая дуга имеет длину $l_j > 0$ и толщину $d_j > 0$. На графе G рассмотрим уравнения

$$\lambda u_{jtt} - u_{jxxt} = \alpha(u_{jxxt} - \lambda' u_{jt}) + \beta(u_{jxx} - \lambda'' u_j) \text{ для всех } x \in (0, l_j), t \in \mathbb{R}. \quad (0.2)$$

Для уравнений (0.2) в каждой вершине V_i зададим краевые условия

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jx}(0, t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k u_{kx}(l_k, t) = 0; \quad (0.3)$$

$$u_s(0, t) = u_j(0, t) = u_k(l_k, t) = u_m(l_m, t), \text{ для всех } E_s, E_j \in E^\alpha(V_i), E_k, E_m \in E^\omega(V_i), \quad (0.4)$$

которые являются аналогами законов Кирхгоффа. Здесь через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество дуг с началом (концом) в вершине V_i . Условие (0.3) означает, что поток через каждую вершину должен равняться нулю, а условие (0.4) – что решение в каждой вершине должно быть непрерывным. В частном случае, когда граф G состоит из единственной нециклической дуги, условие (0.4) исчезает, а условие (0.3) превращается в однородное условие Неймана.

Поток пропорционален ширине дуги и градиенту решения. Однако не это является главной причиной введения в рассмотрение ширины дуги. Оказывается, конечномерное уравнение (0.1), заданное в трубчатой области, можно свести к одномерному (0.2), где x – натуральный параметр дуги E_j . Поэтому задачу (0.2) – (0.4) можно рассматривать как задачу Неймана для уравнения (0.1), заданного на области, являющейся объединением конечного множества трубчатых областей с диаметром d_j . Если дополнить (0.3), (0.4) начальным условием

$$u_j(x, 0) = u_{0j}(x), u_{jt}(x, 0) = u_{1j}(x), \text{ для всех } x \in (0, l_j), \quad (0.5)$$

то мы получим задачу Коши – Неймана для уравнения (0.1). Отметим, что данная задача ранее не рассматривалась даже в случае, когда граф G состоит из единственной дуги.

1. Редукция к абстрактной задаче

Проведем редукцию задачи (0.3) – (0.5) для уравнений (0.2) к задаче Коши

$$u(0) = u_0, u'(0) = u_1 \quad (1.1)$$

для линейного уравнения соболевского типа второго порядка

$$Au'' = B_1 u' + B_0 u. \quad (1.2)$$

Через $L_2(G)$ обозначим множество

$$L_2(G) = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots) : g_j \in L_2(0, l_j)\}.$$

Множество $L_2(G)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$\langle g, h \rangle = \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} g_j(x) h_j(x) dx.$$

Через \mathcal{U} обозначим множество $\mathcal{U} = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots) : u_j \in W_2^1(0, l_j) \text{ и выполнено условие (0.4)}\}$. Множество \mathcal{U} является банаховым пространством с нормой

$$\|u\|_{\mathcal{U}}^2 = \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}^2(x) + u_j^2(x)) dx.$$

В силу теорем вложения Соболева пространство $W_2^1(0, l_j)$ состоит из абсолютно непрерывных функций, а значит \mathcal{U} корректно определено, плотно и компактно вложено в $L_2(G)$. отождествим $L_2(G)$ со своим сопряженным, и через \mathcal{F} обозначим сопряженное относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ пространство к \mathcal{U} . Очевидно, \mathcal{F} – банахово пространство, причем вложение \mathcal{U} в \mathcal{F} компактно.

Формулой

$$\langle Du, v \rangle = \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}(x)v_{jx}(x) + au_j(x)v_j(x))dx,$$

где $a > 0, u, v \in \mathcal{U}$, зададим оператор, определенный на пространстве \mathcal{U} . Поскольку

$$|\langle Du, v \rangle| \leq C_1 \|u\|_{\mathcal{U}} \|v\|_{\mathcal{U}}$$

в силу неравенства Коши – Буняковского и

$$C_2 \|u\|_{\mathcal{U}}^2 \leq |\langle Du, v \rangle| \leq C_3 \|v\|_{\mathcal{U}}^2 \tag{1.3}$$

при всех $u, v \in \mathcal{U}$ и некоторых $C_k > 0, k = 1, 2, 3$, то линейный оператор $D : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{F}$ непрерывен и инъективен. Кроме того, из первой оценки (1.3) вытекает сюръективность сопряженного оператора $D^* : \mathcal{F}^* \rightarrow \mathcal{U}^*$. В силу рефлексивности пространства \mathcal{U} и самосопряженности оператора D получаем, что оператор $D \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ биективен. Отсюда по теореме Банаха следует существование оператора $D^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})$. Поскольку вложение \mathcal{U} в \mathcal{F} компактно, то оператор $D^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ является компактным. Значит, спектр оператора D вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$. Теперь фиксируем $\alpha, \beta > 0$ и $\lambda, \lambda', \lambda'' \in \mathbb{R}$ и построим операторы

$$A = (\lambda - a)I + D, \quad B_1 = \alpha((a - \lambda')I + D), \quad B_0 = \beta((a - \lambda'')I + D).$$

Из сказанного следует

Теорема 1. *Операторы $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, причем спектр $\sigma(A)$ оператора A вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$.*

Итак, редукция задачи (0.2) – (0.5) к задаче (1.1) – (1.2) закончена.

2. Морфология фазового пространства

Из теоремы 1 вытекает, что оператор A – фредгольмов. Обозначим через \vec{B} пучок операторов (B_0, B_1) .

Лемма 1. *Пусть параметры $\alpha, \lambda, \lambda', \lambda'' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, исключая случай, когда $0 \in \sigma(A)$ и $\lambda = \lambda' = \lambda''$. Тогда пучок операторов \vec{B} полиномиально A -ограничен, причем ∞ является устранимой особой точкой A -резольвенты пучка \vec{B} [5].*

Доказательство. (i) Пусть $0 \notin \sigma(A)$, тогда существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})$, причем операторы $A^{-1}B_1, A^{-1}B_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ по построению. Утверждение леммы очевидно.

Пусть $0 \in \sigma(A)$. Тогда любой вектор $\varphi \in \ker A \setminus \{0\}$ имеет вид

$$\varphi = \sum_{k=1}^l a_k \varphi_k, \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^l |a_k| > 0,$$

где $\ker A = \text{span}\{\varphi_0, \dots, \varphi_l\}$, $l = \dim \ker A$. Так как оператор A , в силу самосопряженности, фредгольмов, то, в силу теоремы 1.4.2 [6], достаточно показать отсутствие \vec{B} -присоединенных векторов у любого вектора $\varphi \in \ker A \setminus \{0\}$.

(ii) Пусть $\lambda \neq \lambda'$. Тогда

$$B_1\varphi = B_1\left(\sum_{k=1}^l a_k\varphi_k\right) = \alpha(\lambda - \lambda') \sum_{k=1}^l a_k\varphi_k \notin \text{im}A.$$

Значит, ни один собственный вектор оператора A не имеет относительно присоединенных векторов.

(iii) Если $0 \in \sigma(A)$ и $\lambda = \lambda'$, но $\lambda \neq \lambda''$, то

$$B_0\varphi = B_0\left(\sum_{k=1}^l a_k\varphi_k\right) = \beta(\lambda - \lambda'') \sum_{k=1}^l a_k\varphi_k \notin \text{im}A.$$

Следовательно, и в этом случае ни один собственный вектор оператора A не имеет относительно присоединенных векторов высоты 1. \square

Замечание 1. Как нетрудно видеть, в случае $0 \in \sigma(A)$ и $\lambda = \lambda' = \lambda''$ пучок операторов \vec{B} не будет полиномиально A -ограничен.

Замечание 2. В случаях (i) и (iii) имеет место выполнение условия

$$\int_{\gamma} (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} d\mu = 0, \quad (A)$$

где $\gamma = \{|\mu| = r > a\}$, a – константа из определения полиномиальной A -ограниченности. Это условие является необходимым и достаточным при построении фазового пространства. В случае (ii)

$$\int_{\gamma} (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} d\mu \neq 0,$$

поэтому он исключается из дальнейших рассуждений.

Определение 1. Множество \mathcal{P} называется фазовым пространством уравнения (1.2), если

- (i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (1.2) лежит в \mathcal{P} , т.е. $u(t) \in \mathcal{P}$ при всех $t \in \mathbb{R}$.
- (ii) для любых $u_0, u_1 \in \mathcal{P}$ существует единственное решение задачи (1.1), (1.2).

Пусть $\{\lambda_k\}$ – собственные значения оператора D , занумерованные по неубыванию с учетом их кратности, а $\{\varphi_k\}$ – соответствующие им ортонормированные в смысле $L_2(G)$ функции. Построим проекторы [5]

$$P = \begin{cases} I, & 0 \notin \sigma(A); \\ I - \sum_{\lambda_k = \lambda - a} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k, & 0 \in \sigma(A); \end{cases}$$

$$Q = \begin{cases} I, & 0 \notin \sigma(A); \\ I - \sum_{\lambda_k = \lambda - a} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k, & 0 \in \sigma(A), \end{cases}$$

определенные на пространствах \mathcal{U} и \mathcal{F} соответственно, и семейство M, N -функций уравнения (1.2)

$$M(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} (\mu A - B_1) e^{\mu t} d\mu =$$

$$= \sum_k \left[\frac{\mu_k^1(\lambda - (a + \lambda_k)) + \alpha(\lambda' - (a + \lambda_k))}{(\lambda - (a + \lambda_k))(\mu_k^1 - \mu_k^2)} e^{\mu_k^1 t} + \frac{\mu_k^2(\lambda - (a + \lambda_k)) + \alpha(\lambda' - (a + \lambda_k))}{(\lambda - (a + \lambda_k))(\mu_k^2 - \mu_k^1)} e^{\mu_k^2 t} \right] \times \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k;$$

$$N(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} A e^{\mu t} d\mu =$$

$$= \sum_k \frac{e^{\mu_k^1 t} - e^{\mu_k^2 t}}{(\mu_k^1 - \mu_k^2)} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

здесь $\sigma^A(\vec{B}) = \{\mu_k^{1,2} : k \in \mathbb{N}\}$, а $\mu_k^{1,2}$ – корни уравнения

$$(\lambda - (a + \lambda_k))\mu^2 + \alpha(\lambda' - (a + \lambda_k))\mu + \beta(\lambda'' - (a + \lambda_k)) = 0,$$

а штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемых с номерами k такими, что $\lambda = a + \lambda_k$. Отсюда справедлива

Теорема 2. Пусть $\alpha, \lambda, \lambda', \lambda'' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и (i) $0 \notin \sigma(A)$. Тогда фазовым пространством уравнения (1.2) является все пространство \mathcal{U} , т. е. для любых $u_0, u_1 \in \mathcal{U}$ существует единственное решение $u \in C^2(\mathbb{R}; \mathcal{U})$ задачи (1.1), (1.2), которое имеет вид $u(t) = M(t)u_0 + N(t)u_1$.

(ii) $0 \in \sigma(A)$ и $\lambda = \lambda'$, но $\lambda \neq \lambda''$. Тогда фазовым пространством уравнения (1.2) является подпространство $\mathcal{U}^1 = \{u \in \mathcal{U} : \langle u, \varphi_k \rangle = 0, \text{ при } \lambda_k = \lambda - a\}$, т.е. для любых $u_0, u_1 \in \mathcal{U}^1$ существует единственное решение $u \in C^2(\mathbb{R}; \mathcal{U}^1)$ задачи (1.1), (1.2), которое имеет вид $u(t) = M(t)u_0 + N(t)u_1$.

Литература

1. Покорный, Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев. – М: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
2. Свиридюк, Г.А. Уравнения соболевского типа на графах / Г.А. Свиридюк // Неклассические уравнения математической физики. – Новосибирск, 2002. – С. 221 – 225.
3. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство одной неклассической модели / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Изв. вузов. Математика. – 2005. – № 11. – С. 47 – 52.
4. Узем, Дж. Линейные и нелинейные волны / Дж. Узем. – М.: Мир, 1977.
5. Замышляева, А.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка / А.А. Замышляева // Вычислит. технологии – 2003. – Т. 8, № 4. – С. 45 – 54.
6. Замышляева, А.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа высокого порядка: дис. ... канд. физ.-мат. наук / А.А. Замышляева – Челябинск, 2003.

Кафедра уравнений математической физики,
Южно-Уральский государственный университет
alzam@math.susu.ac.ru

Поступила в редакцию 8 сентября 2008 г.

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
ВЫРОЖДЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ УРАВНЕНИЙ
С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ШОУОЛТЕРА – СИДОРОВА**

А.В. Келлер

**NUMERICAL SOLUTION OF THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM
FOR DEGENERATE LINEAR SYSTEM OF EQUATIONS
WITH SHOWALTER – SIDOROV INITIAL CONDITIONS**

A. V. Keller

Предложены алгоритм и пример численного решения задачи оптимального управления вырожденной линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Используются начальные условия Шоуолтера–Сидорова для расширения спектра практического применения модели. На примере Леонтьева проведено сравнение с численным решением задачи оптимального управления системой леонтьевского типа с начальным условием Коши.

Ключевые слова: численное решение, оптимальное управление, система леонтьевского типа, метод фазового пространства.

The article proposes algorithm and example of numerical solution of the optimal control problem for degenerate linear system of ordinary differential equations with constant coefficients. By using the initial condition of Showalter – Sidorov we extend the range of practical applicability of this model. By example of Leontief we compare the results with the numerical solution of optimal control problem for Leontief type system with initial condition of Cauchy.

Keywords: numerical solution, optimal control problem, Leontief type system, method of phase space

Введение

В [1] предложен численный алгоритм решения задачи Коши

$$x(0) = x_0 \quad (1)$$

для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Sx + g, \quad (2)$$

основанный на идеях теории полугрупп операторов, здесь S – квадратная матрица порядка n . В [2], [3] этот подход был распространен на задачу (1) для вырожденной системы уравнений

$$L\dot{x} = Mx + f \quad (3)$$

с использованием идей теории вырожденных полугрупп операторов [4]. (Здесь L и M – квадратные матрицы, порядка n , причем $\det L = 0$). Одним из важных случаев системы

(3) является хорошо известная система В.В. Леонтьева «затраты-выпуск» с учетом запасов (см. в [5]), поэтому в [2] был предложен термин «система леонтьевского типа». Простота применяемого в [2], [3] алгоритма обеспечивает высокое качество получаемого программного продукта, что выгодно отличает данный алгоритм от использовавшихся ранее методов Эйлера, Рунге – Кутты, итерационных и других методов (см. библиографию в [6]).

В [7] рассмотрены задачи оптимального управления

$$J(v) = \min_{u \in H_{\mathcal{O}}^{p+1}} J(u) \quad (4)$$

задачи Коши (1) для системы уравнений

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + y(t) + Bu(t), \quad (5)$$

где операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M \in Cl(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, функции $u : [0; T] \rightarrow \mathcal{U}$, $y : [0; T] \rightarrow \mathcal{Y}$, $T \in R_+$, $H_{\mathcal{O}}^{p+1}$ – непустое выпуклое подмножество пространства управлений H^{p+1} , функционал качества $J = J(u)$ имеет вид

$$J(u) = \sum_{q=0}^1 \int_0^T \|z^{(q)}(t) - z_0^{(q)}\|_N^2 dt + \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^T \langle N_q u^{(q)}(t), u^{(q)}(t) \rangle_N dt. \quad (6)$$

В [8] рассмотрена задача оптимального управления (4) для уравнения (5) с обобщенным условием Шоултера – Сидорова

$$Px(0) = P(x_0). \quad (7)$$

В [9] представлен алгоритм численного решения задачи Шоултера – Сидорова

$$\left[(\alpha L - M)^{-1} L \right]^p (x(0) - x_0) = 0 \quad (8)$$

для системы (3).

Основная цель данной статьи – нахождение численного решения задачи оптимального управления (4) для системы леонтьевского типа (3) с начальным условием Шоултера – Сидорова (8). Статья кроме введения и списка литературы содержит две части. В первой дается краткое теоретическое обоснование алгоритма и приводятся основные его этапы, во второй рассмотрено численное решение примера Леонтьева.

1. Задача оптимального управления с начальными условиями Шоултера – Сидорова

Пусть L и M – квадратные матрицы порядка n , причем $\det L = 0$. Пучок матриц $\mu L - M$ назовем регулярным, если существует число $\lambda \in \mathcal{C}$ такое, что $\det(\lambda L - M) \neq 0$. Условие регулярности пучка матриц эквивалентно условию L -регулярности матрицы M [2], [3]. Поэтому, как показано в [4], гл. 4, при условии регулярности пучка существуют единственным образом определяемые матрицы H, S, M_0, L_1, Q порядка n , такие, что L -резольвента $(\mu L - M)^{-1}$ матрицы M разлагается в ряд Лорана

$$(\mu L - M)^{-1} = \sum_{l=0}^p \mu^l H^l M_0 (I - Q) + \sum_{l=1}^{\infty} \mu^{-l} S^{l-1} L_1 Q \quad (4)$$

в окрестности бесконечно удаленной точки, причем H – нильпотентная матрица со степенью нильпотентности p , Q – идемпотентная матрица, MM_0, M_0M, L_1L и LL_1 – диагональные матрицы с нулями и единицами на главной диагонали. Поскольку $\det(\lambda L - M) \neq 0$, то многочлен $\det(\lambda L - M) = 0$ имеет не более n различных нулей, которые расположены в круге радиуса a , а значит, при $|\mu| > a$ разложение (4) имеет место. Точка ∞ называется устранимой особой точкой L -резольвенты матрицы M , если $p = 0$ в (4); и полюсом порядка $p \in N$ в противном случае. В дальнейшем, немного отходя от классического стандарта, будем называть устранимую особую точку полюсом порядка нуль. Итак, пусть пучок $\mu L - M$ регулярен, и ∞ – полюс порядка $p \in \{0\} \cup N$; тогда можно выбрать число α и рассмотреть начальное условие Шоултера – Сидорова

$$[R_\alpha^L(M)]^p (x(0) - x_0) = 0 \quad (9)$$

для задачи оптимального управления (4) системой уравнений леонтьевского типа (5). Здесь $R_\alpha^L(M) = (\alpha L - M)^{-1}L$ – правая L -резольвента матрицы M , в отличие от ее левой L -резольвенты $L_\alpha^L(M) = L(\alpha L - M)^{-1}$.

Воспользуемся результатом, изложенным в [8]. При любых $y \in H^{p+1}(\mathcal{Y}), x_0 \in \mathfrak{W}_y$ (\mathfrak{W}_y – фазовое пространство уравнения (3)) и $u \in H^{p+1}(\mathcal{U})$ существует единственное решение $x \in H^1(\mathcal{X})$ задачи Коши с начальными условиями (2) для уравнения (3), имеющего вид

$$x(t) = (A_1 + A_2)(y + Bu)(t) + X^t x_0. \quad (10)$$

Зафиксируем в последнем уравнении $y = y(t)$ и x_0 и рассмотрим его как отображение

$$D : u \rightarrow x(u). \quad (11)$$

Лемма 1. Пусть матрица M L -регулярна, $y \in H^{p+1}(\mathcal{Y})$, и $x_0 \in \mathfrak{W}_y$ фиксированы. Тогда отображение $D : H^{p+1}(\mathcal{U}) \rightarrow H^1(\mathcal{X})$, определенное в (11), непрерывно.

Рассмотрим множество вектор-функций, зависящее от $n \times m + 1$ параметров

$$u(t) = \Phi(t, a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nm}) \quad (12)$$

и такое, что при всех значениях параметров вектор-функции множества принадлежат H_θ^{p+1} .

Пусть множество (12) всюду плотно в H_θ^{p+1} . Ограничив множество допустимых управлений вектор-функциями множества (12), найдем среди них ту, которая минимизирует функционал качества (6). Подставив в него (12) вместо u , выполнив необходимые преобразования, получим зависимость функционала от $n \times m$ переменных $J = J(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nm})$. После этого получаем значения параметров $\widehat{a}_{11}, \widehat{a}_{12}, \dots, \widehat{a}_{nm}$, дающие минимум функции $J(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nm})$. Выбрав из множества (12) вектор-функцию, отвечающую именно этим значениям параметров, мы получим требуемое приближенное решение

$$\widehat{u}(t) = \Phi(t, \widehat{a}_{11}, \widehat{a}_{12}, \dots, \widehat{a}_{nm}).$$

Введем в рассмотрение ряд множеств функций

$$u_m(t) = \Phi_m(t, a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nm}), \quad m = 1, 2, \dots,$$

каждое из которых шире предыдущего в результате добавления дополнительных параметров. Через $\widehat{u}_m(t)$ обозначим m -ое приближение – вектор-функцию, дающую из всех вектор-функций m -го множества наименьшее значение функционала J .

Теорема 1. Пусть Φ_m всюду плотно в H_{∂}^{p+1} , тогда $J(\hat{u}_m(t)) \rightarrow J(v)$ при $m \rightarrow \infty$.

Доказательство приведено в [10].

Теорема 2. Для любого $u_m \in H_m^{p+1}$ справедлива оценка

$$\sum_{q=0}^{p+1} \int_0^{\tau} \|u_m^{(q)}(t) - v_t^{(q)}\|_{\mathcal{U}}^2 dt \leq \max \|\hat{N}_q(t)\|^2 J(u_m),$$

где матрицы N_q из (4) и \hat{N}_q связаны равенством $N_q = \hat{N}_q^T \hat{N}_q$.

Доказательство приведено в [10].

В качестве управлений при построении итерационного процесса будем рассматривать многочлены вида

$$u_m(t) = \sum_{i=p+1}^m a_i t^i. \quad (13)$$

В качестве множества допустимых управлений будем рассматривать шар

$$\sum_{q=0}^{p+1} \int_0^{\tau} \|u_m^{(q)}(t)\|^2 dt \leq d, \quad (14)$$

где m – максимальная степень многочлена, d – неотрицательная постоянная величина, a_i – коэффициенты многочлена.

Теорема 3. Множество многочленов вида (13) всюду плотно в H^{p+1} .

Доказательство приведено в [10].

Алгоритм решения задачи оптимального управления состоит из двух основных этапов. Этап 1 заключается в нахождении чисел $\alpha \in R$ и $p \in \{0\} \cup N$. Рассмотрим многочлен

$$\det(\mu L - M) = a_n \mu^n + a_{n-1} \mu^{n-1} + \dots + a_1 \mu + a_0.$$

Поскольку $a_n = \det L$, то $a_n = 0$. Коэффициент a_l есть сумма слагаемых, каждое из которых есть произведение одного из миноров порядка l матрицы L на число, $l = 1, \dots, n-1$, $a_0 = \det(-M)$. Поэтому степень многочлена $\det(\mu L - M)$ не выше ранга матрицы L . Итак,

$$\det(\mu L - M) = a_q \mu^q + a_{q-1} \mu^{q-1} + \dots + a_1 \mu + a_0,$$

где $q = \deg \det(\mu L - M) \leq \text{rank} L$. Поэтому, если взять число $\alpha \in R$ таким, что

$$|\alpha| > \max \left\{ 1, |a_q|^{-1} \left(\sum_{l=0}^q |a_l| \right) \right\},$$

то $\det(\alpha L - M) \neq 0$, и, значит, существует матрица $(\alpha L - M)^{-1}$. Далее, считая, что матрица M обратима, представим $\det(\mu L - M) = \det M \det(\mu M^{-1} L - I)$. Зная, что порядок полюса в точке ∞ резольвенты $(\mu I - M^{-1} L)^{-1}$ равен нулю, легко найти, что порядок полюса L -резольвенты матрицы в точке ∞ равен $n - q$. Итак, числа α и $p = n - q$ найдены.

Тогда, находя значение k , с которого можно начинать считать приближенные проекторы, получим, что при

$$k > \frac{1}{|\alpha|} \sum_{l=q+1}^n |\alpha_l| + 1$$

мы не сможем оказаться даже вблизи точки L -спектра оператора M .

Этап 2 заключается в поиске многочлена, минимизирующего функционал. Воспользовавшись результатами [2], перепишем функционал (6) в виде

$$J(u) = \sum_{q=0}^1 \int_0^{\tau} \|C(-\sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1}(I-Q) \frac{d^k}{dt^k}(f(t) + B \sum_{i=2}^m a_i t^i) + U^t x_0 + \\ + \int_0^{\tau} R t^{-s} Q(f(s) + B \sum_{i=2}^m a_i s^i) ds)^{(q)} - z_0^{(q)}\|_{\mathfrak{M}}^2 dt + \\ + \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^{\tau} \langle N_q(\sum_{i=2}^m a_i t^i)^{(q)}(t), (\sum_{i=2}^m a_i t^i)^{(q)}(t) \rangle_{\mathfrak{M}} dt.$$

Перепишем функционал (6) в виде функций от переменных u_m – коэффициентов многочлена допустимого управления. Затем воспользуемся минимизацией функции нескольких переменных, взяв за основу методы выпуклого программирования. При его реализации будем учитывать условие принадлежности многочлена управления множеству допустимых управлений.

2. Пример Леонтьева

Взяв в качестве матриц

$$L = \begin{pmatrix} \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & \frac{21}{20} \\ \frac{1}{100} & \frac{103}{200} & \frac{8}{25} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{5} & \frac{-11}{20} \\ \frac{-7}{25} & \frac{10304189}{11996000} & \frac{-70836357}{119960000} \\ \frac{-4}{15} & \frac{-2}{15} & \frac{13}{15} \end{pmatrix},$$

рассмотрим динамическую систему Леонтьева

$$L \dot{x} = Mx + u. \tag{16}$$

Если переобозначить $L = B$, $M = I - A$, то матрицы B и A почти совпадут с матрицами из классического примера [5]. «Почти» означает, что элементы m_{22} и m_{23} подобраны специально с целью упростить вычисления и отличаются от приведенных в примере чисел $\frac{22}{25}$ и $-\frac{3}{5}$ на величины $-\frac{252291}{11996000}$ и $\frac{1139643}{119960000}$ соответственно.

В.В. Леонтьев рассматривал взаимосвязи между тремя отраслями экономики – сельским хозяйством, промышленностью и домашними хозяйствами. Элемент a_{ij} матрицы A означает количество продукции i -й отрасли, необходимой для производства единицы продукции j -й отрасли. Элемент b_{ij} матрицы B представляет определенный технологический запас особого типа благ, производимой отраслью, который используется в отрасли j для производства единицы ее продукции. Другими словами, каждый столбец матрицы B описывает потребность некоторой отрасли в физическом капитале (в расчете на единицу ее валового выпуска) таким же образом, как соответствующий столбец матрицы A описывает ее затраты. Именно поэтому последняя строка матрицы B содержит только нулевые элементы, так как труд невозможно запасти.

Перейдя к расчетам найдем $q = \deg \det(\mu L - M) = 2$, $p = n - q = 1$, $\alpha = 3$, $k = 100$. Пусть матрица N_0 будет диагональной: все элементы ее главной диагонали равны 0,1. То есть 10 процентов средств, собранных в виде налогов, либо направленных на финансирование отраслей, идет на содержание государственного аппарата. Пусть $d = 200$. Возьмем $x_0 \in \mathfrak{W}_y$

$$x_0 = \left[\frac{5}{2}; 3; \frac{28}{13} \right].$$

Тогда наблюдение $z_0(t)$, исходя из условия о равномерном увеличении валового выпуска отраслей за единичный отрезок, времени будет выглядеть так

$$z_0(t) = \left[\frac{5}{2} + 3t; 3 + 4t; \frac{28}{13} + 4t \right].$$

Так как $p = 1$, в качестве оптимального управления будем рассматривать многочлен второй степени. В качестве функционала получим

$$\begin{aligned} J(u) = & -28,411031u_{11}u_{12} + 8,9863884u_{12}^2 + 27,586248u_{11}^2 + 2,931559165u_{13}^2 - \\ & -7,526036725u_{21}u_{22} + 1,88479004u_{22}u_{13} + 0,68415325u_{13}u_{11} + \\ & + 0,453773u_{21}u_{23} + 30,1913248u_{21}u_{11} + 0,7331647u_{13}u_{21} + \\ & + 4,863240111u_{13}u_{23} - 14,6617031u_{22}u_{11} + 2,86544218u_{13}u_{12} + \\ & + 2,2858u_{12}u_{23} - 15,234u_{12}u_{21} + 9,73821u_{12}u_{22} + 0,2026811u_{11}u_{23} + \\ & + 1,554u_{23}u_{22} - 16,74124801u_{12} - 9,24457347u_{13} - 5,338387u_{11} - \\ & - 30,3891247u_{21} + 7,66626u_{22} - 4,7948792u_{23} + 2,715337232u_{11}^2 + \\ & + 8,412766u_{21}^2 + 2,473233759u_{23}^2 + 60,03724539. \end{aligned}$$

Приведем значения коэффициентов вектор-функции u , при которых функционал минимален, для чего продифференцируем функционал по каждому из коэффициентов, приравняем полученные производные к нулю и решим систему уравнений.

$$\begin{aligned} u_{01} = 0, & & u_{02} = 0, & & u_{03} = 0, \\ u_{11} = 7,406403247, & & u_{12} = 11,66295383, & & u_{13} = -0,9539033784, \\ u_{21} = -5,631563350, & & u_{22} = -10,14607244, & & u_{23} = -0,08166019352. \end{aligned}$$

При этом функционал равен $J(v) = 4,017151931$.

Приведем решение задачи с использованием алгоритма.

$$\begin{aligned} u_{01} = 0, & & u_{02} = 0, & & u_{03} = 0, \\ u_{11} = 7,461857411, & & u_{12} = 11,760767311, & & u_{13} = -0,954971428, \\ u_{21} = -5,693110356, & & u_{22} = -10,285817347, & & u_{23} = -0,081086317. \end{aligned}$$

Функционал, вычисленный по алгоритму, равен $\hat{J}(\tilde{v}) = 3,936587$.

При подстановке в функционал, вычисленный точно, значений коэффициентов, вычисленных приближенно, получаем $J(\tilde{v}) = 4,0194539019$.

Сравнение результатов, полученных под действием управления v и под действием управления \tilde{v} , вычисленного по алгоритму, показывает незначительные расхождения.

Приведем решение задачи оптимального управления с начальными условиями Коши

$$\begin{aligned} u_{01} = 0, & & u_{02} = 0, & & u_{03} = 0, \\ u_{11} = 7,461897495, & & u_{12} = 11,760772705, & & u_{13} = -0,954971313, \\ u_{21} = -5,692871094, & & u_{22} = -10,285858154, & & u_{23} = -0,081085205. \end{aligned}$$

Функционал, вычисленный по алгоритму, равен $\hat{J}(\tilde{v}) = 3,921287$.

При подстановке в функционал, вычисленный точно, значений коэффициентов, вычисленных приближенно, получаем $J(\tilde{v}) = 4,020573773$.

Таким образом, расхождение численных решений задачи оптимального управления вырожденной линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями Коши и Шоултера–Сидорова также незначительно. Это позволяет предположить, что экономический смысл начального условия Шоултера–Сидорова в рассматриваемых задачах аналогичен условию Коши.

Литература

1. Павлов, Б.В. Об одном методе численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Б.В. Павлов, А.Я. Повзнер // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1973. – Т. 13, № 4. – С. 1056 – 1059.
2. Свиридюк, Г.А. Численное решение систем уравнений леонтьевского типа / Г.А. Свиридюк, С.В. Брычев // Изв. ВУЗ. Матем. – 2003. – № 8. – С. 46 – 52.
3. Свиридюк, Г.А. Алгоритм решения задачи Коши для вырожденных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами / Г.А. Свиридюк, И.В. Бурлачко // ЖВМиМФ. – 2003. – Т. 43, № 11. – С. 1677 – 1683.
4. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semi-groups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2003.
5. Леонтьев, В.В. Межотраслевая экономика / В.В. Леонтьев. – М.: Экономика, 1997.
6. Чистяков, В.Ф. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем / В.Ф. Чистяков, А.А. Щеглова. – Новосибирск: Наука, 2003.
7. Свиридюк, Г.А. Задача оптимального управления для одного класса линейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, А.А. Ефремов // Изв. ВУЗ. Матем. – 1996. – № 12. – С. 75 – 83.
8. Федоров, В.Е. Задача оптимального управления для одного класса вырожденных уравнений / В.Е. Федоров, М.В. Плеханова // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2004. – Т. 9, № 2. – С. 92 – 102.
9. Келлер, А.В. Алгоритм численного решения обобщенной задачи Шоултера-Сидорова для системы уравнений леонтьевского типа // Вычислительная математика: труды XIV Байкальской Междунар. шк.-семинара «Методы оптимизации и их приложения». – Иркутск, 2008. – Т. 3. – С. 96 – 102.
10. Келлер, А.В. Об оптимальном управлении системами леонтьевского типа // Оптимизация, управление, интеллект. – Иркутск, 2006. – № 1(12). – С. 82 – 89.

Кафедра общеобразовательных дисциплин,
Южно-Уральский государственный университет
alevtinak@inbox.ru

Поступила в редакцию 25 сентября 2008 г.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ЧАСТИЧНОГО ЗЕРКАЛИРОВАНИЯ ПРИ БАЛАНСИРОВКЕ ЗАГРУЗКИ В ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СУБД ДЛЯ КЛАСТЕРНЫХ СИСТЕМ

А.В. Лепихов

APPLICATION OF THE PARTIAL MIRRORING METHOD WHEN BALANCING THE LOAD IN THE PARALLEL DBMS FOR THE CLUSTER SYSTEMS

A. V. Lepikhov

Статья посвящена проблеме балансировки загрузки в параллельных СУБД для кластерных систем. Предложен алгоритм балансировки загрузки основанный на методе частичного зеркалирования. Описана реализация данного алгоритма для операции соединения методом хеширования в оперативной памяти. Описаны результаты вычислительных экспериментов, в которых исследована эффективность предложенного алгоритма балансировки в условиях перекосов в распределении данных.

Ключевые слова: системы баз данных, параллельная обработка, балансировка загрузки

This Paper is dedicated to load balancing problem in parallel database management systems for cluster systems. Load balancing algorithm based on partial mirroring method is described. Implementation of the algorithm for the connective operation using the hashing method in memory is presented. Experimental results demonstrates effectiveness of the algorithm in conditions of data scatter skews.

Keywords: data base systems, parallel processing, load balancingload

Введение

В настоящее время большое распространение получили относительно недорогие кластерные системы, которые отличаются простотой наращивания вычислительных ресурсов (памяти, дисков, процессоров) и потенциально обладают неограниченной производительностью. В рейтинге TOP500 самых мощных компьютеров мира доля кластерных систем составляет 80%. В соответствии с этим становится актуальной задача разработки новых параллельных приложений и адаптации существующих приложений к кластерным системам. В области параллельных систем баз данных одним из наиболее перспективных подходов к созданию параллельных СУБД является метод инкапсуляции параллелизма. Данный подход предполагает создание параллельной СУБД путем внедрения специальных операторов-капсул *exchange* в последовательный план выполнения запроса. Изначально метод инкапсуляции параллелизма был разработан для многопроцессорных систем с общей памятью [1]. Затем он был обобщен для мультипроцессоров с массовым параллелизмом и для кластерных систем [2]. Основной проблемой для кластерных

систем является проблема перекосов [3]. Эффект перекоса состоит в неравномерной загрузке процессорных узлов. Основной причиной возникновения перекосов в системах баз данных является неравномерное распределение данных по процессорным узлам. Перекосы могут приводить к полной деградации общей производительности системы [4]. В данной работе исследуется метод частичного зеркалирования [5], который может быть эффективно использован для балансировки загрузки в кластерных системах. Предлагается оригинальный алгоритм балансировки загрузки, основанный на использовании метода частичного зеркалирования и оператора **exchange**. Описывается реализация этого алгоритма для операции соединения хешированием в основной памяти. Данный алгоритм реализован в прототипе параллельной СУБД Омега. Исследована эффективность предложенного алгоритма балансировки в условиях перекосов в распределении данных по процессорным узлам.

1. Метод частичного зеркалирования

В основе метода частичного зеркалирования лежит *функция фрагментации* [2] $\phi_X, \phi_X : X \rightarrow N$, где X – произвольное отношение. Для любого $x \in X$ значение $\phi_X(x)$ определяет номер узла, на котором хранится кортеж x . Через X_k будем обозначать фрагмент отношения X , хранящийся на k -м узле: $X_k = \{x | x \in X, \phi_X(x) = k\}$. через X_k^m будем обозначать реплику X_k хранящуюся на m -м узле. В частности, имеем $X_k^k = X_k$. Мы предполагаем, что каждое отношение фрагментировано по K узлам. Мы также предполагаем, что каждый фрагмент реплицирован (возможно, частично) на M узлах. Нумерация узлов начинается с единицы. Фрагмент состоит из набора *сегментов* – блоков кортежей заданного размера. Размер реплики k -го фрагмента на m -м узле задается коэффициентом репликации ρ_k^m . Поскольку отношение S значительно больше отношения R , то мы будем предполагать, что балансировка выполняется только для отношения S . Балансировка происходит с точностью до сегмента. При этом в балансировке, в качестве рабочих узлов, могут принимать участие только те узлы, на которых имеются фрагменты исходных отношений. Опишем механизм балансировки загрузки для произвольной унарной однопроходной операции над отношением S . Схема работы предлагаемого алгоритма изображена на рис. 1 на примере кластера с двумя процессорными узлами и коэффициентом репликации 0,5. Пусть процессоры P_1 и P_2 выполняют выборку кортежей из отношения S . Фрагмент S_1 назначается процессору P_1 , фрагмент S_2 – процессору P_2 . Пусть в момент времени t_2 процессор P_1 уже обработал выделенные ему фрагменты, в то время как процессор P_2 выполнил только часть назначенной ему работы. В этом случае происходит перераспределение оставшейся необработанной части фрагмента S_2 . При этом процессор P_1 использует для обработки реплику S_2^1 . Процесс продолжается до тех пор, пока тестируемое отношение S не будет полностью обработано. Алгоритм очевидным образом обобщается на произвольное количество процессоров. Перераспределение необработанной части фрагмента может быть произведено заново, если к моменту времени t_4 процессор P_2 не завершит обработку своего фрагмента.

2. Соединение хешированием в основной памяти

Современные кластерные системы имеют значительную суммарную оперативную память. Например, кластер СКИФ Урал [8] имеет суммарную оперативную память 1,33 ТБ. В контексте систем баз данных это означает, что при использовании фрагментного параллелизма отношение размером меньше 1,33 ТБ может быть фрагментировано по процессорным узлам таким образом, что каждый фрагмент этого отношения целиком

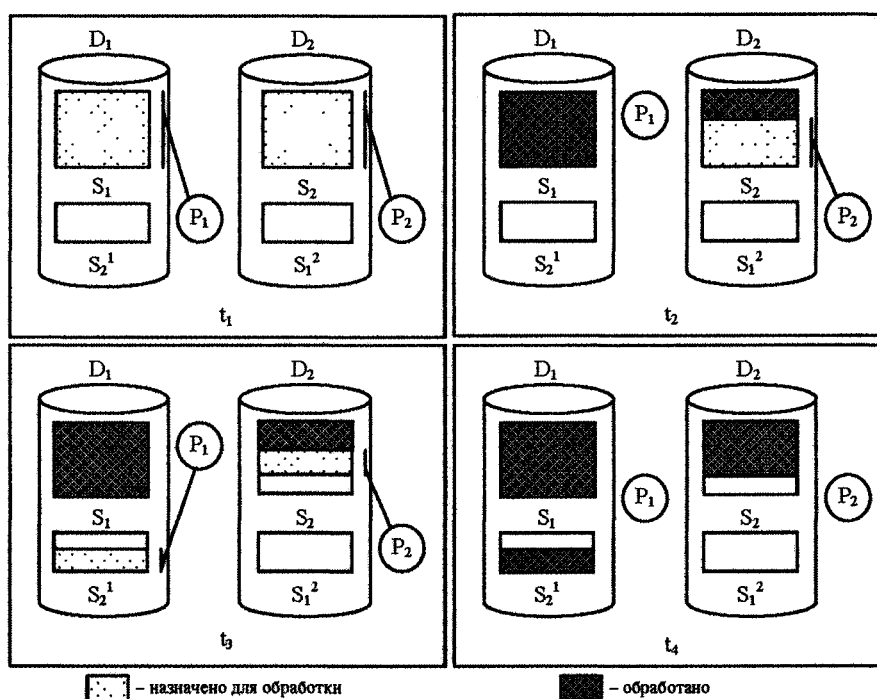


Рис. 1. Балансировка загрузки для двух узлов с $\rho = 0,5$

поместится в оперативную память. В бинарных реляционных операциях обычно одно из отношений по размеру значительно превосходит другое. Применительно к операции соединения меньшее отношение называется *опорным*, а большее – *тестируемым*. В реальных приложениях баз данных случаи, когда опорное отношение имеет размер более терабайта, достаточно редки. Поэтому в кластерных системах для операции соединения может быть использован простой и эффективный алгоритм соединения методом хеширования в основной памяти [6]. Для реализации балансировки загрузки в набор операций реляционной алгебры добавляется специальный оператор **exchange** [2]. Оператор **exchange** выполняет перераспределение кортежей между процессорными узлами в соответствии с *функцией распределения*, которая для каждого кортежа определяет номер процессорного узла, на котором данный кортеж должен быть обработан.

Пример использования оператора **exchange** показан на рис. 2. На данном рисунке представлен параллельный план запроса, реализующего операцию МНД соединения хешированием в основной памяти. Оператор **scan** выполняет сканирование отношения. Оператор **exchange** вставляется в качестве левого и правого сына оператора МНД. В процессе обработки запроса он выполняет перераспределение кортежей, поступающих от оператора **scan**, между процессорными узлами. Общую схему обработки операции соединения хешированием в основной памяти можно описать следующим образом. Параллельный план (см. рис. 2) передается на каждый процессорный узел, содержащий фрагмент базы данных. Параллельный агент, расположенный на узле, выполняет данный параллельный план. Процесс выполнения соединения можно разделить на две фазы. На первой фазе выполняется инициализация операции соединения. Кортежи опорного отношения перераспределяются между процессорными узлами. Параллельный агент строит фрагмент хеш-таблицы опорного отношения в основной памяти в соответствии с некоторой хеш-функцией. На второй фазе выполняется обработка тестируемого отношения. Кортежи тестируемого отношения перераспределяются между узлами, и выполняется операция соединения. Операция формирования хеш-таблицы не требует балансировки

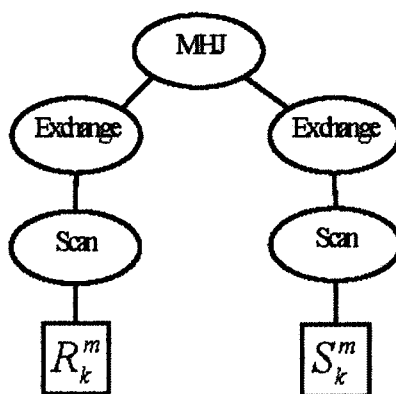


Рис. 2. Параллельный план запроса $R \triangleright \triangleleft S$

ввиду небольшого размера опорного отношения. Таким образом, при выполнении операции соединения методом хеширования в основной памяти балансировка используется на этапе обработки тестируемого отношения и сводится к балансировке загрузки унарной однопроходной операции, описанной выше.

3. Результаты экспериментов

Метод балансировки загрузки реализован в прототипе параллельной СУБД «Омега» [7]. На базе данного прототипа проведены вычислительные эксперименты с целью оценки эффективности предложенного метода балансировки при выполнении операции соединения и оценка оптимального значения коэффициента репликации ρ . Испытания проводились на вычислительном кластере ЮУрГУ – СКИФ Урал [8]. Основные системные параметры кластера приведены в таблице.

Параметры системы баз данных

Параметр	Значение
Количество процессорных узлов	166
Частота ядра процессора	3,0 GHz
Оперативная память	1,33 ТБ
Дисковая память	49,29 ТБ
Пропускная способность сети	20 Гбит/сек
Размер отношения R	0,4 ГБ
Размер отношения S	8 ГБ
Размер сегмента	2 МБ

В экспериментах использовалась тестовая база данных, состоящая из отношений с целочисленными атрибутами. Для генерации значений атрибутов использовалось распределение «80–20», «45–20» и нормальное распределение. По умолчанию, все атрибуты генерировались в соответствии с распределением «80–20», согласно которому двадцати процентам значений атрибута соответствует восемьдесят процентов кортежей [9]. В экспериментах исследовалось влияние механизма балансировки на время выполнения операции соединения хешированием в основной памяти. В ходе эксперимента прототип «Омега» запускался на 20 процессорных узлах кластера СКИФ Урал с различным

коэффициентом репликации ρ . Коэффициент репликации варьировался в пределах от 0 (отсутствие репликации) до 1 (полная копия базы данных на каждом узле). Эксперименты показали, что при использовании механизма балансировки загрузки наблюдается значительное увеличение скорости выполнения операции соединения. Результаты данного эксперимента изображены на рис. 3. Наибольший прирост производительности возникает при выполнении запросов над базой данных, сгенерированной и фрагментированной в соответствии с правилом «80-20». Коэффициент репликации 0,15 дает прирост производительности 6%, при $\rho=0,60$, прирост производительности составляет 25%, а при полной репликации ($\rho=1,00$) – 35%. Таким образом, в конкретных приложениях баз данных коэффициент репликации можно варьировать с целью уменьшения накладных расходов на поддержание реплик. В настоящее время ведутся работы по реализации метода балансировки для алгоритмов GRACE соединения и гибридного соединения. Планируется внедрение предложенного метода балансировки загрузки в СУБД с открытым исходным кодом PostgreSQL.

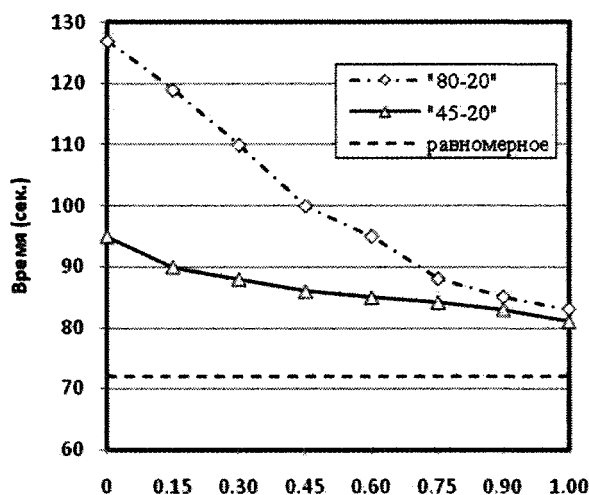


Рис. 3. Зависимость времени выполнения запроса от коэффициента репликации ρ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-07-89148).

Литература

1. Graefe, G. Encapsulation of Parallelism in the Volcano Query Processing Systems / G. Graefe // Proceedings of the 1990 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data, Atlantic City, NJ, May 23 – 25, 1990. ACM Press. –1990. – P. 102 – 111.
2. Соколинский, Л.Б. Организация параллельного выполнения запросов в многопроцессорной машине баз данных с иерархической архитектурой / Л.Б. Соколинский // Программирование. – 2001. – №. 6. – С. 13 – 29.
3. Maertens, H. A Classification of Skew Effects in Parallel Database Systems / H. Maertens // Proceedings of 7th International Euro-Par Conference, Manchester, UK, August 28 – 31, 2001. – P. 291 – 300.
4. Lakshmi, M.S. Effectiveness of Parallel Joins / M.S. Lakshmi, P.S. Yu // IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering. –1990. –V. 2, №. 4. – P. 410 – 424.

5. Костенецкий, П.С. Технологии параллельных систем баз данных для иерархических многопроцессорных сред / П.С. Костенецкий, А.В. Лепихов, Л.Б. Соколинский // Автоматика и телемеханика. –2007. – Т. 68, №. 5. – С. 847 – 859.
6. DeWitt, D.J. Multiprocessor Hash-Based Join Algorithms / D.J. DeWitt, R.H. Gerber // VLDB'85, Proceedings of 11th International Conference on Very Large Data Bases, Stockholm, Sweden, August 21 – 23, 1985. –Morgan Kaufmann. – 1985. – P. 151 – 164.
7. Прототип параллельной СУБД «Омега» : [<http://omega.susu.ru>]
8. Высокопроизводительный вычислительный кластер «СКИФ Урал» : [<http://skif-ural.susu.ac.ru>]
9. Heising, W.P. Note on Random Addressing Techniques // IBM System Journal. – 1963. – V. 2, №. 2. – P. 112 – 116.

Кафедра «Системное программирование»,
Южно-Уральский государственный университет
lepikhov@gmail.com

Поступила в редакцию 17 сентября июля 2008 г.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЕМ ОСКОЛКОВА

Н.А. Манакова

ON A MODEL OF OPTIMAL CONTROL OF THE OSKOLKOV EQUATION

N.A. Manakova

Найдены достаточные и необходимые условия существования оптимального управления решениями задачи Шоуолтера – Сидорова уравнения, моделирующего эволюцию давления вязкоупругой жидкости. Абстрактные результаты подтверждены численными экспериментами.

Ключевые слова: уравнение Осколкова, уравнения соболевского типа, задача оптимального управления

Sufficient and necessary conditions of the optimal control existence of solutions to the Showalter – Sidorov problem of the equation modeling evolution of the visco-elastic fluid pressure are found. Abstract results are confirmed by numerical experiments.

Keywords: the Oskolkov equation, Sobolev type equations, optimal control problem

Введение

Неклассическое уравнение

$$(\lambda - \Delta)x_t = \alpha\Delta x - |x|^{p-2}x + f \quad (1)$$

моделирует эволюцию давления ($x = x(s, t)$) вязкоупругой жидкости, фильтрующейся в пористой среде [1]. Параметры $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}_+$ характеризуют упругость и вязкость жидкости, причем экспериментально было отмечено, что отрицательные значения параметра λ не противоречат физическому смыслу модели [2]. Свободный член $f = f(s, t)$ соответствует внешней нагрузке. В целом уравнение показывает зависимость давления вязкоупругой несжимаемой жидкости (например, высокопарафинового сорта нефти), фильтрующейся в пористом пласте, от внешней нагрузки (например, давления воды, нагнетаемой по скважинам в пласт).

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$(\lambda - \Delta)(x(s, 0) - x_0(s)) = 0, \quad s \in \Omega; \quad (2)$$

$$x(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \quad (3)$$

для уравнения (1) в цилиндре $\Omega \times (0, T)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ . Нелокальные задачи для уравнения (1) изучались в [3] при $\lambda \in \mathbb{R}_+$. При $\lambda \in \mathbb{R}$ задача (1) – (3) изучалась в [4], в которой показано, что при всех $\lambda \in \mathbb{R}$ фазовым пространством уравнения (1) является простое гладкое C^1 -многообразие. Однако

эти результаты не очень удобны при численных расчетах, поэтому в данной статье мы воспользуемся иным подходом, основанным на методе Галеркина – Петрова – Фаздо.

В подходящих функциональных пространствах $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ задача (2), (3) для уравнения (1) редуцируется к задаче Шоултера – Сидорова

$$L(x(0) - x_0) = 0 \quad (4)$$

для полулинейного операторного уравнения соболевского типа

$$L \dot{x} + M(x) = u. \quad (5)$$

Нас интересует оптимальное управление

$$J(x, u) \rightarrow \min \quad (6)$$

решениями задачи (4) – (6). Здесь $J(x, u)$ – некоторый, специальным образом построенный, функционал штрафа; управление $u \in \mathfrak{U}_{ad}$, где \mathfrak{U}_{ad} – некоторое замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений \mathfrak{U} . Таким образом, оптимальное управление решениями задачи (1) – (3) дает возможность минимизировать штрафные санкции при добыче нефти, выбрав внешнюю нагрузку таким образом, чтобы поддерживать необходимое давление жидкости в пласте. Линейная задача оптимального управления (т. е. оператор $M : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ линеен и непрерывен) рассматривалась в монографии [5, гл. 7]. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации (1) – (3), (6) впервые была рассмотрена в [6].

Статья организована следующим образом. В п. 1 доказано существование единственного решения задачи (4) для уравнения (5) методом Галеркина. С использованием идеологии [7], [8] находятся достаточные условия разрешимости задачи (4) – (6). Далее в п. 2 мы сводим задачу (2), (3) для уравнения (1) к задаче (4) для уравнения (5) и приводим необходимые условия экстремума для задачи (4) – (6) в терминах сопряженной задачи. В п. 3 представлены результаты работы программ, вычисляющих оптимальное управление для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации в случае $n = 2, p = 2$ или $p = 4$.

1. Задача оптимального управления

Пусть $\mathcal{H} = (\mathcal{H}; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным; $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}^*)$ – дуальная (относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$) пара рефлексивных банаховых пространств, причем вложения

$$\mathfrak{B} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathfrak{B}^* \quad (7)$$

плотны и непрерывны. Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{B}; \mathfrak{B}^*)$ – линейный, самосопряженный, неотрицательно определенный фредгольмов оператор, чей ортонормальный (в смысле \mathcal{H}) набор собственных векторов $\{\varphi_k\}$ образует базис в пространстве \mathfrak{B} . Пусть далее $M \in C^r(\mathfrak{B}; \mathfrak{B}^*)$ – s -монотонный (т. е. $\langle M'_y(y)x, x \rangle > 0, \forall x, y \in \mathfrak{B} \setminus \{0\}$) и p -коэрцитивный (т. е. $\langle M(x), x \rangle \geq C_M \|x\|^l$ и $\|M(x)\|_* \leq C^M \|x\|^{p-1}$ при некоторых константах $C_M, C^M \in \mathbb{R}_+$ и $l, p \in [2, +\infty), r \in \mathbb{N}$ и любом $x \in \mathfrak{B}$, $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$ – нормы в пространстве \mathfrak{B} и \mathfrak{B}^* соответственно) оператор [9].

Прежде всего сделаем ряд замечаний относительно терминологии. Отметим, что для гладких операторов $M : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}^*$ из сильной монотонности следует s -монотонность, а из s -монотонности – строгая монотонность. Далее оператор $M : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}^*$ назовем *сильно коэрцитивным*, если

$$\lim_{\|v\| \rightarrow \infty} \frac{\langle M(u+v), v \rangle}{\|v\|} = +\infty \quad \forall u \in \mathfrak{B}.$$

Очевидно, что сильно коэрцитивный оператор коэрцитивен. Оказывается, что из p -коэрцитивности следует сильная коэрцитивность. Доказательства этих фактов можно найти в [9].

Рассмотрим задачу Шоултера – Сидорова

$$L(x(0) - x_0) = 0 \tag{8}$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L \dot{x} + M(x) = f. \tag{9}$$

В виду самосопряженности и фредгольмовости оператора L отождествим $\mathfrak{B} \supset \ker L \equiv \text{coker } L \subset \mathfrak{B}^*$. Очевидно, $\mathfrak{B}^* = \text{coker } L \oplus \text{im } L$. Обозначим через Q проектор вдоль $\text{coker } L$ на $\text{im } L$ и сделаем допущение

$$(\mathbb{I} - Q)f \text{ не зависит от } t \in (0, T). \tag{10}$$

Тогда если $x = x(t), t \in [0, T]$ – решение уравнения (9), то оно с необходимостью лежит во множестве

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \{x \in \mathfrak{B} : (\mathbb{I} - Q)M(x) = (\mathbb{I} - Q)f\}, & \text{если } \ker L \neq \{0\}; \\ \mathfrak{B}, & \text{если } \ker L = \{0\}. \end{cases}$$

Система $\{\varphi_k\}$ собственных векторов оператора L тотальна в \mathfrak{B} , поэтому построим галеркинские приближения решения задачи (8), (9) в виде

$$x^m(t) = \sum_{k=1}^m a_k(t)\varphi_k, \quad m > \dim \ker L,$$

где коэффициенты $a_k = a_k(t), k = 1, \dots, m$, определяются решением следующей задачи:

$$\langle Lx_t^m, \varphi_k \rangle + \langle M(x^m), \varphi_k \rangle = \langle f, \varphi_k \rangle, \tag{11}$$

$$\langle x^m(0) - x_0, \varphi_k \rangle = 0, \quad k = 1, \dots, m. \tag{12}$$

Уравнения (11) представляют собой вырожденную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть $\mathfrak{B}^m = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}, T_m \in \mathbb{R}_+, T_m = T_m(x_0)$.

Лемма 1. [9] *При любых $x_0 \in \mathfrak{B}$ и $m > \dim \ker L$ существует единственное решение $x^m \in C^r(0, T_m; \mathfrak{B}^m)$ задачи (11), (12).*

Теорема 1. [9] *При любых $x_0 \in \mathfrak{B}, T \in \mathbb{R}_+, f \in L_q(0, T; \mathfrak{B}^*)$ таких, что выполнено (10), существует единственное решение $x \in L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_p(0, T; \mathfrak{M})$ задачи (8), (9).*

Фиксируем $T \in \mathbb{R}_+$. Построим пространство $\mathfrak{U} = \{u \in L_q(0, T; \mathfrak{B}^*) : (\mathbb{I} - Q)u(t) = 0, t \in (0, T)\}, p^{-1} + q^{-1} = 1$, и определим в пространстве \mathfrak{U} замкнутое и выпуклое множество \mathfrak{U}_{ad} . Рассмотрим задачу оптимального управления (4) – (6), где функционал стоимости задается формулой

$$J(x, u) = \frac{1}{p} \int_0^T \|x(t) - z_d(t)\|_{\mathfrak{B}}^p dt + \frac{N}{q} \int_0^T \|u(t)\|_{\mathfrak{B}^*}^q dt, \tag{13}$$

$z_d = z_d(t)$ – желаемое состояние.

Определение 1. Пару $(\tilde{x}, \tilde{u}) \in L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_p(0, T; \mathfrak{M}) \times \mathfrak{U}_{ad}$ называют *решением задачи (4) – (6)*, если $J(\tilde{x}, \tilde{u}) = \inf_{u \in \mathfrak{U}_{ad}} J(x, u)$, и (\tilde{x}, \tilde{u}) удовлетворяет уравнению $L \dot{x} + M(x) = u$; вектор \tilde{u} называют *оптимальным управлением* в задаче (4) – (6).

Теорема 2. [6] *При любых $x_0 \in \mathfrak{B}, T \in \mathbb{R}_+$ существует решение задачи (4), (5), (13).*

2. Уравнение Осколкова

Редуцируем задачу (1) – (3) к задаче (4), (5). Для этого положим $\mathfrak{B} = W_2^1$, $\mathcal{H} = L_2$ (все функциональные пространства определены на области Ω). Заметим, что в силу теоремы вложения Соболева $W_2^1 \hookrightarrow L_p$ непрерывно при $n \geq 3$ и $2 \leq p \leq 4/(n-2) + 2$. Положим пространство $\mathfrak{B}^* = W_2^{-1}$. Операторы L и M определим формулами:

$$\langle Lx, y \rangle = \int_{\Omega} (\lambda xy + \nabla x \nabla y) ds,$$

$$\langle Mx, y \rangle = \int_{\Omega} (\alpha \nabla x \nabla y + |x|^{p-2} xy) ds,$$

где $x, y \in \mathfrak{B}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в L^2 . (Заметим, что всюду выполняется соглашение Эйнштейна о суммировании по повторяющимся индексам). Обозначим через $\{\lambda_k\}$ последовательность собственных значений однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа $-\Delta$ в области Ω , занумерованное по неубыванию с учетом их кратности.

Лемма 2. [6] (i) При всех $\lambda \geq -\lambda_1$ оператор L самосопряжен, фредгольмов и неотрицательно определен, причем ортонормальное семейство $\{\varphi_k\}$ его функций тотально в пространстве \mathfrak{B} .

(ii) При всех $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $n \geq 3$, $2 \leq p \leq 4/(n-2) + 2$ оператор $M \in C^1(\mathfrak{B}; \mathfrak{B}^*)$ s -монотонен и p -коэрцитивен.

Построим множество

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \mathfrak{B}, & \lambda > -\lambda_1; \\ \{x \in \mathfrak{B} : \langle M(x), \varphi_1 \rangle = \langle y, \varphi_1 \rangle\}, & \lambda = -\lambda_1. \end{cases}$$

Из теоремы 1 и леммы 2 вытекает

Теорема 3. [6] Пусть $\lambda \geq -\lambda_1$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и $n \geq 3$, $2 \leq p \leq 4/(n-2) + 2$, тогда при любых $x_0 \in \mathfrak{B}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $f \in L_2(0, T; \mathfrak{B}^*)$ таков, что выполнено (10), существует единственное решение $x \in L_{\infty}(0, T; \text{coim } L) \cap L_2(0, T; \mathfrak{M})$ задачи (1) – (3).

Перейдем к рассмотрению задачи оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации. В цилиндре $\mathbb{Q} = \Omega \times (0, T)$ зададим функционал качества

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^T \|x - z_d\|_{W_2^1(\Omega)}^2 dt + \frac{N}{2} \int_0^T \|u\|_{W_2^{-1}(\Omega)}^2 dt, \quad (14)$$

и выберем $\mathfrak{U}_{ad} \subset L_2(0, T; W_2^{-1})$ – замкнутое, выпуклое множество, для элементов которого выполнено $(\mathbb{I} - Q)u(t) = 0$. Из теоремы 2 и теоремы 3 непосредственно вытекает

Теорема 4. [6] Пусть $\lambda \geq -\lambda_1$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $n \geq 3$, $2 \leq p \leq 4/(n-2) + 2$ тогда существует оптимальное управление в задаче (1) – (3), (14).

Приведем теперь необходимые условия, которым удовлетворяет любое оптимальное управление u решениями задачи (1) – (3).

Теорема 5. [6] Пусть $\lambda \geq -\lambda_1$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $n \geq 3$, $2 \leq p \leq 4/(n-2) + 2$, если u – оптимальное управление задачи (14), то существует вектор $y \in L_{\infty}(0, T; \text{coim } L) \cap L_2(0, T; \mathfrak{B})$ такой,

что

$$\begin{aligned} &(\lambda - \Delta)x_t - \alpha\Delta x + |x|^{p-2}x = u, \\ &(-\lambda + \Delta)y_t - \alpha\Delta y + (p-1)|x|^{p-2}y = (-\Delta)(x(u) - z_d), (s, t) \in Q, \\ &x(s, t) = y(s, t) = 0, (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ &(\lambda - \Delta)(x(s, 0) - x_0(s)) = 0, (-\lambda + \Delta)y(s, T) = 0, s \in \Omega, \\ &\int_Q (y + N(-\Delta)^{-1}(u))(v - u) ds dt \geq 0 \forall v \in U_{ad}. \end{aligned}$$

3. Приложение

Рассмотрим уравнение Осколкова нелинейной фильтрации при $n = 2$

$$\begin{aligned} &(\lambda - \Delta)x_t(s_1, s_2, t) = \alpha\Delta x(s_1, s_2, t) - \\ &|x(s_1, s_2, t)|^{p-2}x(s_1, s_2, t) + u(s_1, s_2, t). \end{aligned} \quad (15)$$

Зададим область $\Omega = \{(s_1, s_2) : 0 \leq s_1 \leq \pi, 0 \leq s_2 \leq \pi\}$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$(\lambda - \Delta)(x(s_1, s_2, 0) - x_0(s_1, s_2)) = 0, (s_1, s_2) \in \Omega; \quad (16)$$

$$x(s_1, s_2, t) = 0, (s_1, s_2, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \quad (17)$$

для уравнения (15). Решение начально-краевой задачи (15) – (17) будем искать в виде галеркинской суммы

$$x^m(s_1, s_2, t) = \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m x_{kl}(t)\varphi_{kl}, \quad m > \dim \ker(\lambda - \Delta), \quad (18)$$

где $\{\varphi_{kl}\}$ – множество всех решений краевой задачи на собственные значения

$$(\lambda - \Delta)x(s_1, s_2) = 0, (s_1, s_2) \in \Omega;$$

$$x(0, s_2) = x(\pi, s_2) = x(s_1, 0) = x(s_1, \pi) = 0.$$

Хорошо известно, что эта спектральная задача разрешима для счетного набора собственных чисел λ_{kl} , причем функции $\{\varphi_{kl}\}$ образуют ортонормальную с весом $4\pi^{-2}$ систему функций

$$4\pi^{-2} \int_0^\pi \int_0^\pi \varphi_{kl}\varphi_{ij} ds_1 ds_2 = \langle \varphi_{kl}, \varphi_{ij} \rangle = \begin{cases} 1, & l = i, k = j; \\ 0, & l \neq i, k \neq j. \end{cases}$$

Легко подсчитать, что $\varphi_{kl} = \varphi_{kl}(s_1, s_2) = \sin(ks_1) \sin(ls_2)$, а $\lambda_{kl} = -k^2 - l^2$. В силу теоремы 3 для того, чтобы существовало единственное решение задачи (15) – (17), необходимо, чтобы $\lambda \geq -2$.

Все вычисления производились в вычислительной среде Maple 9.0. Для того, чтобы были выполнены условия теоремы 4, возьмем, например, $m = 2, p = 2, \lambda = -2, \alpha = 3$, и $u(s_1, s_2, t) = u(t) \sin(2s_1) \sin(2s_2)$, чтобы $(\mathbb{I} - Q)u(s_1, s_2, t) = 0, t \in (0, T)$. Тогда,

умножив скалярно (15) на функции φ_{kl} , $l = k = 1..2$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_{11}(t) = 0, \\ 3 \dot{x}_{21}(t) + 10x_{21}(t) = 0, \\ 3 \dot{x}_{12}(t) - 8x_{12}(t) = 0, \\ 6 \dot{x}_{22}(t) + x_{22}(t) = u(t). \end{cases} \quad (19)$$

Построим функционал стоимости (14), для этого зададим, например, $z_d(s_1, s_2) = \sin(s_1) + \sin(s_2)$ и получим

$$\begin{aligned} J(x, u) = & \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^\pi \int_0^\pi [((x(s_1, s_2, t) - z_d(s_1, s_2))'_{s_1})^2 + \\ & ((x(s_1, s_2, t) - z_d(s_1, s_2))'_{s_2})^2] ds_1 ds_2 dt + \\ & \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^\pi \int_0^\pi [u(s_1, s_2, t)(-\Delta)^{-1}u(s_1, s_2, t)] ds_1 ds_2 dt = \\ & \int_0^T [-4\pi x_{11}(t) + 2\pi^2 x_{22}^2(t) + \frac{5}{4}\pi^2(x_{12}^2(t) + x_{21}^2(t)) + \\ & \frac{1}{2}\pi^2 x_{11}^2(t) + \pi^2 + \frac{1}{32}\pi^2 u(t)^2] dt. \end{aligned} \quad (20)$$

Заметим, что $(-\Delta)^{-1}(\sin(ks_1) \sin(ls_2)) = \frac{1}{k^2+l^2} \sin(ks_1) \sin(ls_2)$.

Для нахождения оптимального управления задачи (19), (20) с условиями $T = 1$, $x_{11}(0) = 0$, $x_{21}(0) = 2$, $x_{12}(0) = 2$, $x_{22}(0) = 2$, $u(0) = 0$, $u(T) = 1$ (для определенности) была разработана программа, которая, опираясь на метод Рунге, ищет оптимальное управление в виде

$$u(t, N) : (t, N) \mapsto u(0) + \frac{(u(T) - u(0))t}{T} + \sum_{n=1}^N c_n \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right).$$

Для задачи (15) – (17), (20) при $N = 4$ получим

$$\begin{aligned} u(s_1, s_2, t) = & [t - 7, 695362486 \sin(\pi t) - 3, 674132956 \sin(2\pi t) - \\ & 2, 940115757 \sin(3\pi t) - 1, 904765651 \sin(4\pi t)] \sin(2s_1) \sin(2s_2). \end{aligned}$$

Приведем необходимое условие существования оптимального управления при $m = 2$, $p = 4$, $\lambda = -2$, $\alpha = 3$, и $u(s_1, s_2, t) = u(t) \sin(2s_1) \sin(2s_2)$. Умножив скалярно (15) на функции φ_{kl} , $k = 1..2$, $l = 1..2$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{9}{8}x_{11}(t)(x_{12}^2(t) + x_{21}^2(t)) + \frac{3}{2}x_{21}(t)x_{12}(t)x_{22}(t) + \frac{9}{16}x_{11}^3(t) + \\ \frac{3}{4}x_{11}(t)x_{22}^2(t) = 0, \\ 3 \dot{x}_{21}(t) + \frac{9}{8}x_{21}(t)(x_{22}^2(t) + x_{11}^2(t)) + \frac{3}{2}x_{11}(t)x_{12}(t)x_{22}(t) + \frac{9}{16}x_{21}^3(t) + \\ \frac{3}{4}x_{21}(t)x_{12}^2(t) + 9x_{21}(t) = 0, \\ 3 \dot{x}_{12}(t) + \frac{9}{8}x_{12}(t)(x_{22}^2(t) + x_{11}^2(t)) + \frac{3}{2}x_{11}(t)x_{21}(t)x_{22}(t) + \frac{9}{16}x_{12}^3(t) + \\ \frac{3}{4}x_{12}(t)x_{21}^2(t) - 9x_{12}(t) = 0, \\ 6 \dot{x}_{22}(t) + \frac{9}{8}x_{22}(t)(x_{12}^2(t) + x_{21}^2(t)) + \frac{3}{2}x_{11}(t)x_{12}(t)x_{21}(t) + \frac{9}{16}x_{22}^3(t) + \\ \frac{3}{4}x_{22}(t)x_{11}^2(t) = u(t). \end{cases} \quad (21)$$

Построим сопряженную задачу к задаче (15) – (17) при $p = 4$ и получим

$$(-\lambda + \Delta)y_t(s_1, s_2, t) - \alpha\Delta y(s_1, s_2, t) + 3x^2(s_1, s_2, t)y(s_1, s_2, t) = (-\Delta)(x(s_1, s_2, t) - z_d(s_1, s_2)), (s_1, s_2, t) \in Q, \quad (22)$$

$$y(s, t) = 0, (s_1, s_2, t) \in \partial\Omega \times (0, T),$$

$$(\lambda - \Delta)y(s, T) = 0, (s_1, s_2) \in \Omega. \quad (23)$$

Умножив скалярно (22) на функции φ_{kl} , $k = 1..2$, $l = 1..2$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} 6 \dot{y}_{11}(t) + \frac{9}{8}y_{11}(t)(x_{12}^2(t) + x_{21}^2(t)) + \frac{3}{2}(x_{12}(t)x_{22}(t)y_{21}(t) + x_{21}(t)x_{12}(t)y_{22}(t) + x_{21}(t)x_{22}(t)y_{12}(t) + x_{11}(t)x_{22}(t)y_{22}(t)) + \\ \frac{9}{4}x_{11}(t)(x_{21}(t)y_{21}(t) + x_{12}(t)y_{12}(t)) + \\ \frac{27}{16}x_{11}^2(t)y_{11}(t) + \frac{3}{4}y_{11}(t)x_{22}^2(t) = \frac{2(-4+x_{11}(t)\pi)}{\pi}, \\ 18 \dot{y}_{21}(t) + \frac{3}{4}x_{12}^2(t)y_{21}(t) + \frac{9}{8}y_{21}(t)(x_{11}^2(t) + x_{22}^2(t)) + \\ \frac{3}{2}(x_{12}(t)x_{11}(t)y_{22}(t) + x_{12}(t)x_{22}(t)y_{11}(t) + x_{11}(t)x_{22}(t)y_{12}(t) + x_{21}(t)x_{12}(t)y_{12}(t)) + \\ \frac{9}{4}x_{21}(t)(x_{11}(t)y_{11}(t) + x_{22}(t)y_{22}(t)) + \frac{27}{16}y_{21}(t)x_{21}^2(t) = 5x_{21}(t), \\ 18 \dot{y}_{12}(t) + \frac{3}{4}x_{21}^2(t)y_{12}(t) + \frac{9}{8}y_{12}(t)(x_{11}^2(t) + x_{22}^2(t)) + \\ \frac{3}{2}(x_{21}(t)x_{11}(t)y_{22}(t) + x_{21}(t)x_{12}(t)y_{21}(t) + x_{11}(t)x_{22}(t)y_{21}(t) + x_{21}(t)x_{22}(t)y_{11}(t)) + \\ \frac{9}{4}x_{12}(t)(x_{11}(t)y_{11}(t) + x_{22}(t)y_{22}(t)) + \frac{27}{16}y_{12}(t)x_{12}^2(t) = 5x_{12}(t), \\ 30 \dot{y}_{22}(t) + \frac{3}{4}x_{11}^2(t)y_{22}(t) + \frac{9}{8}y_{22}(t)(x_{12}^2(t) + x_{21}^2(t)) + \\ \frac{3}{2}(x_{11}(t)x_{21}(t)y_{12}(t) + x_{11}(t)x_{22}(t)y_{11}(t) + x_{11}(t)x_{12}(t)y_{21}(t) + x_{21}(t)x_{12}(t)y_{11}(t)) + \\ \frac{9}{4}x_{22}(t)(x_{12}(t)y_{12}(t) + x_{21}(t)y_{21}(t)) + \frac{27}{16}y_{22}(t)x_{22}^2(t) = 8x_{22}(t). \end{array} \right. \quad (24)$$

По теореме 5, если $u(s_1, s_2, t) = u(t) \sin(2s_1) \sin(2s_2)$ – оптимальное управление, то решения систем (21), (24) должны удовлетворять следующему условию

$$\int_0^T \left[\frac{1}{32} \pi^2 (u^2(t) - u(t)v(t)) + \frac{1}{4} \pi^2 y_{22}(t)(v(t) - u(t)) \right] dt \geq 0$$

$$\forall v(s_1, s_2, t) = v(t) \sin(2s_1) \sin(2s_2) \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Замечание 1. При помощи пакета Maple системы обыкновенных дифференциальных уравнений (21), (24) при условии $x_{11}(0) = x_{21}(0) = x_{12}(0) = x_{22}(0) = x_{11}^0, x_{21}(0) = x_{21}^0, x_{12}(0) = x_{12}^0, x_{22}(0) = x_{22}^0, y_{11}(T) = 0, y_{22}(T) = 0, y_{11}(T) = 0, y_{12}(T) = 0$ разрешимы численно.

Автор выражает большую благодарность своему научному руководителю, проф. Г.А. Свиридюку за плодотворные дискуссии.

Литература

1. Осколков, А.П. Нелокальные задачи для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С. Л. Соболева / А.П. Осколков // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1991. – Т. 198. – С. 31 – 48.
2. Амфилохийев, В.Б. Течения полимерных растворов при наличии конвективных ускорений / В.Б. Амфилохийев, Я.И. Войткунский, Н.П. Мазаева // Тр. Лен. кораблестр. ин-та. – 1975. – Т. 96. – С. 3 – 9.

3. Осколков, А.П. Нелокальные задачи для уравнений фильтрации не-newтоновых жидкостей в пористых средах / А.П. Осколков, М.М. Ахматов, Р.Д. Щадиев // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1991. – Т. 189. – С. 82 – 100.
4. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство задачи Коши-Дирихле для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 9. – С. 36 – 41.
5. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov – Utrecht; Boston: VSP, 2003.
6. Манакова, Н. А. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Н.А. Манакова // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 438, № 9. – С. 1185 – 1192.
7. Лионс, Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами / Ж.-Л. Лионс. – М.: Наука, 1987.
8. Фурсиков, А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А.В. Фурсиков. – Новосибирск: Научная книга, 1999.
9. Свиридюк, Г.А. Одна задача для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска / Г.А. Свиридюк // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 2. – С. 55 – 61.
10. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972.

Кафедра уравнений математической физики,
Южно-Уральский государственный университет
mummi@ems.ru

Поступила в редакцию 22 сентября 2008 г.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ОСЕВЫМ ТРЕХМЕРНЫМ ДЕФЕКТОМ

А.А. Остсемин, П.В. Уткин

MATHEMATICAL MODEL OF THE STRESS-STRAIN BEHAVIOUR OF CENTRAL THREE-DIMENSIONAL DEFECT

A.A. Ostsemin, P.V. Utkin

Рассматривается математическая модель о разрушающем кольцевом напряжении для тонкостенных труб с осевым поверхностным эллиптическим дефектом. Используя метод Колосова – Мусхелишвили, было найдено аналитическое решение при некоторых предположениях на граничные условия. Критериями разрушения выбраны два условия. Первое связано с критическим значением раскрытия трещины, второе – с достижением напряжения в нетто-сечении трещины напряжения разрушения для данного материала. В частном случае формулы превращаются в формулы, ранее полученные аналогичным образом, для трубопроводов с линейной трещиной.

Ключевые слова: механика разрушения, метод Колосова – Мусхелишвили, тонкостенная оболочка, осевой поверхностный эллиптический дефект

The authors consider a mathematical model concerning breaking hoop stress for thin-walled pipes with the central elliptical part-through crack. On the basis of a certain theoretical analysis by Kolosov – Muskhelishvili's method the analytical solution is obtained. Two rupture criteria are used. The first criterion is based on critical displacement of crack borders. The second criterion considered the stress existing in the ligament near the moment of rupture, which is considered to be equal to material yield stress. Obtained formulas are generalizing previously existing formulas for linear crack.

Keywords: fracture mechanics, Kolosov – Muskhelishvili method, thin-wall pipes, central elliptical part-through cracks

Введение

Магистральные газонефтепроводы представляют собой сложные технические системы, разрушение которых приводит к опасным экологическим и большим экономическим последствиям. По протяженности свыше 30% трубопроводов Западной Сибири эксплуатируются более 20 лет, 18% – более 30 лет. Средний возраст трубопроводов составляет 25 лет. Количество магистральных трубопроводов, достигших критического срока эксплуатации, является достаточно большим. В связи с этим возникает актуальная задача проведения своевременной диагностики. Трубы отечественного производства уступают японским по многим показателям. Относительное удлинение δ разрушившихся отечественных труб ниже на 7 – 45% и характеризует резкое снижение пластичности. Сравнительная статистика на газонефтепроводах по данным, имеющимся в Ростехнадзоре,

показывает, что наибольшее число аварий происходит на магистральных газопроводах. Основная причина их разрушения – это коррозионные повреждения стенок трубопроводов. Эта часть аварий возрастает со временем. Существуют несколько видов коррозии: общая, локальная (питтинговая, канавочная) и стресс-коррозия. Многолетний опыт эксплуатации газонефтепроводов показывает, что существенная доля их повреждений связана с возникновением коррозионных язв, питтингов и микротрещин, дальнейшее развитие которых приводит к разрушению.

Результаты исследования аварий на трубопроводах показали, что нормы (СНиПы, 205.06-85, III-42-80) технического проектирования устарели, не обеспечивают нужной безопасности, не отражают прогресса науки и техники в трубопроводном транспорте. Поэтому эти документы должны быть переработаны. Актуальной является разработка методик, нормативно-технических документов и программных продуктов, обеспечивающих научно обоснованные нормы дефектов в основном металле и сварном шве, прогнозирование сроков эксплуатации магистральных газонефтепроводов и резервуаров [1].

Очаг разрушения представляет собой рваную ломаную поверхность, которая образуется в процессе объединения (слияния) мелких (по длине), но разных по глубине, поверхностных трещин. Поэтому трещиноподобный дефект представляет половину эллипса [2, 3]. Повреждение поверхности металла характеризуется зарождением на локальном участке множества коррозионно-механических трещин вблизи заводского продольного шва по зоне термического влияния или по зоне загиба кромок штрипса.

Опыт исследования разрушения труб из отечественных и зарубежных сталей показывает, что очаг разрушения формируется в основном из мелких трещин длиной до 35 мм. Первоначальные трещины распространяются на глубину до 50% от толщины стенки трубы. Критическая длина поверхностных трещин составляет 140–150 мм.

Большое количество коррозионно-механических дефектов и разрушений труб магистральных газонефтепроводов указывает на необходимость детального исследования разрушения и целесообразность тщательного исследования трехмерной математической модели труб с полуэллиптическим дефектом для предупреждения аварийных отказов во время эксплуатации и нормирования дефектов при диагностике магистральных трубопроводов.

Математическая модель поверхностного дефекта

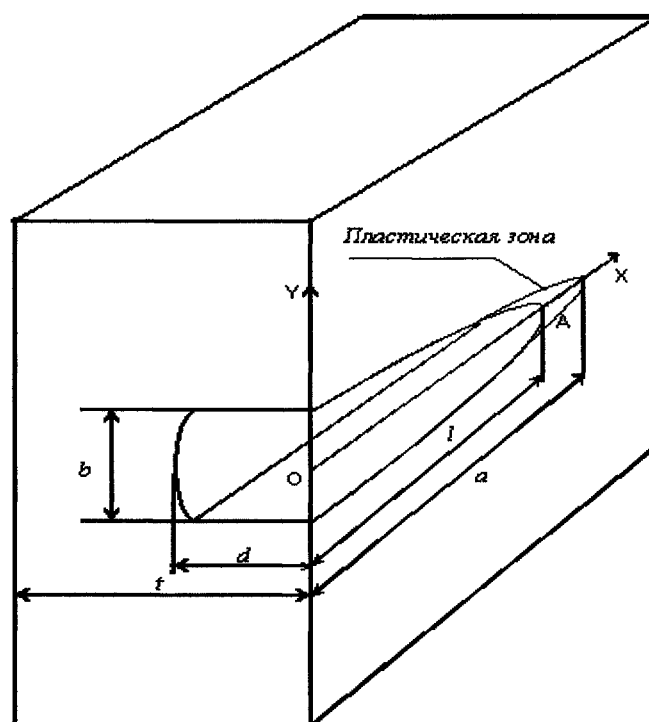
Для труб большого диаметра кривизной поверхности можно пренебречь и рассматривать вместо цилиндрической оболочки пластину с поверхностным эллиптическим дефектом.

Рассмотрим пластину с поверхностным эллиптическим дефектом. На рисунке показана половина дефекта. Мы предполагаем, что длина нетто-сечения равна действительной длине трещины $2l$, тогда как длина трещины, включая зоны пластичности у концов трещины, равны $2a$. Эти два параметра связаны соотношением

$$l = a \cos(\alpha).$$

Напряжение на бесконечности равно σ_0 , функция распределения напряжения около вершины A и симметричной ей вершины поверхностного дефекта, которая зависит от расстояния x до центра дефекта, предела текучести σ_T , предела прочности σ_B , напряжения пластического течения $\bar{\sigma} = k_1 \sigma_B$ считаем равной:

$$P(x) = (t - d) \left(\bar{\sigma} - (\bar{\sigma} - k_2 \sigma_T) \left(\sum_{i=1}^k a_i (x/l)^{2i} \right) \right), \quad (1)$$



Схематическое изображение дефекта

где k_1 характеризует момент потери устойчивости (напряжение пластического течения $\bar{\sigma}$) пластического деформирования участка около вершины дефекта, учитывает коэффициент двухосности нагружения стенки трубы m_0 и показатель деформационного упрочнения n степенной аппроксимации диаграммы деформирования; k_2 определяет границу локализованной пластической зоны и зависит от коэффициента поперечной деформации μ . Исходя из условий задачи, предполагаем симметричность функции напряжений (1), которая аппроксимируется полиномом четной степени. Предполагается также, что эти силы распределены независимо от глубины листа. Соответствующее распределение напряжения, которое будет использовано как граничные условия соответствующей плоской задачи упругости, равно $\sigma(x) = P(x)/(t - d)$. Также предполагаем, что напряжение на концах трещины равно $k_2\sigma_T$, что означает равенство $\sum_{i=1}^k a_i = 1$.

Используя метод Мусхелишвили Н.И. [4], разбиваем задачу на три подзадачи, первая из которых состоит в вычислении комплексных потенциалов для ненапряженного состояния в окрестности трещины (напряжение на границе трещины равно 0 и напряжение на бесконечности равно σ_θ), вторая задача учитывает напряжение, передаваемое через связку, и последняя задача учитывает напряжение в вершине дефекта (в пластической зоне). В завершении для суммирования этих задач предполагаем, что результирующий комплексный потенциал может быть получен как сумма решений выше перечисленных задач с определенными весами, а именно, мерой зоны действия соответствующих сил (принцип суперпозиции).

Комплексные потенциалы φ_1 и ψ_1 для дефекта, с половиной длины в 1 единицу были

вычислены в [5]:

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{\sigma_\theta}{4(1+m)} \left((1+\varepsilon) \left(\zeta - \frac{m}{\zeta} \right) - \frac{2(1-\varepsilon)}{\zeta} \right), \quad (2)$$

$$\psi_1(\zeta) = \frac{\sigma_\theta}{2m(m+1)} \left((1-\varepsilon) \frac{m\zeta^2+1}{\zeta} - [(1-\varepsilon) + (1+\varepsilon)m] (1+m^2) \frac{\zeta}{\zeta^2-m} \right), \quad (3)$$

где $m = \frac{a-b}{a+b}$ (a, b – большая и малая полуоси эллипса) – параметр эллипса, ε – параметр двухосности нагружения оболочки.

Комплексные потенциалы φ_3 и ψ_3 , которым соответствует замена сил в вершинах дефекта приняты, согласно [4], как частный случай решения задачи о плоскости с полуэллиптическим отверстием, подвергнутым постоянной нагрузке на своей части:

$$\varphi_3 = \frac{2m\alpha\sigma_T}{\pi\zeta} - \frac{\sigma_T}{2\pi i} \left[z \ln \left(\frac{\zeta^2 - e^{2i\alpha}}{\zeta^2 - e^{-2i\alpha}} \right) - \cos(\alpha) \ln \left(\frac{1 - \zeta^2 + 2i\zeta \sin(\alpha)}{1 - \zeta^2 - 2i\zeta \sin(\alpha)} \right) - \right. \\ \left. - i \frac{1-m}{1+m} \sin(\alpha) \ln \left(\frac{1 + \zeta^2 - 2\zeta \cos(\alpha)}{1 + \zeta^2 + 2\zeta \cos(\alpha)} \right) \right], \quad (4)$$

$$\psi_3 = \frac{2(1+m^2)\alpha\sigma_T}{\pi(1+m)} \frac{\zeta}{\zeta^2-m} + \frac{\sigma_T}{2\pi i} \left[\cos(\alpha) \ln \left(\frac{1 - \zeta^2 + 2i\zeta \sin(\alpha)}{1 - \zeta^2 - 2i\zeta \sin(\alpha)} \right) + \right. \\ \left. + i \frac{1-m}{1+m} \sin(\alpha) \ln \left(\frac{1 + \zeta^2 - 2\zeta \cos(\alpha)}{1 + \zeta^2 + 2\zeta \cos(\alpha)} \right) \right]. \quad (5)$$

Комплексные потенциалы φ_2 и ψ_2 , отвечающие растягивающей силе (1) и полудлине дефекта, равному единице, могут быть вычислены с использованием комплексных потенциалов φ_3 и ψ_3 по формулам:

$$\varphi_2 = \int_0^{\pi/2} \sigma(\theta) \frac{d\varphi_3}{\sigma_T}, \quad \psi_2 = \int_0^{\pi/2} \sigma(\theta) \frac{d\psi_3}{\sigma_T}, \quad \sigma(\theta) = \frac{P(l \cos \theta)}{t-d}. \quad (6)$$

Подставляя в (6) формулы (1), (4) и (5) получаем формулы для комплексных потенциалов φ_2 и ψ_2 :

$$\varphi_2 = \left(k_1\sigma_B - (k_1\sigma_B - k_2\sigma_T) \sum_{i=1}^k \frac{a_i C_{2i}^i}{2^{2i}} \right) \frac{1}{(1+m)\zeta} + \\ + \frac{(k_1\sigma_B - k_2\sigma_T)}{2(m+1)} \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{2^{2i}} \sum_{l=0}^{i-1} C_{2i}^l \left(\frac{2\zeta^{2i-2l+1}}{2i-2l+1} - \frac{2m\zeta^{2i-2l-1}}{2i-2l-1} \right), \quad (7)$$

$$\psi_2 = \frac{1+m^2}{1+m} \left(k_1\sigma_B - (k_1\sigma_B - k_2\sigma_T) \sum_{i=1}^k \frac{a_i C_{2i}^i}{2^{2i}} \right) \frac{\zeta}{\zeta^2-m} + G(\zeta), \quad (8)$$

где $G(\zeta)$ не имеет особенности в фокусах эллипса ($\zeta = \pm\sqrt{m}$).

Для линейного случая $m = 1$ и формулы (2)–(8) совпадают с аналогичными формулами из [6].

Комплексные функции для задачи будем вычислять как сумму трех пар вышеперечисленных потенциалов, взятых с определенными весами. В качестве весов возьмем меры областей действия сил, описанных в каждой из этих задач.

$$\begin{aligned}\Phi &= J_a \left(\frac{d}{t} + \left(1 - \frac{d}{t} \right) \cos(\alpha) \right) \varphi_1 + J_a \cos(\alpha) \left(1 - \frac{d}{t} \right) \varphi_2 + \frac{d}{t} \varphi_3, \\ \Psi &= J_a \left(\frac{d}{t} + \left(1 - \frac{d}{t} \right) \cos(\alpha) \right) \psi_1 + J_a \cos(\alpha) \left(1 - \frac{d}{t} \right) \psi_2 + \frac{d}{t} \psi_3.\end{aligned}\tag{9}$$

Здесь J_a есть четверть длины эллипса с параметром m и большой полуосью a :

$$J_a = a \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 x + \left(\frac{1-m}{1+m} \right)^2 \cos^2 x} dx.$$

Точный подсчет данного значения невозможен, поэтому оно вычисляется численными методами приближенно.

Подставляя в (9) приведенные выше функции (2)–(5), (7), (8) и преобразовывая результат, получаем:

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{J_a}{\zeta} \left[\frac{\cos(\alpha)}{2(1+m)} \left(1 - \frac{d}{t} \right) \left(k_1 \sigma_B - (k_1 \sigma_B - k_2 \sigma_T) \sum_{i=1}^k \frac{a_i C_{2i}^i}{2^{2i}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sigma_\theta (2(1-\varepsilon) + m(1+\varepsilon))}{4(m+1)} \left(\frac{d}{t} + \left(1 - \frac{d}{t} \right) \cos(\alpha) \right) + \frac{2m\alpha\sigma_T}{\pi} \frac{d}{t} \frac{a}{J_a} \right] + \\ &\quad + \frac{J_a \cos(\alpha)}{m+1} \left(1 - \frac{d}{t} \right) \frac{k_1 \sigma_B - k_2 \sigma_T}{2} \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{2^{2i}} \sum_{l=0}^{i-1} C_{2i}^l \left(\frac{2\zeta^{2i-2l+1}}{2i-2l+1} - \frac{2m\zeta^{2i-2l-1}}{2i-2l-1} \right) - \\ &\quad - \frac{a\sigma_T}{2\pi i} \frac{d}{t} \left[\frac{z}{a} \ln \left(\frac{\zeta^2 - e^{2i\alpha}}{\zeta^2 - e^{-2i\alpha}} \right) - \cos(\alpha) \ln \left(\frac{1 - \zeta^2 + 2i\zeta \sin(\alpha)}{1 - \zeta^2 - 2i\zeta \sin(\alpha)} \right) - \right. \\ &\quad \left. - i \frac{1-m}{1+m} \sin(\alpha) \ln \left(\frac{1 + \zeta^2 - 2\zeta \cos(\alpha)}{1 + \zeta^2 + 2\zeta \cos(\alpha)} \right) \right],\end{aligned}\tag{10}$$

$$\begin{aligned}\Psi &= \frac{2J_a\zeta}{\zeta^2 - m} \left[\frac{\cos(\alpha)}{2} \frac{1+m^2}{1+m} \left(1 - \frac{d}{t} \right) \left(k_1 \sigma_B - (k_1 \sigma_B - k_2 \sigma_T) \sum_{i=1}^k \frac{a_i C_{2i}^i}{2^{2i}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sigma_\theta (1+m^2)(1-\varepsilon + (1+\varepsilon)m)}{2m(m+1)} \times \left(\frac{d}{t} + \left(1 - \frac{d}{t} \right) \cos(\alpha) \right) + \frac{\alpha(1+m^2)\sigma_T}{\pi(1+m)} \frac{d}{t} \frac{a}{J_a} \right] + \\ &\quad + \frac{a\sigma_T}{2\pi i} \frac{d}{t} \left[\cos(\alpha) \ln \left(\frac{1 - \zeta^2 + 2i\zeta \sin(\alpha)}{1 - \zeta^2 - 2i\zeta \sin(\alpha)} \right) + i \frac{1-m}{1+m} \sin(\alpha) \ln \left(\frac{1 + \zeta^2 - 2\zeta \cos(\alpha)}{1 + \zeta^2 + 2\zeta \cos(\alpha)} \right) \right] + \\ &\quad + J_a \cos(\alpha) \left(1 - \frac{d}{t} \right) G(\zeta).\end{aligned}\tag{11}$$

Для нахождения размера пластической зоны (определения параметра α) воспользуемся тем же приемом, что и Дагдейл [7]. Считаем, что у комплексного потенциала Ψ по

формуле (11) нет особенностей в фокусах эллипса (коэффициент при выражении $\frac{1}{\zeta^2 - m}$ равен нулю).

$$\frac{1}{2} \left[\cos(\alpha) \left(1 - \frac{d}{t} \right) \left(k_1 \sigma_B - (k_1 \sigma_B - k_2 \sigma_T) \sum_{i=1}^k \frac{a_i C_{2i}^i}{2^{2i}} \right) - \right. \\ \left. - \sigma_\theta \cos(\alpha) \left(1 - \frac{d}{t} \right) \frac{(1-\varepsilon) + (1+\varepsilon)m}{2m} - \sigma_\theta \frac{d}{t} \frac{(1-\varepsilon) + (1+\varepsilon)m}{2m} \right] + \frac{\alpha}{\pi} \frac{d}{t} \frac{a \sigma_T}{J_a} = 0. \quad (12)$$

Преобразовывая уравнение (12), получаем:

$$\left(1 - \frac{d}{t} \right) \left(k_1 \frac{\sigma_B}{\sigma_T} \left(1 - \sum_{i=1}^k \frac{a_i C_{2i}^i}{2^{2i}} \right) + k_2 \sum_{i=1}^k \frac{a_i C_{2i}^i}{2^{2i}} - \frac{\sigma_\theta}{\sigma_T} \frac{(1-\varepsilon) + (1+\varepsilon)m}{2m} \right) \cos(\alpha) + \\ + \frac{2\alpha}{\pi} \frac{d}{t} \frac{a}{J_a} = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_T} \frac{d}{t} \frac{(1-\varepsilon) + (1+\varepsilon)m}{2m}. \quad (13)$$

Из уравнения (13) можно найти параметр α и, как следствие, размер пластических зон по формуле $a - l = a(1 - \cos(\alpha))$.

Далее через функцию Φ (10) можно определить перемещение трещины в центре, которое мы приравняем критическому раскрытию δ_c

$$v = -\frac{4}{E} \operatorname{Re}(i\Phi) = \frac{\delta_c}{2}. \quad (14)$$

После вычисления $\operatorname{Re}(i\Phi)$ в точке $\theta = \frac{\pi}{2}$ получаем из (14) следующее уравнение для раскрытия трещины:

$$\delta_c = \frac{4l\sigma_\theta}{\pi E} \left[\frac{J_a}{a} \pi \left(1 - \frac{d}{t} \right) \left(k_1 \frac{\sigma_B}{\sigma_T} - k_2 \right) \sum_{i=1}^k a_i A_i + \frac{2d}{t} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \right. \\ \left. + \pi \frac{d}{t} \frac{1-m}{1+m} \frac{\sin(2\alpha)}{2} - \frac{J_a}{a} \pi \left(1 - \frac{d}{t} \right) \left\{ k_1 \frac{\sigma_B}{\sigma_T} \left(1 - \sum_{i=1}^k a_i A_i \right) + k_2 \sum_{i=1}^k a_i A_i \right\} \times \right. \\ \left. \times \frac{1-m}{1+m} \frac{m(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon) + (1+\varepsilon)m} - 2\alpha \cos(\alpha) \frac{d}{t} \frac{1-m}{1+m} \frac{m(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon) + (1+\varepsilon)m} \right], \quad (15)$$

$$\text{где } A_i = \frac{1}{2^{2i}} \sum_{l=0}^{i-1} C_{2i}^l (-1)^{i-l} \left(\frac{1}{2i-2l+1} + \frac{1}{2i-2l-1} \right).$$

Величина δ_c есть характеристика материала [2]. Таким образом, формулы (13) и (15) устанавливают связь между геометрическими характеристиками дефекта, характеристиками материала и кольцевым разрушающим напряжением на бесконечности σ_θ .

Из формулы (15) можно определить параметр α численными методами, решив данное трансцендентное уравнение.

Далее, воспользовавшись (13), определим кольцевое напряжение σ_θ :

$$\sigma_\theta = \frac{2m\sigma_T}{(1-\varepsilon) + (1+\varepsilon)m} \times \frac{\frac{2\alpha}{\pi} \frac{d}{t} \frac{a}{J_a} + \cos(\alpha) \left(1 - \frac{d}{t}\right) \left(k_1 \frac{\sigma_B}{\sigma_T} \left(1 - \sum_{i=1}^k a_i \frac{C_{2i}^i}{2^{2i}}\right) + k_2 \sum_{i=1}^k a_i \frac{C_{2i}^i}{2^{2i}}\right)}{\left(\frac{d}{t}\right) + \left(1 - \frac{d}{t}\right) \cos \alpha} \quad (16)$$

Используя формулы (13) и (16), можно вычислить разрушающее напряжение для пластины с поверхностным эллиптическим дефектом. При $m = 1$ формулы (13) и (16) превращаются в соотношения для трубопровода с трещиной работы [6].

Выводы

1. На основе метода Колосова-Мухелишвили создана математическая модель определения напряженного состояния цилиндрической оболочки с осевым эллиптическим поверхностным дефектом, получены новые формулы для комплексных потенциалов и тензора напряжений.

2. Проведен теоретический анализ по определению разрушающего кольцевого напряжения при вязком разрушении труб, сосудов давления с продольным полуэллиптическим дефектом с использованием методов упруго-пластической механики разрушения и критерия разрушения в виде критического раскрытия дефекта.

Литература

1. Остсеин, А.А. Анализ несущей способности действующего магистрального нефтепровода при наличии дефектов в продольном сварном шве / А.А. Остсеин // Сварочное производство. – 1998. – № 9. – С. 11 – 15.
2. Красовский, А.Я. Трещиностойкость сталей магистральных трубопроводов / А.Я. Красовский, В.Н. Красику. – Киев: Наук. Думка, 1990. – 176 с.
3. Орыняк, И.В. Расчет давления вязкого разрушения трубы с осевой сквозной трещиной / И.В. Орыняк // Проблемы прочности. – 1993. – № 4. – С. 39 – 48.
4. Мухелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
5. Остсеин, А.А. К вопросу о предельном равновесии пластин с трещиноподобными дефектами / А.А. Остсеин, П.Б. Уткин // Известия Челябинского научного центра. – 2006. – № 4(34). – С. 1 – 6.
6. Остсеин, А.А. Упруго-пластическое разрушение труб с поверхностной трещиной / А.А. Остсеин, П.Б. Уткин // Вестн. ЮУрГУ. Серия “Математика, физика, химия”. – 2006. – Вып. 7, № 7(84). – С. 130–136.
7. Dugdale, D.S. Yielding of steel sheets containing splits / D.S. Dugdale // J. Mech. Phys. Solids. – 1960. – V. 8. – P. 100 – 104.

Кафедра функционального анализа,
Южно-Уральский государственный университет
neobart@inbox.ru

Поступила в редакцию 25 июля 2008 г.

ТЕХНИКА ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ПОТОКОВЫХ АЛГОРИТМОВ

А.В. Панюков, В.А. Телегин

SOFTWARE ENGINEERING OF THE FLOW ALGORITHMS

A.V. Panyukov, V.A. Teleghin

Рассмотрены способы реализации ведущего преобразования в схеме симплекс-алгоритма для задач транспортного типа, позволяющие осуществлять перестройку базисного дерева за время линейное от числа вершин сети, существенно сократив при этом число проверок условия оптимальности. Техника программной реализации указанных процедур проиллюстрирована в исходном тексте абстрактного класса `transport` и классов `Transshipment` и `Transportation`, предназначенных для решения и постоптимизационного анализа транспортных задач соответственно в сетевой и матричной постановках.

Ключевые слова: транспортная задача, задача об оптимальном потоке, алгоритмы. структуры данных, объектно-ориентированное программирование, техника программной реализации

The authors consider the ways of the software engineering of the pivot procedures in the scheme of the primal simplex algorithm for flow problems, which enable to rearrange the redix tree within the linear time of the vortex of network number, considerably decrease the number of checks of the optimality condition. The technique of the software implementation of these procedures is given in the source text of the abstract class `transport` and classes `Transshipment` and `Transportation` which are destined for solving and post-organizational analysis of the transportation problems in the cross network and matrix definitions respectively.

Keywords: transportation problem, transshipment problem, algorithms data structures, object-oriented programming, software engineering

Введение

Потоковые задачи: построение оптимального потока в конечной сети, задача о максимальном потоке, транспортная задача, задача о назначении и задача о кратчайшем пути, – были одними из первых, давших полезные для практики сетевые оптимизационные модели. В работах 50-х годов [1] рассматривались прямые алгоритмы (метод потенциалов) решения данных задач. В последующих работах был предложен ряд алгоритмов другого типа, в частности, алгоритм беспорядка [3, 4] и двойственный симплекс-метод [5, 6]. Опыт эксплуатации и вычислительные эксперименты показали, что новые алгоритмы требуют меньшего числа изменений текущего базисного решения (ведущих преобразований) при выполнении симплекс-алгоритма. Это привело в середине 60-х годов к мнению, что наиболее жизнеспособным является алгоритм беспорядка [3, 4]. Из-за убежденности в неэффективности прямого алгоритма оставались незамеченными предложения [2, 7] о

способах увеличения скорости выполнения ведущего преобразования прямого симплекс-метода. Большинство из этих предложений включены в современные реализации прямых алгоритмов построения оптимального потока в конечной сети [16, 18].

Развитие современного математического обеспечения решения задач об оптимальном потоке началось в 70-х годах [8, 9, 10, 11, 12]. Широкое сравнение алгоритмов решения задачи об оптимальном потоке было проведено в работах [8, 13] и на Всесоюзном конкурсе «Транспорт-81». Эти исследования показали, что прямой симплекс-метод значительно превосходит остальные известные методы. Появившиеся полиномиальные алгоритмы для задачи об оптимальном потоке [19, 20, 21, 23] также не составили конкуренцию прямому симплекс-алгоритму при решении практических задач.

Заметим, что вычислительные эксперименты [8, 13] проводились для «реальных» сетей, которые задаются разреженным графом. Однако, построение оптимального потока требуют алгоритмы для многих задач размещения и синтеза сетей, в частности, для задач размещения прямоугольных объектов с минимальной длиной связывающей их сети [15, 25]. Отличительными особенностями данных задач являются: 1) в определении сети используется полный граф; 2) необходимо решать последовательность локально возмущенных задач, отличающихся параметрами пары вершин и инцидентных им дуг. Вычислительная сложность прямого симплекс-алгоритма существенно зависит от стратегии проверки условия оптимальности для небазисных дуг. Использование известных стратегий приводит на заключительных итерациях алгоритма к проверке условия оптимальности для всех небазисных дуг, хотя большинство из них удовлетворяет данному условию. Следствие – неоправданные затраты временных ресурсов при решении задач указанного класса. Например, сложность определения решения возмущенной задачи по решению исходной задачи оказывается почти такой же, как и сложность решения исходной задачи. Для устранения этого парадокса в работе [13] предлагают использовать двойственный симплекс-алгоритм.

В данной работе изложен способ учета дуг, заведомо удовлетворяющих условию оптимальности, основанный на *упорядочении изучения базисного дерева* [17, 22, 24]. При использовании данного способа из поиска очередного кандидата для ввода в базис исключаются дуги, для которых установлено выполнение условия оптимальности. Предложенные в работе структуры данных и процедуры для них позволяют уменьшить вычислительную сложность всей итерации прямого симплекс-метода, а не только ведущего преобразования как в известных алгоритмах. Рассмотренный способ существенно повышает эффективность процедур, использующих прямой алгоритм решения задачи об оптимальном потоке в схеме метода ветвей и границ, при пост-оптимизационном анализе и т.п. [15]. Кроме того, данный способ открывает пути распараллеливания вычислений при решении задачи об оптимальном потоке.

Предлагаемый способ использован при разработке класса **Transport**, предоставляющего средства для решения и постоптимизационного анализа транспортных задач в сетевой и матричной постановках, а также задачи о назначении. Исходный текст данного класса на языке C++ приведен в статье для иллюстрации используемых структур данных, алгоритмов и техники их программной реализации.

1. Постановка задачи

Пусть (N, A) – связный граф, N – множество вершин, A – множество дуг. В каждой вершине $n \in N$ задана конечная величина $q(n) \in \mathbb{Z}$, которая сопоставляется либо величине произведенного продукта ($q(n) \geq 0$), либо величине потребляемого продукта ($q(n) \leq 0$). Для каждой дуги $(n, m) \in A$ заданы стоимость $c(n, m)$ транспортировки единицы

продукта от вершины n до вершины m и величина $k(n, m)$ пропускной способности данной транспортной коммуникации. Рассматриваемая задача состоит в определении потока $x(n, m)$ вдоль каждой дуги $(n, m) \in A$, удовлетворяющего требованиям

$$\sum_{(n,m) \in A} c(n, m)x(n, m) \rightarrow \max_x, \quad (1)$$

$$(\forall n \in N) \left(\sum_{m:(m,n) \in A} x(m, n) - \sum_{m:(n,m) \in A} x(n, m) = q(n) \right), \quad (2)$$

$$(\forall (n, m) \in A) (0 \leq x(n, m) \leq k(n, m)). \quad (3)$$

Задача (1) – (3), известная как задача об оптимальном потоке (или как транспортная задача в сетевой постановке), является наиболее общей формой линейных однопродуктовых потоковых задач. Такие задачи, как задача о максимальном потоке, транспортная задача, задача о назначении и задача о кратчайшем пути, являются частными случаями задачи (1) – (3). Однако, учет особенностей частных задач позволяет строить для них более эффективные алгоритмы. В частности, особенностью транспортной задачи в матричной постановке является двудольность графа (N, A) .

2. Прямой симплекс-алгоритм

Прямой критерий оптимальности задачи (1) – (3) дает [1]

Теорема 1. *Необходимым и достаточным условием оптимальности допустимого решения $x(n, m)$, $(n, m) \in A$ задачи (1) – (3) является существование величин $u(n)$, $n \in N$ (потенциалов вершин), таких, что*

$$0 < x(n, m) < k(n, m) \Leftrightarrow u(m) - u(n) = c(n, m), \quad (4)$$

$$x(n, m) = 0 \Leftrightarrow u(m) - u(n) \geq c(n, m), \quad (5)$$

$$x(n, m) = k(n, m) \Leftrightarrow u(m) - u(n) \leq c(n, m). \quad (6)$$

Переменные допустимого базисного решения задачи (1) – (3), удовлетворяющие условию 4, соответствуют дугам, образующим остовное дерево T графа (N, A) . Общепринято дерево T отождествлять с базисом, а образующие его дуги называть базисными.

Алгоритм, построенный по схеме прямого симплекс-метода, состоит в выполнении следующих основных шагов.

- **Шаг 0. Инициализация.** Построить базис (возможно содержащий искусственные дуги с высокой стоимостью) и соответствующий допустимый базисный поток x . Пометить одну из вершин как корень. Определить потенциалы $u(i)$ вершин $i \in N$ из уравнений (4) для базисных дуг.
- **Шаг 1. Найти дугу для ввода в базис.** Текущее решение является оптимальным, если выполнены условия (5) – (6), иначе небазисная дуга, не удовлетворяющая данным условиям, выбирается для ввода в базис.
- **Шаг 2. Выполнить ведущее преобразование.**
 - **Шаг 2.1. Найти выводимую из базиса дугу.** Дуга для вывода из базиса определяется при обходе единственного цикла, образованного при добавлении вводимой в базис дуги. Изменение потока вдоль вводимой в базис дуги от его

текущей границы вызовет изменение потока по дугам цикла. При максимальном допустимом изменении поток на одной или нескольких дугах цикла достигнет своей верхней или нижней границы. Из таких дуг для вывода из базиса выбирается дуга, ближайшая к корневой вершине в текущем базисном дереве.

- **Шаг 2.2.** Выводимая и вводимая дуги обмениваются своими базисным/небазисным статусами. Вычисляются обновленные базисный поток и потенциалы вершин. После чего осуществляется переход на Шаг 1.

Результативность и конечность данного алгоритма общеизвестны и в дальнейшем не обсуждаются.

В известных реализациях прямого симплекс-метода трудоемкость выполнения шага 2 линейна относительно числа вершин сети. В то же время трудоемкость шага 1 изменяется от итерации к итерации, достигая на последних итерациях величины, пропорциональной числу дуг сети.

3. Структуры данных.

Интерфейс с программами пользователя

Для представления базисного дерева в компьютере одна из его вершин $r \in N$ выбирается в качестве корня. Если вершина j лежит на пути от вершины i к корню r , то вершину j называют *предшественником* i , а вершину i – *преемником вершины* j . Очевидно, что непосредственные предшественники и преемники являются вершинами, инцидентными базисным дугам. Следовательно, дерево T может быть представлено функцией $P : N \rightarrow N$, где $P(i)$ есть непосредственный предшественник вершины i , $P(r) = r$. Следует отметить, что $P(i)$ только указывает вершину, смежную вершине i , но не определяет ориентацию дуги, инцидентной вершинам i и $P(i)$. Для определения ориентации базисных дуг определим булеву функцию

$$Pos : N \rightarrow \{\text{True}, \text{False}\} : \begin{cases} Pos(i) = \text{True} \Rightarrow (i, P(i)) \in AT, \\ Pos(i) = \text{False} \Rightarrow (P(i), i) \in AT, \end{cases}$$

где AT – множество базисных дуг (дуг дерева T).

На рис. 1(а) показаны дерево с корнем в вершине 1, определены значения функции P , а также дополнительных функций $D : N \rightarrow N$, $B : N \rightarrow N$ и $L : N \rightarrow N$, которые будут использованы в программной реализации процедур, рассматриваемых в статье. Первая из дополнительных функций $D : N \rightarrow N$ задает прямой порядок обхода дерева T (т.е. порядок, при котором посещение предшественников осуществляется до посещения преемников). Следующая функция $B : N \rightarrow N$ является функцией обратной D , т.е. если $D(i) = j$ то $B(j) = i$. Функция B определяет концевой порядок обхода дерева T , согласованный с прямым порядком обхода, заданным функцией D . Наконец, функция $L : N \rightarrow N$ определяет последнего преемника $L(i)$ вершины i при прямом обходе. Данные функции использованы, например, в работе [11], для построения эффективных алгоритмов ведущего преобразования базиса (шага 2 в общей схеме). В данной работе эти же функции используются в модифицированном алгоритме ведущего преобразования, позволяющем существенно сократить количество проверок выполнения условия оптимальности, т.е. среднюю вычислительную сложность шага 1 в общей схеме. Основные этапы изменения базисного дерева, показанного на рис. 1(а), при выполнении модифицированного ведущего преобразования показаны на рис. 1(б – д). Все процедуры модифицированного ведущего преобразования реализованы как методы абстрактного класса **Transport**.

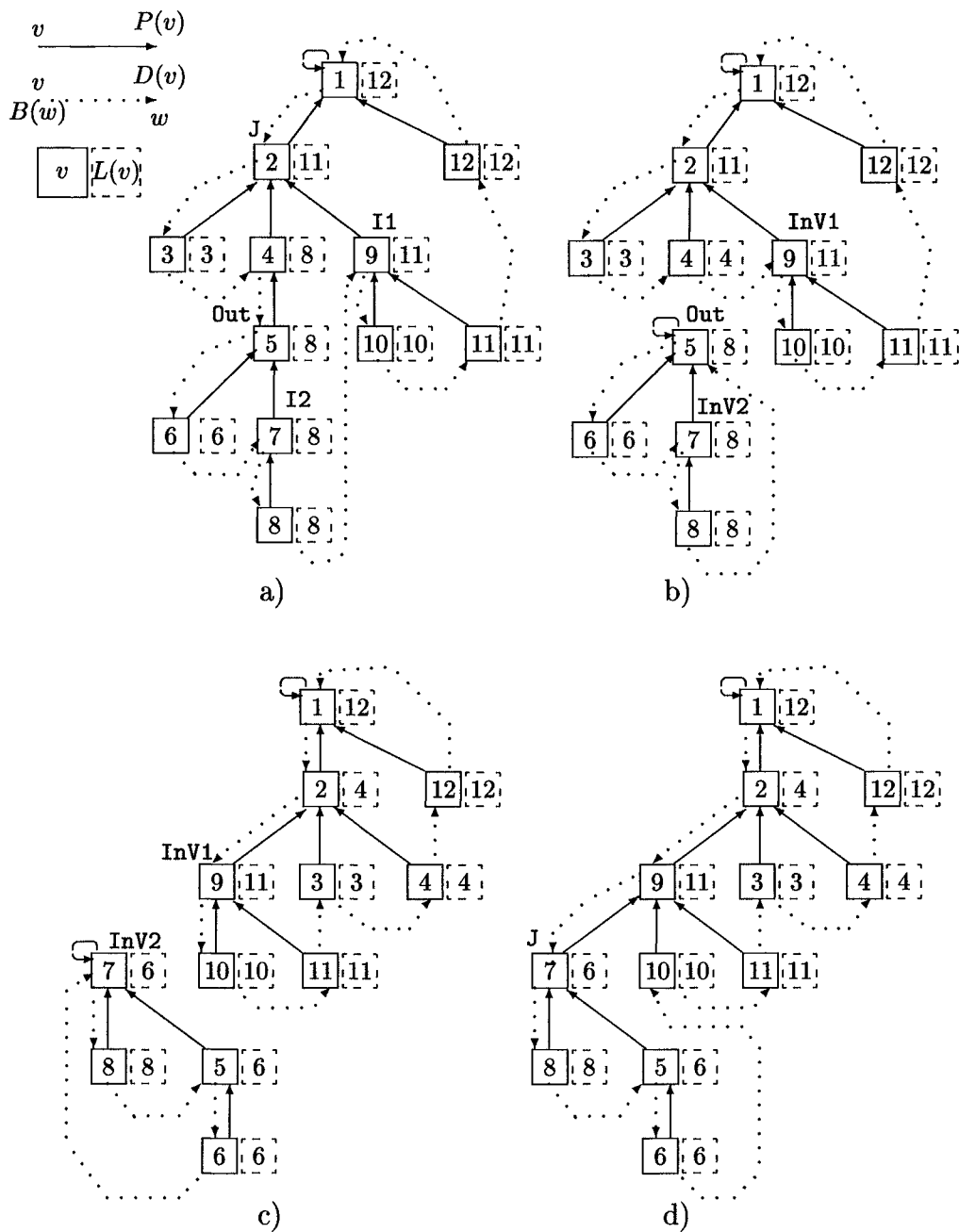


Рис. 1. Базисное дерево и определенные на нем функции

Стоимости $c(\cdot)$ и пропускные способности $k(\cdot)$ дуг сети будем кодировать как недиагональные элементы квадратных матриц C и K размера $|N|$. Далее считаем $N = \{i \in \mathbf{N} : 1 \leq i \leq |N|\}$. Строки матриц соответствуют началам дуг, а столбцы – концам. Достижение потоком в небазисной дуге $(i, j) : i \neq P(j), j \neq P(i)$ величины пропускной способности будем кодировать изменением знака величины $K(i, j)$. Таким образом, далее приняты следующие соглашения:

$$c(i, j) = C(i, j), k(i, j) = |K(i, j)|, \quad i, j \in N : i \neq j, \quad (7)$$

$$x(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{если } K(i, j) \geq 0, \\ k(i, j), & \text{если } K(i, j) < 0, \end{cases} \quad i, j \in N : i \neq P(j), j \neq P(i). \quad (8)$$

В диагональных элементах матриц C и K равны будем кодировать соответственно потенциалы вершин и потоки (с учетом ориентации) в базисных дугах, т.е.

$$C(i, i) = u(i), K(i, i) = \begin{cases} x(i, P(i)), & \text{если } Pos(i) = \text{True}, \\ -x(P(i), i), & \text{если } Pos(i) = \text{False}. \end{cases} \quad (9)$$

На рис. 2 определены типы и структуры данных, используемые для представления базисного дерева и определения класса `Transport` и его потомков. Константа `Large` задает недостижимую верхнюю границу для значения целевой функции, пропускных способностей и стоимостей дуг. Тип `PowerOfX` будет использован для определения пользователем функции, возвращающей мощность заданной вершины сети. Тип `XOfArc` будет использован для определения пользователем функций на дуге: стоимости, пропускной способности или потока. Значения определенных выше функций D, B, L, P и Pos на множестве N вершин задаются как поля структуры типа `TNode`, а функции C и K на множестве A дуг сети как поля записи типа `TArc`. Поле A структуры `TNode` определяет инцидентную дугу на пути от соответствующей вершины к корню, а поле Y – поток по ней. Наконец, поле `Im` содержит порядковый номер вершины.

```
#define Large 0xFFFFFFFFL
typedef long (*PowerOfX)(unsigned);
typedef long (*XOfArc)(unsigned, unsigned);
struct TArc {long C;           // price
             long K;           // capacity
            };
struct TNode { TNode *D /* direct next */, *B /* back next*/,
              TNode *L /* last */, *P /* predecessor */;
              TArc *A;           // incidence basic arc (root path)
              bool Pos;           // is the basic arc direction to the root?
              long *U /* potential */, *Y /* incidence basic arc flow */
              int unsigned Im;    // image (index)
            };
```

Рис. 2. Структуры для представления базисного дерева

На рис. 3 приведено описание интерфейса класса `Transport`. Описание полей и методов класса `Transport` из раздела `Protected` будет дано далее при описании их реализации. Здесь остановимся на описании полей из раздела `Public` данного класса. Поля `NPivots` и `NChecks` содержат соответственно количество выполненных ведущих преобразований и количество проверок условий оптимальности при решении задачи. Поле `Ir` содержит состояние созданного объекта: `Ir=0` – оптимальное решение найдено, `Ir=1` – стоимость потока неограничена сверху, `Ir=2` – не существует допустимого потока. В случае `Ir=0` поле

FlowCost содержит стоимость оптимального потока, в противном случае поле **BottleNeck** содержит одну из дуг, параметры которой являются причиной отсутствия решения задачи.

Как отмечалось выше, класс **Transport** является абстрактным классом, предоставляющим средства решения и постоптимизационного анализа задач транспортного типа как в матричной, так и в сетевой постановках. На рис. 4 приведено описание интерфейса классов **Transshipment** (4(a)) и **Transportation** (4(b)), предоставляющих средства решения транспортных задач в сетевой постановке и матричной постановках соответственно. Данные классы наследуют все поля и методы класса **Transport**, добавляют собственные и модифицируют конструктор и деструктор.

В разделе **public** класса **Transshipment** поле **N** определяет число вершин сети, функции **PriceOfArc**, **CapacityOfArc** и **PowerOfSource** составляются пользователем. Они должны возвращать конструктору значения $C(\text{Tail}, \text{Head})$, $K(\text{Tail}, \text{Head})$ и $Q(\text{Node})$ исходных данных решаемой задачи (1) – (3) для вершин и дуг, передаваемых им в качестве параметров. Здесь и далее значения переменных **Tail** и **Head** – вершины, соответствующие началу и концу выбранной дуги. Функции **ArcFlow** и **NodePotential** возвращают оптимальный поток по соответствующей дуге и потенциал соответствующей вершины. Наконец, с помощью метода **Perturb** модифицируются мощности вершин **V1**, **V2**, передаваемых в качестве параметров, и параметры инцидентных им дуг, а также отыскивается оптимальное решение возмущенной таким образом задачи. Наконец, с помощью метода **Perturb** модифицируются мощности вершин **V1**, **V2**, передаваемых в качестве параметров, и параметры инцидентных им дуг, а также отыскивается оптимальное решение возмущенной таким образом задачи. В Классе **Transportation** поля **NSup**, **NCons** определяют число поставщиков и потребителей соответственно. Остальные функции аналогичны соответствующим функциям класса **Transshipment**, но учитывают двудольность сети.

На рис. 5 приведены примеры использования классов **Transshipment** (a) и **Transportation** (b) в программах пользователя. В приведенном примере объект **Prb** класса **Transshipment** имеет восемь вершин, все исходные данные задаются с помощью датчика случайных чисел. После создания объекта его состояние отображается с помощью функции **void ArcsPrint(Transportation)**, написанной пользователем. После этого решается возмущенная задача, в которой изменены мощности вершин 1 и 2 на величину потока между ними в оптимальном базисном решении. Объект **Prb** класса **Transportation** имеет по восемь поставщиков и потребителей, все исходные данные задаются алгоритмически. После создания объекта его состояние отображается с помощью функции **void ArcsPrint(Transportation)**, написанной пользователем. После этого решается возмущенная задача, в которой могут быть изменены мощности вершин 1 и 2, а также стоимости и пропускные способности инцидентной им дуги.

4. Описание реализации классов

4.1. Конструкторы и деструкторы объектов

Функциональное назначение конструктора – построение оптимального базисного решения соответствующей задачи по импортируемым исходным данным. Впоследствии построенный объект, т.е. оптимальное базисное решение, может подвергаться перестройке и постоптимизационному анализу. Методы класса **transport** дают средства построения оптимального базисного решения из любого допустимого базисного решения.

Дерево, соответствующее начальному базисному решению, а также функции, определенные на множестве его вершин, показаны на рис. 6. В идейном отношении структура начального базисного решения для классов **Transshipment** (рис. 6(a)) и

```

class Transport { // Base class
public:
    Transport(){Tree=0; PArc=0; FictArc.K=Large; FictArc.C=-Large;};
    ~Transport(){};
    long FlowCost;
    long unsigned NPivots, NChecks;
    int unsigned Ir, BottleNeckTail, BottleNeckHead;
protected:
    long FIncr, // Flow increment
        CIncr; // Potential increment
    TNode *J, // Join point
        *Head,*Tail, // Nodes of Incoming arc
        *Out,*POut, // Nodes of Outgoing arc
        *Root, *Tree;
    TArc *InArc, // Incoming arc
        **PArc, FictArc;
    void Pivot(), Decompose(TNode*), Compose(TNode*,TNode*);
    TNode* LookForOutgoingArc(bool,TNode*);
    void Reroot(TNode*), OrderStudiedTree(TNode*,TNode*);
    void ModifyOfPotentials(TNode*);
}; // End of Transport

```

Рис. 3. Интерфейс класса Transport

<pre> class Transshipment: public Transport { public: Transshipment(unsigned, // Nnodes PowerOfX, // PowerOfSource XOfArc, // CapacityOfArc XOfArc // PriceOfArc); ~Transshipment(); long ArcFlow(unsigned,unsigned); long NodePotential(unsigned); void Perturb(unsigned,unsigned,long); unsigned N; PowerOfX PowerOfSource; XOfArc CapacityOfArc, PriceOfArc; protected: bool ThereIsDefectArc(); void Solve(); }; // End of Transshipment </pre>	<pre> class Transportation: public Transport { public: Transportation(unsigned, unsigned, PowerOfX, PowerOfX, XOfArc, XOfArc); ~Transportation(); long ArcFlow(unsigned,unsigned); long SupPotential(unsigned); long ConsPotential(unsigned); void Perturb(unsigned,unsigned); PowerOfX PowerOfSource, PowerOfSewer; XOfArc CapacityOfArc,PriceOfArc; unsigned NSup, NCons; protected: bool ThereIsDefectArc(); void Solve(); TArc *PSup, *PCons; }; // End of Transportation </pre>
(a)	(b)

Рис. 4. Интерфейс классов Transshipment (a) и Transportation (b)

```

long random( long D ) {
return(D*((double)rand()/((double)RAND_MAX
);
long PowerOfSource(unsigned Node){
return(random(0));
};
long CapacityOfArc( unsigned Tail,
unsigned Head){
return(1+random(5)); };
long PriceOfArc(unsigned Tail,
unsigned Head){
return(-5+random(10)); };
void ArcsPrint(Transshipment*P){
for(unsigned I=0; I<(P->N); I++){
cout<<'\\n'<<I<<'\\t';
for(unsigned J=0; J<(P->N); J++)
cout<<setw(4)<<P->ArcFlow(I,J);
};
};
int _tmain(void){ srand(666);
int N=8; Transshipment*Prb=new
Transshipment(
N,
PowerOfSource,
CapacityOfArc,
PriceOfArc
);
ArcsPrint(Prb);
Prb->Perturb(1,2,0);
cout<<"\\n";
ArcsPrint(Prb);
delete Prb;
return 0; };

```

(a)

```

long PowerOfSource(unsigned Node){
return(1+Node); }; long
PowerOfSewer(unsigned Node){
return(1+Node); }; long
CapacityOfArc(unsigned Tail,
unsigned Head){
int d=(long)Tail-(long)Head;
d=(d>0)? d:-d; return(3+d);
}; long PriceOfArc(unsigned Tail,
unsigned Head){
int d=(long)Tail-(long)Head;
d=(d>0)? d:-d; return(d);
}; void ArcsPrint(Transportation*P){
for(unsigned I=0; I<(P->NSup); I++){
cout<<'\\n'<<I<<'\\t';
for(unsigned J=0; J<(P->NCons); J++)
cout<<setw(4)<<P->ArcFlow(I,J);
};
}; int _tmain(){ srand(666);
int NSup=8, NCons=8; Transportation
*Prb=new Transportation(
NSup,NCons,
PowerOfSource, PowerOfSewer,
CapacityOfArc,
PriceOfArc
);
ArcsPrint(Prb);
if(Prb->Ir!=0)cout<<"Ir="<<Prb->Ir
<<" Tail="<<Prb->BottleNeckTail
<<" Head="<<Prb->BottleNeckHead;
Prb->Perturb(1,2); cout<<"\\n";
ArcsPrint(Prb); delete Prb; };

```

(b)

Рис. 5. Примеры использования классов Transshipment (a) и Transportation (b)

Transportation (рис. 6(b)) одинакова. Все дуги начального базисного решения являются: 1) инцидентными вершине 1, представляющей корень базисного дерева; 2) искусственными с неограниченными стоимостями и пропускными способностями. В соответствии с принятыми соглашениями величина константы **Large** равна верхней недостижимой границе величин $c(i, j), k(i, j), (i, j) \in A$ и стоимости любого допустимого решения, поэтому при определении потенциалов вершин сети стоимости дефектных дуг полагаются равными величине **Large**. Поток по дугам начального базисного решения и их ориентация определяются с помощью метода **PowerOfSource**. Прямой порядок обхода вершин совпадает с их естественной нумерацией. Завершается создание объектов применением метода **Solve** для нахождения оптимального базисного решения.

Конструктор и деструктор объектов класса **Transshipment** приведены на рис. 7. Функция **Transshipment** имеет четыре параметра. Первый параметр – число вершин сети. Оставшиеся три параметра – функции **PriceOfArc**, **CapacityOfArc** и **PowerOfSource**, которые конструктор использует для получения значений $C(Tail, Head)$, $K(Tail, Head)$, и $Q(Node)$ исходных данных решаемой задачи.

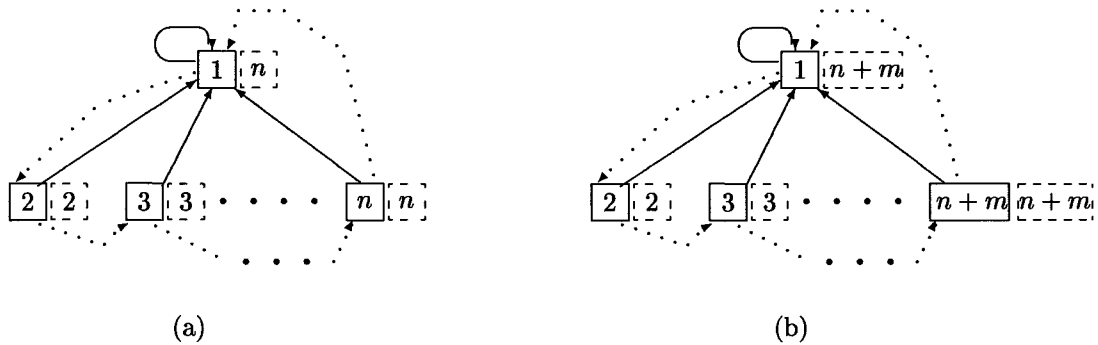


Рис. 6. Дерево начального базисного решения для класса **Transshipment** (a) и для класса **Transportation** (b)

Конструктор и деструктор объектов класса **Transportation** приведены на рис. 8. Функция **Transportation** имеет шесть параметров. Первые два параметра – число вершин в каждой доле графа (т.е. число поставщиков и число потребителей). Оставшиеся четыре параметра – функции **Price**, **Cap**, которые конструктор использует для получения значений $C(\text{Tail}, \text{Head})$, $K(\text{Tail}, \text{Head})$, и функции **Source**, **Sewer**, используемые для передачи в программу значений мощностей вершин.

При выполнении обоих конструкторов сначала выделяется память под массив **Arc** и с помощью функций **Cap** и **Price** определяет недиагональные элементы данного массива. Затем выделяется память под массив **Tree** и строится начально базисное решение. При выполнении деструктора освобождается память, выделенная объекту при его создании.

4.2. Метод Solve

Метод **Solve** реализован в виде одноименной функции (см. рис. 9). Функция **Solve** использует метод **ThereIsDefectArc** для выявления в текущем базисном решении дуг, которые не удовлетворяют условию оптимальности (4) – (6), и метод **Pivot** для выполнения ведущего преобразования. Применение данных методов производится до тех пор, пока метод **ThereIsDefectArc** находит дефектные дуги (т.е. дуги, не удовлетворяющие условию оптимальности) или метод **Pivot** не установит $\text{Ir}=1$, что соответствует существованию цикла из дуг с неограниченной пропускной способностью и положительной суммой их стоимостей. В последнем случае оптимальное решение прямой задачи неограничено, а двойственная задача не имеет решения.

Если же методу **ThereIsDefectArc** не удалось обнаружить дефектных дуг, то, как далее будет показано, в построенном решении все дуги удовлетворяют условиям оптимальности. В данном случае осталось проверить, имеются ли среди базисных дуг искусственные дуги, использованные при построении начального базисного решения. При положительном ответе мы имеем задачу, не имеющую допустимых решений. Оптимальное решение соответствующей двойственной задачи в этом случае неограничено.

В противном случае построены оптимальные решения прямой и двойственной задач. Поскольку двойственная задача имеет множество оптимальных решений, то в рассматриваемой процедуре оно приводится к нормальной форме, в которой минимальное значение двойственных переменных равно нулю.

Последняя группа вложенных циклов предназначена для подсчета оптимального значения целевой функции.

4.3. Изучение базисного дерева

Будем через $T(i)$ обозначать минимальное поддереву текущего базисного дерева T , стягивающего всех преемников вершины i . Вершину i будем называть корнем

```

//Constructor
Transshipment::Transshipment(
    unsigned NCard, PowerOfX Power,
    XOfArc Cap, XOfArc Price):Transport(){
    PowerOfSource=Power; CapacityOfArc=Cap;
    PriceOfArc=Price; N=NCard;
    PArc=new TArc* [N];
    for(unsigned i=0; i<N; i++){
        PArc[i]=new TArc [N];
        for(unsigned m=0; m<i; m++){
            PArc[i][m].K=CapacityOfArc(i,m);
            PArc[i][m].C=PriceOfArc(i,m);
        };
        for(unsigned m=i+1; m<N; m++){
            PArc[i][m].K=CapacityOfArc(i,m);
            PArc[i][m].C=PriceOfArc(i,m);
        };
    };
    Tree=new TNode [N]; Root=Tree;
    for(unsigned i=0; i<N; i++){
        long K=PowerOfSource(i);
        if(K>=0){ // (i,0) is the basic arc
            Tree[i].Pos=true;
            if(PArc[i][0].K>=K){
                // (i,0) is the real arc
                PArc[i][i].K=K;
                PArc[i][i].C=-PArc[i][0].C;
                Tree[i].A=PArc[i];
            }
            else { // (i,0) is the fiction arc
                PArc[i][i].K=K-PArc[i][0].K;
                PArc[i][0].K=-PArc[i][0].K;
                PArc[i][i].C=Large;
                Tree[i].A=&FictArc;
            };
        }
        else { // (0,i) is the basic arc
            Tree[i].Pos=false;
            if(PArc[0][i].K>=-K){
                //(0,i) is a real arc
                PArc[i][i].K=K;
                PArc[i][i].C=PArc[0][i].C;
                Tree[i].A=PArc[0]+i;
            }
            else { // (0,i) is the fiction arc
                PArc[i][i].K=K+PArc[0][i].K;
                PArc[0][i].K=-PArc[0][i].K;
                PArc[i][i].C=-Large;
                Tree[i].A=&FictArc;
            };
        }
    };
    TNode* T=Tree+1;
    for(unsigned i=1; i<N; i++, T++){
        T->P=Root; T->L=T;
        T->D=T+1; T->B=T-1;
        T->U=&(PArc[i][i].C);
        T->Y=&(PArc[i][i].K);
        PArc[0][0].K+=PArc[i][i].K;
        T->Im=i;
    };
    Tree->U=&(PArc[0][0].C);
    Tree->Y=&(PArc[0][0].K);
    *(Tree->U)=0; Tree[N-1].D=Root;
    Tree->Im=0; Tree->P=Root;
    Tree->D=Root+1; Tree->B=Tree+(N-1);
    Tree->L=Tree+(N-1); Tree->Pos=true;
    J=Tree->L; Solve();
}; //End of Transshipment

//Destructor
Transshipment::~Transshipment(){
    if(Tree) delete[] Tree;
    for(unsigned i=0; i<N; i++)
        if(PArc[i]) delete[] PArc [i];
    if(PArc) delete[] PArc;
}; //End of ~Transshipment

```

Рис. 7. Конструктор и деструктор класса Transshipment

поддерева $T(i)$. Поддерево $T(i)$ будем называть *изученным*, если установлено выполнение условий оптимальности для всех дуг, инцидентных вершинам данного поддерева. Если базисное дерево содержит изученные поддерева, то проверка условий оптимальности необходима только для тех дуг, которые не стягивают вершины изученного поддерева. Попытаемся за счет надлежащего выбора порядка изучения поддерева базисного дерева и процедур преобразования информации при его перестройке уменьшить количество проверок условия оптимальности. Естественным требованием к искомому порядку является его согласованность с отношением включения: из $T(x) \subset T(y)$ должно следовать, что изучение поддерева $T(x)$ предшествует изучению $T(y)$.


```

Transportation::Transportation(
    unsigned N,
    unsigned M,
    PowerOfX Source,
    PowerOfX Sewer,
    XOfArc Cap,
    XOfArc Price
) : Transport(){
    PowerOfSource=Source; PowerOfSewer=Sewer;
    CapacityOfArc=Cap; PriceOfArc=Price;
    NSup=N; NCons=M; PArc=new TArc* [N];
    for(unsigned i=0; i<N; i++){
        PArc[i]=new TArc [M];
        for(unsigned m=0; m<M; m++){
            PArc[i][m].K=CapacityOfArc(i,m);
            PArc[i][m].C=PriceOfArc(i,m);
        };
    };
    PSup=new TArc [N]; PSup->K=PowerOfSource(0);
    PSup->C=0; PCons=new TArc [M];
    Tree=new TNode [N+M]; Root=Tree;
    for(unsigned i=1; i<N; i++){
        // All initial arc from Suppers are fiction
        TNode* T=Tree+i;
        (PSup->K)+=(PSup[i].K=PowerOfSource(i));
        T->Pos=true;
        PSup[i].C=Large;
        T->A=&FictArc;
        T->P=Tree; T->L=T; T->D=T+1; T->B=T-1;
        T->U=&(PSup[i].C); T->Y=&(PSup[i].K);
        T->Im=i;
    };
    for(unsigned i=0; i<M; i++){
        long K=PowerOfSewer(i);
        (PSup->K)-=K;
        TNode* T=Tree+N+i;
        T->Pos=false;
    };
};

if(PArc[0][i].K>=K){
    //(0,i) is the real arc
    PCons[i].K=-K;
    PCons[i].C=PArc[0][i].C;
    T->A=PArc[0]+i;
}
else {
    //(0,i) is the fiction arc
    PCons[i].K=-K+PArc[0][i].K;
    PArc[0][i].K=-PArc[0][i].K;
    PCons[i].C=Large;
    T->A=&FictArc;
}
T->P=Tree; T->L=T; T->D=T+1;
T->B=T-1; T->U=&(PCons[i].C);
T->Y=&(PCons[i].K); T->Im=i;
};
Tree->Pos=true; Tree->Im=0;
Tree->P=Tree; Tree->D=Tree+1;
(Tree+1)->B=Tree;
Tree->B=Tree->L=Tree+N+M-1;
(Tree+N+M-1)->D=Tree;
Tree->U=&(PSup->C);
Tree->Y=&(PSup->K);
PCons->C=0; Tree->A=0;
J=Tree->L; Solve();
}; //End of Transportation

//Destructor
Transportation::~Transportation(){
    if(Tree) delete[] Tree;
    if(PCons) delete PCons;
    if(PSup) delete[] PSup;
    for(unsigned i=0; i<NSup; i++)
        if(PArc[i]) delete[] PArc [i];
    if(PArc) delete[] PArc;
}; //End of ~Transportation

```

Рис. 8. Конструктор и деструктор класса Transportation

Рассмотрим концевой порядок обхода базисного дерева, определяемый функцией B . Данная функция индуцирует отношение \prec линейного порядка на множестве всех поддеревьев базисного дерева: $T(i) \prec T(j)$, если $i = B^{s_i}(r)$, $j = B^{s_j}(r)$, $s_i < s_j$, где B^s – суперпозиция s функций B . Очевидно, что из $T(x) \subset T(y)$ следует $T(x) \prec T(y)$. Изучение поддеревьев базисного дерева в порядке, определяемом отношением \prec , использовано в методе `ThereIsDefectArc`. Данный метод реализован в виде одноименной булевой функции (рис. 10) без формальных параметров.

Данная функция возвращает значение `False` при отсутствии в базисном дереве дефектных дуг. В противном случае функция возвращает значение `True` и модифицирует значения следующих глобальных переменных: 1) `J` для указания корня поддерева, при изучении которого была найдена дефектная дуга; 2) `Tail` и `Head` для указания начала и

```

void Transshipment::Solve(){
NPivots=0; NChecks=0; Ir=0;
while ((Ir!=1) &&
    ThereIsDefectArc())Pivot();
if(Ir==1)return;
long MinU=*(Root->U);
TNode*V=Root->D;
do{
    TNode* PV=V->P;
    CIncr=*(V->U)-*(PV->U);
    if(CIncr>=Large){
        BottleNeckTail=PV->Im;
        BottleNeckHead=V->Im;
        Ir=2; return;
    };
    if(CIncr<=-Large){
        BottleNeckTail=V->Im;
        BottleNeckHead=PV->Im;
        Ir=2; return;
    };
    if(MinU>*(V->U))MinU=*(V->U);
    V=V->D;
}while(V!=Root); // End of do V=Root;
do{
    (*(V->U))-=MinU;
    V=V->D;
    } while(V!=Root);
long S=0; TNode* U=Root;
do {
    V=Root;
    do {
        S+=ArcFlow(U->Im,V->Im)*
            PArc[U->Im][V->Im].C;
        V=V->D;
    }while(V!=Root);
    U=U->D;
}while(U!=Root);
FlowCost=S;
}; // End of Transshipment::Solve

```

(a)

```

void Transportation::Solve(){
NPivots=0; NChecks=0; Ir=0;
while ((Ir!=1) &&
    ThereIsDefectArc()) Pivot();
if(Ir==1)return;
long MinU=*(Root->U);
TNode* V=Root->D;
do{
    TNode* PV=V->P;
    CIncr=*(V->U)-*(PV->U);
    if(CIncr>=Large){
        BottleNeckTail=PV->Im;
        BottleNeckHead=V->Im;
        Ir=2; return;
    };
    if(CIncr<=-Large){
        BottleNeckTail=V->Im;
        BottleNeckHead=PV->Im;
        Ir=2; return;
    };
    if(MinU>*(V->U))MinU=*(V->U);
    V=V->D;
}while(V!=Root); // End of do V=Root;
do{ (
    *(V->U))-=MinU;
    V=V->D;
    } while(V!=Root);
long S=0;
for(unsigned i=0; i<NSup; i++)
    for(unsigned j=0; j<NCons; j++)
        S+=ArcFlow(i,j)*PArc[i][j].C;
FlowCost=S;
}; // End of Transportation::Solve

```

(b)

Рис. 9. Метод Solve для классов Transshipment (a) и Transportation (b)

конца дефектной дуги, которую следует ввести в базис; 3) Cincr для указания невязки в ограничении двойственной задачи, соответствующем дуге (Tail, Head).

До начала действия метода и после каждого выполнения тела внешнего цикла значение переменной J указывает корень последнего изученного дерева. По определению, все вырожденные поддеревья (т.е. представляющие единственную вершину) являются изученными. В первом вложенном цикле значение переменной J устанавливается равным корню следующего поддерева, которое следует изучить, а у переменной I – корню изученного поддерева, предшествующего $T(J)$.

```

bool Transshipment::ThereIsDefectArc(){
TNode *I, *I1, *I2, *LI, *LJ, *DLJ;
CIncr=0;
do {
do {I=J; J=J->B;}while(J!=I->P);
LJ=J->L; DLJ=LJ->D; LI=I->L; I2=J;
do {
do { I1=I;
do { // UINCR
TArc *Arc1=PArc[I2->Im]+(I1->Im);
TArc *Arc2=PArc[I1->Im]+(I2->Im);
long RArc1=0; long RArc2=0;
NChecks++;
long Incr=*(I1->U)-(I2->U);
if((Arc1->K)<0)
RArc1=-Incr+(Arc1->C);
else if((Arc1->K)>0)
RArc1=Incr-(Arc1->C);
if(Arc2->K<0)RArc2=Incr+(Arc2->C);
else if(Arc2->K>0)
RArc2=-Incr-(Arc2->C);
if(RArc1<=RArc2) {
if(RArc1<CIncr){
InArc=Arc1; CIncr=RArc1;
Head=I1; Tail=I2;
};
}
else if(RArc2<CIncr){
InArc=Arc2; CIncr=RArc2;
Head=I2; Tail=I1;
}; // End of UINCR
if(CIncr<0)return true;
I1=I1->D;
}while(I1!=DLJ);
I2=I2->D;
}while(I2!=I);
I=LI->D; LI=I->L;
}while(I!=DLJ);
}while(J!=Root); return false;
};//End of Transshipment::ThereIsDefectArc
(a)

```

```

bool Transportation::ThereIsDefectArc(){
CIncr=0;
do { TNode* I;
do {I=J; J=J->B;}while(J!=I->P);
TNode* LJ=J->L; TNode* DLJ=LJ->D;
TNode* LI=I->L; TNode* I2=J;
do {
do {
bool I2Pos=I2->Pos;
TNode* I1=I;
do { // UINCR
bool I1Pos=I1->Pos;
TNode *H, *T;
if(I2Pos!=I1Pos){
if(I2Pos){
H=I1;
T=I2;
}else{H=I2; T=I1;};
TArc* Arc=PArc[T->Im]+(H->Im);
long Incr=*(T->U)-(H->U);
long RArc=0; NChecks++;
if((Arc->K)<0)
RArc=Incr-(Arc->C);
else if((Arc->K)>0)
RArc=-Incr+(Arc->C);
if(RArc<CIncr){
InArc=Arc;
CIncr=RArc;
Head=H; Tail=T;
};
} // End of UINCR
if(CIncr<0)return true;
I1=I1->D;
}while(I1!=DLJ);
I2=I2->D;
}while(I2!=I);
I=LI->D; LI=I->L;
}while(I!=DLJ);
}while(J!=Root); return false;
};//End of Transshipment::ThereIsDefectArc
(b)

```

Рис. 10. Метод ThereIsDefectArc для классов Transshipment (a) и Transportation (b)

Следующая далее группа вложенных циклов обеспечивает проверку выполнения условия оптимальности для всех дуг, стягивающих в изучаемом дереве $T(J)$ вершины $I1$ и $I2$, принадлежащие разным максимальным по включению изученным поддеревьям, т.е. из просмотра исключаются дуги, стягивающие вершины каждого изученного поддерева. Внутренний блок операторов Uincr вычисляет невязки RArc1 RArc2 дуг инцидентных вершинам $I1$ и $I2$ и модифицирует значения глобальных переменных Tail и Head, определяющих начало и конец дефектной дуги с наибольшей невязкой, а также переменной Cincr, определяющей величину этой невязки.

Если при изучении поддерева встречались дефектные дуги, то метод завершается,

возвращая значение **True**. В противном случае метод переходит к изучению следующего неизученного поддерева. Если изученным оказалось все базисное дерево, то метод завершается, возвращая значение **False**.

4.4. Ведущее преобразование

Если найдена дуга для ввода в базис, то процесс изучения текущего базисного дерева останавливается и вызывается метод **Pivot** выполнения ведущего преобразования. Данный метод использует модифицированную перестройку функций D , B и L на множестве вершин базисного дерева [17, 22, 24], при которой наследуется предшествование всех не изменившихся изученных поддеревьев относительно неизученных. На рис. 11 приведен текст метода **Pivot**. Для определения выводимой дуги величина **FIncr** предварительно устанавливается равной пропускной способности вводимой дуги. Далее определяются вершины **InV1** и **InV2**, такие, что: 1) вдоль пути в базисном дереве от вершины **InV1** до вершины **J** поток должен возрасти на прямых дугах и уменьшиться на встречных; 2) вдоль пути от вершины **InV2** до вершины **J** поток должен наоборот уменьшиться на прямых дугах и увеличиться на встречных. Для определения максимально возможного допустимого изменения потока и нахождения ближайшей к вершине **J** дуги, определяющей это изменение дважды, используется метод **LookForOutgoingArc**. Текст процедуры, реализующей данный метод, приведен на рис. 12(a). Входными данными являются переменная V , задающая вершину поддерева $T(J)$, и логическая переменная **Descr**, определяющая характер изменения потока в дугах базисного дерева, принадлежащих пути от вершины V до вершины J : 1) если **Descr=True**, то поток уменьшается на прямых дугах и увеличивается на обратных; 2) если **Descr=False**, то поток увеличивается на прямых дугах и уменьшается на обратных. Выходным параметром является переменная **Out**, указывающая ближайшую к J вершину, такую, что дуга $(Out, P(Out))$ определяет максимально возможное допустимое изменение потока. Кроме того, метод уточняет значение глобальной переменной **Fincr**, указывающей максимально возможное допустимое изменение потока, установленное ранее.

Если максимально возможное допустимое изменение **FIncr** потока после просмотра всех дуг полученного цикла осталось неограниченным (т.е. по определению равным **Large**), то выполнение завершается с кодом **Ir=1**. В противном случае производится изменение потока вдоль дуг образованного цикла. Если же в образованном цикле величина **FIncr** определяется только пропускной способностью введенной на данной итерации дуги, то эту дугу вновь следует вывести из базиса, т.е. завершить выполнение метода **Pivot** и продолжить изучение базисного дерева $T(J)$. Признаком отсутствия кандидатов для вывода из базиса является равенств **Out1=0** и **tt Out2=0**. В противном случае введенная дуга остается в базисе. Последняя из дуг, при просмотре которой было изменение величины **Out1** или **Out2**, выбирается для вывода из базиса. Для идентификации данной дуги используется переменная **Out**, указывающая инцидентную ей вершину, дальнюю от вершины J . Затем переменным **InV1** и **InV2** присваиваются значения, равные вершинам, инцидентным вводимой в базис дуге, так чтобы $InV1 \in T \setminus T(Out)$, $InV2 \in T(Out)$.

Базисное дерево при удалении из него выводимой дуги преобразуется в лес из двух компонент связности $T(Out)$ и $T \setminus T(Out)$. Очевидно, что условия выполнения критерия оптимальности изменяются только для дуг, инцидентных вершинам из разных компонент связности. Так как вводимая в базис дуга была определена методом **ThereIsDefectArc**, то для нового базисного решения будут справедливы утверждения: 1) компонента связности, не содержащая вершину J , представляющую корень изучаемого поддерева, является изученным поддеревом; 2) в компоненте связности, содержащей вершину J , изученными останутся все ранее изученные поддеревья, не содержащие вершины **InV1**.

```

void Transport::Pivot(){
TNode *InV1, *InV2;
Ir=0; NPivots+=1;
// IncomingArc
long KInArc=InArc->K;
if (KInArc>0){
    FIncr=KInArc;
    InV1=Head;
    InV2=Tail;
} else {
    FIncr=-KInArc;
    InV2=Head;
    InV1=Tail;
};
TNode* Out1=LookForOutgoingArc(false,InV1);
TNode* Out2=LookForOutgoingArc(true,InV2);
//ModifyFlow
if(FIncr>=Large) Ir=1;
else {
    TNode* V=InV1;
    while(V!=J){
        *(V->Y)+=FIncr;
        V=V->P;
    };
    V=InV2;
    while(V!=J){
        *(V->Y)-=FIncr;
        V=V->P;
    };
    if((Out1==0)&&(Out2==0)) {
        (InArc->K)=-KInArc;
        Ir=2;
    }else{
        Ir=0;
        (InArc->K)=(KInArc<0)?
            -KInArc : KInArc;
    };
}; // End of if(FIncr>=Large)

switch(Ir){
case 0: {
    //OutgoingArc
    TNode* Out=(Out2==0)? Out1 : Out2;
    if(( *(Out->Y)!=0)&&((Out->A)!=&FictArc))
        Out->A->K--(Out->A->K);

    if(Out==Out1){
        Out1=InV1;
        InV1=InV2;
        InV2=Out1;
    };
    Decompose(Out);
    OrderStudiedTree(InV1,J);
    Reroot(InV2);
    Compose(InV1,InV2);
    InV2->A=InArc; (InV2->Pos)=(InV2==Tail);
    if(KInArc<0)FIncr=-FIncr-KInArc;
    *(InV2->Y)=(InV2->Pos)? FIncr : -FIncr;
    if((KInArc<0)==(InV2->Pos))CIncr=-CIncr;
    ModifyOfPotentials(InV2);
    J=InV2; break;
}; // End of case 0
case 1: {
    BottleNeckTail=Tail->Im;
    BottleNeckHead=Head->Im;
    return;
};
case 2: {Ir=0; J=J->D;};
}; // End of Pivot

```

Рис. 11. Метод Pivot

Для определения на деревьях $T(Out)$ и $T \setminus T(Out)$ значений функций P , D , B и L , сохраняющих порядок предшествования ранее изученных поддеревьев неизученным, используется метод `Decompose`. Текст процедуры, реализующей данный метод, приведен на рис. 12(b). Единственный формальный параметр `Out` определяет дальнюю от корня вершину дуги, выводимой из базиса. Следующий шаг – построение упорядочения (за счет переопределения функций D , B и L), изученных поддеревья дерева $T(J) \setminus T(Out)$, при котором все его изученные поддеревья, не содержащие вершины `InV1`, предшествуют поддеревьям, содержащим эту вершину. Данный шаг выполняется методом `OrderStudiedTree`. Текст процедуры, реализующей метод `OrderStudiedTree`, приведен на рис. 13(a). Формальными параметрами процедуры являются вершины I и J дерева, удовлетворяющие условию $T(I) \subset T(J)$. Предполагается, что все поддеревья, предшествующие $T(J)$, являются изученными. В результате применения метода

```

TNode* Transport::LookForOutgoingArc(
    bool Decr,
    TNode* V){
long Flow; TNode *SV, *Out=0; while(V!=J){
    SV=V; V=V->P;
    if(SV->Pos){
        Flow*(SV->Y);
        if(!Decr)Flow=(SV->A->K)-Flow;
    }
    else {
        Flow=-*(SV->Y);
        if(Decr)Flow=(SV->A->K)-Flow;
    };
    if(Flow<FIncr){FIncr=Flow; Out=SV;};
}; // End of while(V!=J)
return Out; }; // End of LookForOutgoingArc

```

(a)

```

void Transport::Decompose(TNode* Out){
    TNode* LV=Out->L;
    TNode* BV=Out->B;
    Out->B=LV;
    TNode* V=Out->P;
    Out->P=Out;
    TNode* DLV=LV->D;
    LV->D=Out;
    BV->D=DLV; DLV->B=BV;
    TNode* PDLV=DLV->P;
    while(V!=PDLV) {V->L=BV; V=V->P;};
    if(DLV==V) V->L=BV;
}; // End of Decompose

```

(b)

Рис. 12. Методы LookForOutgoingArc (a) и Decompose (b)

определяются значения функций D , B и L такие, что 1) сохраняется предшествование изученных поддеревьев неизученным; 2) все изученные поддерева, не содержащие вершины I , предшествуют поддеревам, содержащим вершину I .

Далее с помощью метода **ReRoot** переопределяются функции P , D , B и L на дереве $T(Out)$, так, чтобы вершина $InV2$ стала корнем. На рис. 13(b) приведен текст процедуры, реализующей метод **ReRoot**. Формальный параметр **NewRoot** определяет требуемое размещение корня, для которого определяются новые значения функций P , D , B и L .

Затем необходимо сделать композицию деревьев, добавив вводимую дугу в лес, образованный при удалении выводимой дуги. Измененные значения функций P , D , B и L должны сохранять предшествование изученных поддеревьев неизученным. При этом в перестроенном дереве последним изученным поддеревом будет $T(InV2)$. Данный шаг осуществляется с помощью метода **Compose**.

Текст процедуры, реализующей метод **Compose**, приведен на рис. 14(a). Формальные параметры V и W процедуры определяют вершины, инцидентные вводимой дуге. При этом предполагается, что вершины V и W принадлежат разным деревьям, а вершина W является корнем дерева. В результате применения метода значения функций P , D , B и L модифицируются таким образом, что сохраняется порядок, имевший ранее место.

Завершается метод **Pivot** фиксацией ориентации потока во вводимой дуге и соответствующей модификацией двойственного решения, которая осуществляется методом **ModifyPotentials**. Текст соответствующей процедуры приведен на рис. 14(b). Формальным параметром процедуры является корень поддерева, к потенциалам вершин которого следует добавить величину глобальной переменной **CIncr**.

На рис. 1 дана иллюстрация выполнения ведущего преобразования. Текущее базисное дерево и определенные на нем функции P , D , B и L показаны на рис. 1(a). Пусть при изучении дерева $T(J)$, $J=2$ метод **ThereIsDefectArc** определил, что в базис следует ввести дугу, инцидентную вершинам $I1=9$, $I2=7$. Пусть метод **Pivot** определил, что из базиса следует вывести дугу, инцидентную вершинам $Out=5$ и $P(Out) = 4$. На рис. 1(b) показан результат декомпозиции. На рис. 1(c) – результат переупорядочения изученных поддеревьев и переноса корня. Результат композиции показан на рис. 1(d).

```

void Transport::OrderStudiedTree(
    TNode* I,
    TNode* Join
){
    if(I==Join)return;
    TNode* V=I; TNode* LV=V->L;
    TNode* DLV=LV->D;
    TNode* PDLV=DLV->P;
    do{
        TNode* PV=V->P; TNode* DPV=PV->D;
        if(DPV==V){
            if(PDLV!=PV) PV->L=LV;
            else if(PV!=DLV) {
                LV=PV->L; DLV=LV->D;
                PDLV=DLV->P;
            }
            else PV->L=LV;
        }
        else {
            TNode* BV=V->B; LV->D=DPV;
            DPV->B=LV; PV->D=V; V->B=PV;
            BV->D=DLV; DLV->B=BV;
            if(PDLV!=PV){
                PV->L=BV;
                LV=BV;
            }else if(PV!=DLV){
                LV=PV->L; DLV=LV->D;
                PDLV=DLV->P;
            } else {
                PV->L=BV;
                LV=BV;
            }
        }
        V=PV;
    }while(V!=Join);
    while(V!=PDLV) {
        V->L=LV;
        V=V->P;
    };
    if(V==DLV)V->L=LV;
}; // End of OrderStudiedTree

```

(a)

```

void Transport::Reroot(
    TNode* NewRoot
){
    long VY, PVY; TArc *VA, *PVA;
    TNode *V,*W,*BV,*DV,*PV,*BPV,
        *LV,*DLV,*PDLV;
    bool PosOrV, PosOrPV;
    V=NewRoot;
    PosOrV=V->Pos; VY=(V->Y);
    VA=V->A; PV=V->P; V->P=V;
    if (V==PV) return;
    LV=V->L; DLV=LV->D; PDLV=DLV->P;
    BV=V->B; BPV=PV->B; DV=V;
    if(V!=LV){
        DV=V->D; LV->D=V;
        V->B=LV;
    };
    V->D=PV; PV->B=V;
    while(true){
        PosOrPV=PV->Pos; PV->Pos=!PosOrV;
        PosOrV=PosOrPV;
        PVY=(PV->Y);
        *(PV->Y)=-VY; VY=PVY;
        PVA=PV->A; PV->A=VA; VA=PVA;
        if(PV==PDLV){
            W=PDLV->L;
            if(LV==W){LV=BV; break;};
            LV=W; W=DLV; DLV=LV->D;
            PDLV=DLV->P;
            LV->D=DV; DV->B=LV; DV=W;
            if(PV==PDLV)break;
        };
        W=V; V=PV; PV=V->P;
        V->P=W; W=BV; BV=BPV;
        BPV=PV->B; PV->B=W; W->D=PV;
    };
    BV->D=DV; DV->B=BV; PV->L=LV;
    DLV=LV->D; PDLV=DLV->P; PV->P=V;
    while(true){
        PV=PV->P;
        if(PV!=PDLV) PV->L=LV;
        else if(DLV==PDLV)break;
        else {
            LV=PDLV->L; DLV=LV->D;
            PDLV=DLV->P;
        };
    };
    PV->L=LV;
}; // End of Reroot

```

(b)

Рис. 13. Методы OrderStudiedTree (a) и Reroot (b)

```

void Transport::Compose(
    TNode *V,
    TNode *W){
    W->P=V;
    TNode* LW=W->B; W->B=V;
    TNode* DV=V->D; V->D=W;
    TNode* LV=V->L; LW->D=DV;
    DV->B=LW;
    if(V==LV) {
        TNode* PDV=DV->P;
        do{ V->L=LW; V->P; }while(V!=PDV);
        if(V==DV)V->L=LW;
    };
}; // End of Compose
    (a)
}

void Transport::ModifyOfPotentials(
    TNode *V){
    TNode* I=V->L;
    while(I!=V){
        *(I->U)+=CIncr;
        I=I->B; };
        *(V->U)+=CIncr;
    }; // End of ModifyOfPotentials
    (b)
}

```

Рис. 14. Методы Compose (a) и ModifyOfPotentials (b)

4.5. Метод Perturb

Постоптимизационный анализ и многие алгоритмы для задач размещения и синтеза сетей требуют решения последовательности локально возмущенных задач, отличающихся от решенной значениями функций *PowerOfSource* на двух вершинах *V1*, *V2*, а также значениями функций *PriceOfArc* и *CapacityOfArc* на дугах, инцидентных указанным вершинам. В данном случае при построении начального базисного решения возмущенной задачи разумно использовать оптимальное базисное решение невозмущенной задачи. Функции на базисном дереве, следует модифицировать так, чтобы изученными остались все поддеревья, не содержащие одновременно вершины *V1*, *V2*. Для решения указанной задачи в классы *Transshipment* и *Transportation* включен метод *Perturb*.

Текст функции, реализующей данный метод для класса *Transshipment* приведен на рис. 15. Формальными параметрами процедуры являются вершины *V1*, *V2* и величина *FlowExch*. При этом предполагается, 1) значения функции *PowerOfSource* на вершине *V1* увеличенно на величину *FlowExch*, а на вершине *V2* – уменьшенно на эту величину; 2) модифицированные значения функций *PriceOfArc* и *CapacityOfArc* на дугах, инцидентных вершинам *V1*, *V2* должны быть определены пользователем.

Текст функции, реализующей метод *Transportation::Perturb* приведен на рис. 16. Формальными параметрами процедуры являются вершины *V1*, *V2*. При этом предполагается, что пользователем переопределены значения функций *PowerOfSource* на вершинах *V1* и *V2*, и значения функций *PriceOfArc* и *CapacityOfArc* на дугах, инцидентных вершинам *V1*, *V2*.

В обеих функциях базисное решение строится следующим образом. Корень оптимального базисного дерева переносится в вершину *V1*. Если оптимальное базисное дерево не содержит дуги инцидентной вершинам *V1*, *V2*, то с помощью локальной процедуры *CorrectBasicTree* строится базисное решение, близкое к оптимальному, но содержащее такую дугу. Для вывода из оптимального базиса выбирается дуга, определяющая минимальное из максимально возможных допустимых изменений потока (увеличение или уменьшение) вдоль пути от вершины *V2* до корня, т.е. вершины *V1*. Далее локальная процедура *CorrectData* запрашивает измененные значения стоимостей и пропускных способностей и заменяет базисную дугу, инцидентную вершинам *V1* и *V2*, искусственной дугой стоимостью *-Large*. В построенном базисном решении все собственные поддеревья


```

Transshipment::Perturb(unsigned IV1,
                      unsigned IV2,
                      long FlowExch
                      ){
    TNode* V1=Tree+IV1;
    TNode* V2=Tree+IV2;
    Reroot(V1);
    Root=V1; J=V1;
    if(V1!=V2->P) { // CorrectBasisTree
        TNode *V, *Out, *Out1, *Out2;
        FIncr=Large;
        Out1=LookForOutgoingArc(false,V2);
        Out2=LookForOutgoingArc(true,V2);
        V=V2;
        if(Out2!=0) Out=Out2;
            else { Out=Out1; FIncr=-FIncr;};
        while(V!=J){
            *(V->Y)--=FIncr;
            V=V->P;
        };
        if(*(Out->Y)!=0)
            (Out->A->K)--(Out->A->K);
        Decompose(Out);
        Reroot(V2);
    }

    Compose(V1,V2);
    V2->Pos=(FIncr>0);
    *(V2->Y)=FIncr; V2->A=&FictArc;
    }; // end of CorrectBasisTree

    // CorrectData
    long Flow=*(V2->Y)-FlowExch;
    TArc* A=PArc[V1->Im]+(V2->Im);
    if((A->K)<0)Flow+=(A->K);
    A->K=CapacityOfArc(IV1,IV2);
    A->C=PriceOfArc(IV1,IV2);
    A=PArc[V2->Im]+(V1->Im);
    if((A->K)<0)Flow-=(A->K);
    A->K=CapacityOfArc(IV2,IV1);
    A->C=PriceOfArc(IV2,IV1);
    V2->Pos=(Flow>0);
    CIncr=(V2->Pos)?
        Large-*(V2->U) : -Large-*(V2->U));
    *(V2->Y)=Flow;
    ModifyOfPotentials(V2);
    OrderStudiedTree(V2,J);
    J=V2;
    Solve();
}; // End of Transshipment::Perturb

```

Рис. 15. Метод Transshipment::Perturb

```

void Transportation::Perturb(
    unsigned IV1,
    unsigned IV2){
    TNode* V1=Tree+IV1;
    TNode* V2=Tree+NSup+IV2;
    Reroot(V1); Root=V1;
    J=V1;
    if(V1!=V2->P) { // CorrectBasisTree
        FIncr=Large;
        TNode* Out=LookForOutgoingArc(false,V2);
        TNode* V=V2;
        while(V!=J){ *(V->Y)+=FIncr; V=V->P; };
        if(*(Out->Y)!=0) (Out->A->K)--(Out->A->K);
        Decompose(Out);
        Reroot(V2);
    }

    Compose(V1,V2);
    *(V2->Y)=-FIncr;
    V2->A=&FictArc;
    }; // end of CorrectBasisTree

    // CorrectData
    TArc* A=PArc[IV1]+IV2;
    if((A->K)<0) *(V2->Y)+=(A->K);
    A->K=CapacityOfArc(IV1,IV2);
    A->C=PriceOfArc(IV1,IV2);
    CIncr=-Large-*(V2->U);
    ModifyOfPotentials(V2);
    OrderStudiedTree(V2,J);
    J=V2;
    Solve();
}; // End of Transportation::Perturb

```

Рис. 16. Метод Transportation::Perturb

являются изученными, а неизученным является только само базисное дерево. Поэтому переменная J устанавливается равной V2, т.е. последнему собственному поддереву текущего базисного дерева.

Заключение

Рассмотренные процедуры ведущего преобразования и упорядоченного изучения базисного дерева в схеме симплекс-алгоритма для задач транспортного типа существенно сокращают число проверок условия оптимальности. Приведенный в работе исходный текст абстрактного класса `transport` и классов `Transshipment` и `Transportation`, предназначенных для решения и постоптимизационного анализа транспортных задач соответственно в сетевой и матричной постановках, дает эффективную технику программной реализации потоковых алгоритмов.

Литература

1. Dantzig, G. Application of the Simplex Method to a Transportation Problem / G. Dantzig // *Activity Analysis of Production and Allocation*. – 1951. – P. 196 – 218.
2. Glickman, S. Coding in Transportation Problem / S. Glickman, J. Jonson, L. Eselson // *Naval Research Logistics Quar.* – 1960. – V. 7, № 2. – P. 169.
3. Fulkerson, D. An Out-of-Kilter Method for Minimal-Cost Flow Problems / D. Fulkerson // *SIAM J. of Applied Mathematics* – 1961. – V. 9, № 1. – P. 1 – 18.
4. Форд, Л. Потоки в сетях / Л. Форд, Д. Фалкерсон. – М.: Мир, 1962. – 276 с.
5. Dantzig, G. *Linear Programming and Extensions* / G. Dantzig. – Princeton: University, 1963. – 215 p.
6. Гольштейн, Е.Г. Новые направления в линейном программировании / Е.Г. Гольштейн, Д.Б. Юдин. – М.: Сов. радио, 1966. – 524 с.
7. Jonson, J. Networks and Basic Solutions / J. Jonson // *Operations. Res.* – 1966. – V.14. – P. 619 – 623.
8. Glover, F. Implementation and Computational Comparisions of Primal, Dual and Primal-Dual Computer Codes for Minimum Cost Network Flow Problems/ F. Glover, D. Karney, D. Klingman // *Networks*. – 1974. – V. 4, № 3. – P. 191 – 212.
9. A Computational Study on start procedures basis change criteria, and solution algorithms for transportation problems / F. Glover, D. Karney, D. Klingman, A. Napier // *Manage. Sci.* – 1974. – Vol.20, № 5.– P. 793 – 813.
10. Bradley, G.H. Design and Implemetation of Large Scale Primal Transshipment Algorithms / G.H. Bradley, G.G. Brown, G.W. Graves // *Manage. Sci.* – 1977. – Vol.24, № 1. – P. 1 – 34.
11. Barr, R. Enhancements of Spanning Tree Labeling Procedures for Network Optimization / R. Barr, F. Glover , D. Klingman // *INFOR.* – 1979. – V. 17, № 1. – P. 16 – 34.
12. Ahrens, J.H. Primal Transportation and Transshipment Algorithms / J.H. Ahrens, G. Finke // *Z. Oper. Res.* – 1980. – V.24, № 1. – P. 1 – 32.
13. Armstrong, R. D. Implementation and Analisis of a Variant of Dual Method for the Capacitated transshipment Problem / R.D. Armstrong, D. Klingman, D. Whitman // *European J. Oper. Res.* – 1980. – V.4, № 6. – P. 403 – 420.
14. Панюков, А.В. Алгоритм локальной оптимизации для задачи размещения прямоугольных объектов с минимальной длиной связывающей их сети / А.В. Панюков // *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.* – 1981. – № 6. – С. 180 – 184.

15. Панюков, А.В. Метод решения возмущенной транспортной задачи на сети / А.В. Панюков // Методы и программы решения оптимизационных задач на графах и сетях. Часть 2: Теория, алгоритмы: тез. докл. II Всес. совещания; Улан-Удэ, август, 1982. – Новосибирск, 1982. – С. 113 – 114.
16. Гловер, Ф. Последние достижения в технике реализации сетевых потоковых алгоритмов / Ф. Гловер, Д. Клингман // Экономико-оптимизационные задачи большой размерности: труды сов.-американ. семинара. США, 1980. – М., 1983. – С. 180 – 209.
17. Панюков, А.В. Повышение эффективности прямых алгоритмов построения потока минимальной стоимости в насыщенной сети / А.В. Панюков // Системы программного обеспечения задач оптимального планирования: VIII Всес. симп: тез. докл. Нарва-Йыесуу, апрель, 1984. – М., 1984. – С. 153 – 154.
18. Йенсен, П. Потокное программирование / П. Йенсен, Д. Барнес – М.: Радио и связь, 1984. – 391 с.
19. Galil, Z. An $O(n^2(m + n \log n) \log n)$ min-cost flow algorithm / Z. Galil, E. Tardos // 27th Annu. Symp. Found. Comput. Sci., Toronto, Oct. 27 – 29, 1986. – P. 1 – 9.
20. Goldberg, A.V. Combinatorial algorithms for the generalized circulation problem / A.V. Goldberg, S.A. Plotkin, E. Tardos // Math. Oper. Res. – 1991. – Vol.16, № 2. – P. 351 – 381.
21. Orlin, J. B. Polynomial dual network simplex algorithms / J.B. Orlin, S.A. Plotkin, E. Tardos // Math. Program. – 1993. Vol. 60A, № 3. P. 255 – 276.
22. Panyukov, A.V. The Study of Basis Tree for Primal Transshipment Algorithms / A.V. Panyukov // CO94, Amsterdam, the Netherlands, April 5 – 8, 1994. Program&Abstracts.
23. Kleinschmidt, P. A Strongly Polynomial Algorithm for the Transportation Problem / P. Kleinschmidt, H. Schannath // Mathematical Programming. – 1995. – Vol. 68, № 1. – P. 1 – 13.
24. Панюков, А.В. Упорядоченное изучение базисного дерева в прямых алгоритмах для транспортной задачи / А.В. Панюков // Международная Сибирская конференция по исследованию операций: материалы конф. – Новосибирск, 1998. – С. 44.
25. Панюков, А.В. Задача размещения прямоугольных объектов с минимальной стоимостью связывающей сети / А.В. Панюков // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. – Том 8, № 1. – 2001. – С. 70 – 87.
26. Панюков, А.В. Способ генерации должностных инструкций и положений о подразделениях // А.В. Панюков, В.А. Телегин // III Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения»: материалы конф. (Омск, 11 – 15 июля 2006 г.) / Омский филиал Ин-та математики им. С.Л. Соболева СО РАН. – Омск, 2006. – С. 185.

Кафедра экономико-математических методов и статистики,
Южно-Уральский государственный университет
pav@susu.ac.ru

Поступила в редакцию 20 июня 2008 г.

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ САМОСОПРЯЖЕННОГО ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА

А.И. Седов

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE INVERSE SPECTRAL ANALYSIS PROBLEM FOR A SELF-ADJOINT DISCRETE OPERATOR

A.I. Sedov

Приведены достаточные условия налагаемые на последовательность комплексных чисел, для которой существует возмущенный дискретный оператор такой, что его спектр совпадает с данной последовательностью.

Ключевые слова: обратная спектральная задача, собственные числа, ядерный оператор, возмущение

The author introduces sufficient conditions prescribed for the consecutive order of the complex numbers, for which such a discrete operator exists which spectrum coincides with the given consecutive order.

Keywords: inverse spectral problem, eigenvalue, kernel operator, perturbation

Пусть дискретный самосопряженный полуограниченный снизу оператор T с ядерной резольвентой действует в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Предположим, что спектр оператора $\sigma(T)$, простой и занумерован собственные числа оператора λ_n в порядке возрастания $n = 0, \infty$. Через v_n обозначим соответствующие λ_n ортонормированные в H собственные функции.

Рассмотрим следующую обратную задачу спектрального анализа: для данной последовательности $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ мало отличающейся, в некотором смысле, от последовательности $\{\lambda_n\}$ доказать существование и единственность такого оператора, что его спектр совпадает с данной последовательностью $\{\xi_n\}$.

Будем искать этот оператор в виде суммы $T + P$, где P — оператор умножения на функцию $p \in H$ действующий в H . Обозначим: $r_n = \frac{1}{2} \min\{\lambda_{n+1} - \lambda_n; \lambda_n - \lambda_{n-1}\}$, $r_0 = \inf_n r_n$, $\gamma_n = \{\lambda : |\lambda_n - \lambda| = r_n\}$, $\Omega_n = \{\lambda : |\lambda_n - \lambda| \geq r_n\}$, $\Omega = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n$.

Лемма 1. Пусть $\|P\| < r/2$, где $0 < r \leq r_0$, тогда оператор $T + P$ — дискретен и его собственные числа μ_n имеют такую же кратность, что и λ_n , причем

(i) если $R_0(\lambda) \in \mathfrak{S}_q$, то $R(\lambda) \in \mathfrak{S}_q$, $1 \leq q < \infty$,

(ii) если $\lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \Omega_r$, то $\mu_n \in \mathbb{C} \setminus \Omega_r$,

где R_0 и R резольвенты операторов T и $T + P$ соответственно.

Доказательство. Рассмотрим очевидное операторное тождество, справедливое при всех $\lambda \in \Omega$:

$$T + P - \lambda E = (E + PR_0(\lambda))(T - \lambda E).$$

Так как $\|R_0(\lambda)\| = \frac{1}{d(\lambda, \sigma(T))}$, то $\|PR_0(\lambda)\| < \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{r_n} \leq \frac{1}{2}$. Значит существует линейный ограниченный в H оператор $(E + PR_0(\lambda))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (PR_0(\lambda))^k$, причем ряд сходится по норме равномерно по $\lambda \in \Omega$ и $\|(E + PR_0(\lambda))^{-1}\| \leq 2$.

Тогда всюду на Ω существует линейный ограниченный оператор

$$R(\lambda) = (T + P - \lambda E)^{-1} = R_0(\lambda)(E + PR_0(\lambda))^{-1}. \quad (1)$$

Отсюда следует, что оператор $R(\lambda) \in \mathfrak{S}_q$, и для него справедливо разложение в сходящийся по норме ряд

$$R(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k R_0(\lambda)(PR_0(\lambda))^k, \quad \lambda \in \Omega. \quad (2)$$

Так как $R(\lambda)$ — компактный оператор в H , то оператор $T + P$ дискретен.

Норма разности проекторов Рисса, при любом $n \in \mathbb{N}$

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} (R(\lambda) - R_0(\lambda)) d\lambda \right\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_n} \|R(\lambda)\| \cdot \|PR_0(\lambda)\| |d\lambda| < \frac{1}{2\pi} 2\pi r_n \frac{2}{2r_n - r} \frac{r}{2r_n} \leq \frac{r}{r_n} \leq 1, \quad (3)$$

поэтому все корневые подпространства оператора $T + P$ имеют такую же размерность, как и у оператора T .

Кроме того, если $\lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \Omega_n$, то $\mu_n \in \mathbb{C} \setminus \Omega_n$. □

Рассмотрим операторное тождество

$$R(\lambda) = R_0(\lambda) - R_0(\lambda)PR_0(\lambda) + R(\lambda)(PR_0(\lambda))^2, \quad \lambda \in \Omega.$$

Умножим его на $\frac{\lambda}{2\pi i}$, проинтегрируем по контуру γ_n и найдем след. В итоге получим следующее утверждение.

Теорема 1. $\|P\| < \frac{r_n}{2}$, то имеет место спектральное тождество

$$\mu_n = \lambda_n + (Pv_n, v_n) + \alpha_n(p), \quad (4)$$

где $\alpha_n(p) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \lambda \operatorname{Sp} [R(\lambda)(PR_0(\lambda))^2] d\lambda$.

Лемма 2. Если $\|P_j\| \leq r/2$, $0 < r \leq r_0$, $j = 1, 2$, то

$$|\alpha_n(p_1) - \alpha_n(p_2)| \leq rr_n \|P_1 - P_2\| \max_{\lambda \in \gamma_n} \|R_0(\lambda)\|_2^2,$$

где $\|\cdot\|_2$ — норма Гильберта-Шмидта.

Доказательство. Введем обозначение $R_j(\lambda) = (T + P_j - \lambda E)^{-1}$, $j = 1, 2$.

Умножая ряд (2) на $(P_j R_0(\lambda))^2$, получим

$$R(\lambda)(P_j R_0(\lambda))^2 = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k R_0(\lambda)(P_j R_0(\lambda))^k, \quad \lambda \in \Omega.$$

Обозначив через $\alpha_n^{(k)}$ k -ю поправку:

$$\alpha_n^{(k)}(p) = \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \lambda \operatorname{Sp} [R_0(\lambda)(PR_0(\lambda))^k] d\lambda = \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi i k} \int_{\gamma_n} \operatorname{Sp} [PR_0(\lambda)]^k d\lambda,$$

из (4) получим $\alpha_n(p) = \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_n^{(k)}(p)$.

Оценим разности k -х поправок, $k \geq 2$.

$$\begin{aligned} |\alpha_n^{(k)}(p_1) - \alpha_n^{(k)}(p_2)| &= \frac{1}{2\pi k} \left| \int_{\gamma_n} \text{Sp} \left[(P_1 R_0(\lambda))^k - (P_2 R_0(\lambda))^k \right] d\lambda \right| \leq \\ &\frac{r_n}{k} \max_{\lambda \in \gamma_n} \left\| (P_1 R_0(\lambda))^k - (P_2 R_0(\lambda))^k \right\|_1 \leq \\ &\frac{r_n}{k} \max_{\lambda \in \gamma_n} \left\| \sum_{s=0}^{k-1} (P_2 R_0(\lambda))^s (P_1 - P_2) R_0(\lambda) (P_1 R_0(\lambda))^{k-s-1} \right\|_1 = \\ &\frac{r_n}{k} \max_{\lambda \in \gamma_n} \left(\sum_{s=0}^{k-1} \|P_1 - P_2\| \left(\frac{r}{2}\right)^{k-1} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \|R_0(\lambda)\|^{k-2} \right) = \\ &r_n \|P_1 - P_2\| \left(\frac{r}{2}\right)^{k-1} \max_{\lambda \in \gamma_n} \left(\|R_0(\lambda)\|_2^2 \|R_0(\lambda)\|^{k-2} \right). \end{aligned}$$

Далее оценим модуль разности:

$$\begin{aligned} |\alpha_n(p_1) - \alpha_n(p_2)| &\leq r_n \|P_1 - P_2\| \frac{r}{2} \max_{\lambda \in \gamma_n} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{2}\right)^k \max_{\lambda \in \gamma_n} \|R_0(\lambda)\|^k \leq \\ &rr_n \|P_1 - P_2\| \max_{\lambda \in \gamma_n} \|R_0(\lambda)\|_2^2. \quad \square \end{aligned}$$

Разложим v_n^2 по ортонормированному базису $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$. Тогда $v_n^2 = \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk} \varphi_k$. Отсюда получаем $(Pv_n, v_n) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk} p_k$, где p_k — коэффициенты Фурье функции p в базисе $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$. Перепишем (4): $\mu_n - \lambda_n - \alpha_n(p) = (Pv_n, v_n)$ и обозначим: $a_n = \mu_n - \lambda_n - \alpha_n(p)$,

$$A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad C = (c_{ij})_{i,j=0}^{\infty}.$$

Тогда основное спектральное тождество (4) запишется в матричной форме $A = CP$. Обозначим элементы обратной матрицы C^{-1} через c_{ij}^- .

Следующая теорема является обобщением результатов работ [1 – 2].

Теорема 2. Если матрица C обратима и для нее выполняется неравенство:

$$\frac{r}{\|1\|_H} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{nk}^- r_k \max_{\lambda \in \gamma_k} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \omega < 1,$$

то для любой комплексной последовательности $\{\xi_n\}$ удовлетворяющей неравенству:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{nk}^- |\xi_k - \lambda_k| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{r}{2} (1 - \omega),$$

существует функция $p \in H$, такая, что $\sigma(T + P) = \{\xi_n\}$.

Доказательство. В пространстве H рассмотрим уравнение относительно p :

$$p = \alpha_0 - \alpha(p), \quad (5)$$

где

$$\alpha_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk}^- (\xi_k - \lambda_k) \varphi_n, \quad (6)$$

$$\alpha(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk}^- \alpha_k(p) \varphi_n. \quad (7)$$

Введем оператор $A : H \rightarrow H$, определяемый равенством: $Ap = \alpha_0 - \alpha(p)$. Так как $\|Ap\|_H \leq \|\alpha_0\|_H + \|\alpha(p)\|_H \leq \frac{r}{2}(1 - \omega) + \frac{r}{2}\omega = \frac{r}{2}$, то оператор A отображает замкнутый шар $U(0, \frac{r}{2})$ в себя. Покажем, что оператор A сжимающий в этом подпространстве.

$$\begin{aligned} \|Ap_1 - Ap_2\|_H &= \|\alpha(p_1) - \alpha(p_2)\|_H = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk}^- (\alpha_k(p_1) - \alpha_k(p_2)) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |c_{nk}^-| |\alpha_k(p_1) - \alpha_k(p_2)| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &r \|P_1 - P_2\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |c_{nk}^-| r_k \max_{\lambda \in \gamma_k} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \omega \|p_1 - p_2\|_H. \end{aligned}$$

По принципу С. Банаха уравнение (5) имеет единственное решение p .

Определим оператор P , действующий в H , следующим образом: $Pv(x) = p(x)v(x)$, где p — решение уравнения (5). Оператор P удовлетворяет условиям леммы 1, поэтому оператор $T + P$ имеет дискретный спектр $\sigma(T + P) = \{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$. Кроме того, для этого оператора выполняется основное спектральное тождество (4).

Литература

1. Седов, А.И. Обратная задача спектрального анализа для одного дифференциального оператора в частных производных с неядерной резольventой / А.И. Седов, В.В. Дубровский // Электромагнитные волны & электронные системы. – 2005. – Т. 10, № 1 – 2. – С. 1 – 8.
2. Седов, А.И. О существовании и единственности решения обратной задачи спектрального анализа для степени оператора Лапласа на параллелепипеде / А.И. Седов, Г.А. Закирова // Вестник МаГУ. Математика. – 2006. – № 9. – С. 145 – 149.

Кафедра математических методов в экономике,
Магнитогорский государственный университет,
sedov@masu.ru

Поступила в редакцию 10 сентября 2008 г.

О ЛОКАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАМЯТЬЮ

В.Е. Федоров, О.А. Стахеева

ON LOCAL SOLVABILITY OF LINEAR EVOLUTIONARY EQUATIONS WITH MEMORY

V.E. Fedorov, O.A. Stakheeva

Доказана локальная однозначная разрешимость задачи Коши для линейного эволюционного уравнения с секториальным оператором и с интегральным оператором памяти в банаховом пространстве. Результат работы проиллюстрирован на примере начально-краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения с частными производными.

Ключевые слова: эволюционное уравнение, интегро-дифференциальное уравнение, уравнение с памятью, секториальный оператор, аналитическая полугруппа операторов

The authors prove the local unique solvability of the Cauchy problem for linear evolutionary equation with sectorial operator and with integral memory operator in the Banach space. The result is illustrated on the example of the initial boundary value problem for integro-differential equation with partial derivatives.

Keywords: evolutionary equation, integro-differential equation, equation with memory, sectorial operator, analytic semigroup of operators

Введение

Задача Коши для эволюционных уравнений является абстрактной формой начально-краевых задач для уравнений в частных производных, в естественных и технических науках часто описывающих различные процессы [1 – 3]. При этом часто встречаются системы с памятью, поведение которых не определяется целиком состоянием в настоящий момент, а зависит от всей «истории» системы (см. по этому поводу [4]).

В данной работе рассмотрена задача Коши для абстрактного линейного эволюционного уравнения с памятью в банаховом пространстве. С помощью принципа сжимающих отображений доказана однозначная локальная разрешимость этой задачи в смысле классических решений. Полученный результат использован при исследовании начально-краевой задачи для параболического интегро-дифференциального уравнения с памятью.

В перспективе результаты работы позволят с одной стороны перейти к рассмотрению полулинейных эволюционных уравнений с памятью, а с другой стороны – исследовать уравнения соболевского типа с памятью.

1. Предварительные сведения

В этом параграфе изложены используемые при получении основного результаты факты из классической теории полугрупп операторов (см. [1]).

Обозначим через $\rho(A)$ резольвентное множество оператора A , а через $\sigma(A)$ – его спектр.

Определение 1. Будем называть линейный замкнутый плотно определенный оператор A в банаховом пространстве X *секториальным*, если существуют константы $a \in \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{R}_+$ и $\Theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ такие, что сектор

$$S_{a,\Theta}(A) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \Theta, \mu \neq a\} \subset \rho(A),$$

причем

$$\|(\mu - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{K}{|\mu - a|} \quad \forall \mu \in S_{a,\Theta}(A).$$

Замечание 1. В монографии [1] оператор A называется секториальным, если условиям определения 1 удовлетворяет оператор $-A$. Авторы данной работы будут придерживаться более удобных для них формулировок.

Определение 2. *Аналитическая полугруппа* в банаховом пространстве X – это семейство непрерывных линейных операторов $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ в X , удовлетворяющее условиям:

1. $T(0) = I$, $T(t)T(s) = T(t + s)$ для $t \geq 0, s \geq 0$.
2. $T(t)x \rightarrow x$ при $t \rightarrow 0+$ для $\forall x \in X$.
3. Отображение $t \mapsto T(t)x$ аналитически продолжимо в некоторую область, содержащую множество $\{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$ для всех $x \in X$.

Инфинитезимальный генератор L этой полугруппы определяется следующим образом:

$$Lx = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t}(T(t)x - x).$$

Его область определения $D(L)$ состоит из всех $x \in X$, для которых этот предел в X существует. Будет использоваться обозначение $T(t) = e^{Lt}$.

Теорема 1. Если A – секториальный оператор, то A – инфинитезимальный генератор аналитической полугруппы $\{e^{At}\}_{t \geq 0}$, где

$$e^{At} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda,$$

Γ – контур в $\rho(A)$, такой что $\arg \lambda \rightarrow \pm\Theta$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$. При этом e^{At} можно аналитически продолжить в сектор $\{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \varepsilon\}$, содержащий положительную вещественную полуось, и

$$\exists C > 0 \quad \forall t > 0 \quad \|e^{At}\| \leq C e^{at}, \quad \|Ae^{At}\| \leq \frac{C}{t} e^{at}.$$

Наконец,

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} \quad \forall t > 0.$$

Определение 3. Пусть $-A$ – секториальный оператор, $\operatorname{Re} \mu > 0$ при всех $\mu \in \sigma(A)$. Положим для любого $\alpha > 0$

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-At} dt, \quad D(A^\alpha) = R(A^{-\alpha}), \quad A^\alpha = (A^{-\alpha})^{-1},$$

A^0 – тождественный оператор в X .

Теорема 2. Если $-A$ – секториальный оператор в X , $\operatorname{Re} \mu > 0$ при всех $\mu \in \sigma(A)$, то для любого $\alpha > 0$ оператор $A^{-\alpha}$ есть ограниченный линейный оператор в X , инвективный и удовлетворяющий соотношениям $A^{-\alpha}A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}$ при $\alpha > 0, \beta > 0$.

Теорема 3. Пусть $-A$ – секториальный оператор, $\inf\{\operatorname{Re} \mu : \mu \in \sigma(A)\} > \delta > 0$. Тогда

$$\forall \alpha \geq 0 \quad \exists C_\alpha > 0 \quad \forall t > 0 \quad \|A^\alpha e^{-At}\| \leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}.$$

Если при этом $0 < \alpha \leq 1, x \in D(A^\alpha)$, то

$$\forall t > 0 \quad \|(e^{-At} - I)x\| \leq \frac{C_{1-\alpha} t^\alpha}{\alpha} \|A^\alpha x\|.$$

Определение 4. Пусть A – секториальный оператор в банаховом пространстве X , $A_1 = aI - A$, где $a > \sup\{\operatorname{Re} \mu : \mu \in \sigma(A)\}$. Для каждого $\alpha \geq 0$ положим $X^\alpha = D(A_1^\alpha)$ и наделим пространство X^α нормой графика $\|x\|_\alpha = \|A_1^\alpha x\|, x \in X^\alpha$.

Теорема 4. Если A – секториальный оператор в банаховом пространстве X , то X^α – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_\alpha$ для $\alpha \geq 0$, причем $X^0 = X$. Для $\alpha \geq \beta \geq 0$ пространство X^α есть плотное подпространство в X^β , причем, соответствующее вложение непрерывно. Если A имеет компактную резольвенту, то вложение $X^\alpha \subset X^\beta$ компактно при $\alpha > \beta \geq 0$.

2. Эволюционное уравнение с памятью

Пусть X – банахово пространство, $\mathcal{X}(T) = C([0, T]; X)$, $\|u\|_{\mathcal{X}(T)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X$.

Оператор $(Ju)(t)$ имеет вид

$$(Ju)(t) = \int_0^\infty k(s)u(t-s)ds = \int_0^t k(s)u(t-s)ds + \int_0^\infty k(t+s)u_-(-s)ds,$$

где u_- – заданная на \mathbb{R}_- функция, описывающая «историю» системы. Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \in X \tag{1}$$

для эволюционного уравнения с памятью

$$\dot{u}(t) = Au(t) + (Ju)(t). \tag{2}$$

Ее решением на отрезке $[0, T]$ называется функция $u \in C^1((0, T]; X) \cap C([0, T]; X)$, удовлетворяющая условию (1) и уравнению (2).

Основным результатом данной работы является доказательство однозначной локальной разрешимости этой задачи.

Теорема 5. Пусть A – секториальный оператор, $\operatorname{Re} \mu < 0$ для всех $\mu \in \sigma(A)$, $u_- \in L_1(\mathbb{R}_-; X)$, $k \in L_1(\mathbb{R}_+)$. Если

$$\exists N > 0 \quad \forall t, s \geq 0 \quad |k(t) - k(s)| \leq N|t - s|,$$

то при некотором $T > 0$ существует единственное решение задачи (1), (2) на отрезке $[0, T]$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\dot{u}(t) = Au(t) + g(t). \quad (3)$$

Положим

$$g_0 = \int_0^\infty k(s)u_-(-s)ds \in X, \quad 0 < \delta < 1,$$

$$B(T) = \{g \in \mathcal{X}(T) : g(0) = g_0, \|g\|_{\mathcal{X}(T)} \leq \|g_0\|_X + 1, \|g(t) - g(s)\|_X \leq N_1|t - s|^\delta \forall s, t \in [0, T]\}.$$

При $g \in B(T)$ решение задачи Коши (1) для уравнения (3) имеет вид

$$u(t) = e^{At}u_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}g(s)ds, \quad (4)$$

поэтому в силу теоремы 1

$$\|u(t)\| \leq C\|u_0\|_X + Ct(\|g\|_{\mathcal{X}(T)} + 1) = K_1 + K_2t \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5)$$

Далее, при $t > s > 0$, применяя теорему 3, получим

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(s)\|_X &\leq \|(e^{A(t-s)} - I)e^{As}u_0\|_X + \\ &+ \int_0^s \|(e^{A(t-s)} - I)e^{A(s-\tau)}g(\tau)\|_X d\tau + \int_s^t \|e^{A(t-\tau)}g(\tau)\|_X d\tau \leq \\ &C_\delta C_{1-\delta} s^{-\delta} (t-s)^\delta \|u_0\|_X + C_\delta C_{1-\delta} (t-s)^\delta \|g\|_{\mathcal{X}(T)} \int_0^s \frac{d\tau}{(s-\tau)^\delta} + \\ &+ C(t-s)\|g\|_{\mathcal{X}(T)} \leq K_3(t-s)^\delta s^{-\delta}, \quad (6) \\ K_3 &= C_\delta C_{1-\delta} \|u_0\|_X + \left(\frac{C_\delta C_{1-\delta}}{1-\delta} + C \right) (\|g_0\|_X + 1)T. \end{aligned}$$

Определим на $B(T)$ оператор

$$[\Phi g](t) = \int_0^\infty k(s)u(t-s)ds,$$

где функция u определяется функцией g из задачи (1), (3) по формуле (4). Имеем очевидное равенство $[\Phi g](0) = g_0$. Далее, используя неравенство (5), получим

$$\begin{aligned} \|[\Phi g](t)\|_X &\leq \int_0^t |k(s)| \cdot \|u(t-s)\|_X ds + \int_0^\infty |k(t+s) - k(s)| \cdot \|u_-(-s)\|_X ds + \|g_0\|_X \leq \\ &\leq \max_{0 \leq s \leq T} |k(s)| \left(K_1 t + K_2 \frac{t^2}{2} \right) + Nt \|u_-\|_{L_1(\mathbb{R}_-; X)} + \|g_0\|_X \leq \\ &\leq \|k\|_{C(\mathbb{R}_+)} C (\|u_0\|_X T + (\|g_0\|_X + 1)T^2) + NT \|u_-\|_{L_1(\mathbb{R}_-; X)} + \|g_0\|_X \leq \|g_0\|_X + 1, \end{aligned}$$

при значении T , меньшем каждой из констант $(3C\|u_0\|_X\|k\|_{C(\mathbb{R}_+)})^{-1}$, $(3C(\|g_0\|_X + 1)\|k\|_{C(\mathbb{R}_+)})^{-\frac{1}{2}}$, $(3N\|u_-\|_{L_1(\mathbb{R}_-; X)})^{-1}$. Здесь использован также тот факт, что гельдерова функция непрерывна, а непрерывная вплоть до нуля функция класса $L_1(\mathbb{R}_+)$ является ограниченной.

Кроме того, в силу неравенства (6) при $t' > t$

$$\begin{aligned} \|[\Phi g](t) - [\Phi g](t')\|_X &\leq \int_t^{t'} |k(s)| \|u(t-s)\|_X ds + \int_0^t |k(s)| \|u(t'-s) - u(t-s)\|_X ds + \\ &+ \int_0^\infty |k(t'+s) - k(t+s)| \|u_-(s)\|_X ds \leq -\|k\|_{C(\mathbb{R}_+)} \left(K_1(t'-s) + \frac{K_2}{2}(t'-s)^2 \right) \Big|_t^{t'} - \\ &- \|k\|_{C(\mathbb{R}_+)} K_3(t-t)^\delta \frac{(t-s)^{1-\delta}}{1-\delta} \Big|_0^t + N(t-t) \|u_-\|_{L_1(\mathbb{R}_-; X)} \leq K_4(t'-t)^\delta. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем действие оператора $\Phi : B(T) \rightarrow B(T)$ при выбранном T .

Для произвольных функций $g_1, g_2 \in B(T)$ выполняется

$$\begin{aligned} \|[\Phi g_1](t) - [\Phi g_2](t)\|_X &\leq \int_0^t k(s) ds \int_0^{t-s} \|e^{A(t-s-\tau)} [g_1(\tau) - g_2(\tau)]\|_X d\tau \leq \\ &\leq C \|g_1 - g_2\|_{\mathcal{X}(T)} \int_0^t (t-s) k(s) ds \leq C \|k\|_{C(\mathbb{R}_+)} \|g_1 - g_2\|_{\mathcal{X}(T)} \frac{T^2}{2}. \end{aligned}$$

Поэтому, если помимо вышеупомянутых ограничений на T будет выполняться неравенство $T < \sqrt{\frac{2}{C\|k\|_{C(\mathbb{R}_+)}}}$, то на соответствующем полном метрическом пространстве $B(T)$ с метрикой, порожденной sup -нормой, Φ — сжимающий оператор. Следовательно, по теореме о сжимающем отображении найдется единственный элемент $g_1 \in B(T)$, такой что $g_1 = \Phi g_1$. В этом случае функция

$$u(t) = e^{At} u_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} g_1(s) ds$$

является одновременно решением задач (1), (2) и (1), (3), так как $g_1(t) = (Ju)(t)$.

С другой стороны, если v — решение задачи (1), (2), то нетрудно показать, что $g(t) = (Jv)(t)$ — неподвижная точка оператора Φ , лежащая в шаре $B(T)$. Отсюда следует единственность решения задачи (1), (2). \square

Замечание 2. Все ограничения на T определялись только оператором A , значением u_0 и функциями k и u_- .

Замечание 3. Если требовать непрерывности изменения процесса, описываемого задачей (1), (2), то необходимо в условия теоремы добавить требования $u_- \in L_1(\mathbb{R}_-; X) \cap C(\mathbb{R}_-; X)$, $u_-(0) = u_0$, где $\mathbb{R}_- = \mathbb{R}_- \cup \{0\}$.

3. Пример

В качестве примера применения полученного абстрактного результата рассмотрим начально-краевую задачу

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (7)$$

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad (8)$$

для параболического интегро-дифференциального уравнения с памятью

$$u_t(x, t) = \Delta u(x, t) + \int_0^\infty k(s)u(x, t-s)ds, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (9)$$

в цилиндре $\Omega \times [0, T]$, где ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет гладкую границу. В пространстве $X = L_2(\Omega)$ оператор $Au = \Delta u$ с областью определения

$$D(A) = \{u \in H^2(\Omega) : u(x) = 0, x \in \partial\Omega\},$$

как известно [1], является секториальным, причем $\operatorname{Re} \mu < 0$ при всех $\mu \in \sigma(A)$. Поэтому, задав гельдерову на $\overline{\mathbb{R}}_+$ функцию $k \in L_1(\mathbb{R}_+)$ и такую функцию $u_-(x, t)$, что $u_- \in L_1(\mathbb{R}_-; L_2(\Omega))$, получим существование единственного решения $u \in C^1((0, T]; L_2(\Omega)) \cap C([0, T]; L_2(\Omega))$ задачи (7) – (9) при достаточно малом $T > 0$.

Работа проводилась при финансовой поддержке РФФИ, грант №07-01-96030-р_урал_а

Литература

1. Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. – М.: Мир, 1985.
2. Favini, A. Degenerate differential equations in Banach spaces / A. Favini, A. Yagi. – New York; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker Inc., 1999.
3. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston: VSP, 2003.
4. Grasselli, M. Uniform attractors of nonautonomous dynamical systems with memory / M. Grasselli, V. Pata. – In the book: Progress in nonlinear differential equations and their applications. Basel: Birkhäuser Verlag, 2002. – Vol. 50. – P. 155 – 178.

Кафедра математического анализа,
Челябинский государственный университет
kar@csu.ru

Поступила в редакцию 18 сентября 2008 г.

ОРГАНИЗАЦИЯ БРОКЕРА РЕСУРСОВ В СИСТЕМЕ CAEBEANS

А.В. Шамакина

ORGANIZATION OF THE RESOURCES BROKER IN THE CAEBEANS SYSTEM

A. V. Shamakina

Представлена организация брокера ресурсов в системе CAEBEANS. Технология CAEBEANS предназначена для построения иерархии проблемно-ориентированных грид-оболочек CAEBEANS над инженерными пакетами. Дано описание алгоритма работы брокера ресурсов. Представлены структура XML-запросы CAEBEANS Server к брокеру ресурсов и алгоритмы планирования.

Ключевые слова: CAE, CAEBEAN, грид-оболочка, сервисно-ориентированная архитектура, системный слой, брокер ресурсов

We present the organization of resources broker in the CAEBEANS system. The CAEBEANS is destined for problem-oriented grid-shells hierarchy building over the CAE. We describe the algorithm of work of the resource broker. We consider the structure of XML-queries from the CAEBEANS Server to the resource broker and algorithms of planning.

Keywords: CAE, CAEBEAN, grid-shell, service-oriented architecture, system layer, resources broker

Введение

В настоящее время все большее распространение получают глобальные вычислительные сети Grid. Они были предложены в качестве новой парадигмы для решения крупномасштабных вычислительных задач в науке, технике и бизнесе. Это связано с тем, что сети Grid дают возможность одновременного использования миллионов вычислительных ресурсов, принадлежащих различным организациям и расположенных в различных административных областях. Системы Grid объединяют разнородные вычислительные ресурсы (персональные компьютеры, рабочие станции, кластеры, суперкомпьютеры), используя разные стратегии доступа к ним, выполняя различные приложения (научные, инженерные и коммерческие), предъявляющие к системе различные требования. Ресурсы принадлежат различным организациям, имеющим свои правила управления ресурсами, их использования и определения их стоимости для различных пользователей в различное время. Доступность и загруженность ресурсов также может динамически изменяться во времени.

В окружении Grid владельцы и потребители ресурсов имеют различные цели, используют различные стратегии и экономические схемы регулирования спроса и предложения. Таким образом, актуальной проблемой является разработка систем управления ресурсами Grid, нацеленных на оптимизацию отношений между владельцами

ресурсов и пользователями в соответствии с выбранными ими стратегиями [1]. Для решения этой проблемы создаются системы управления ресурсами Grid [2].

Однако ни одна из ранее созданных систем управления ресурсами не удовлетворяет специфике системы CAEBeans [3, 4], в рамках которой необходимо учитывать не только характеристики ресурсов, но и наличие установленных инженерных пакетов, количество доступных лицензий на них и др. В системе CAEBeans в качестве Grid Middleware был выбран Unicore 6.0 [5].

Брокер ресурсов принимает задания от CAEBeans Server, согласовывает требования к ресурсам и направляет задания на подходящий вычислительный элемент. Можно выделить следующие основные задачи брокера ресурсов: обработка каталога ресурсов грид-среды; анализ запросов на предоставление ресурсов, поступающих от CAEBeans Server; сбор и предоставление информации об актуальном состоянии грид-среды [6]. В работе предложены новый алгоритм работы брокера ресурсов и алгоритмы планирования.

Статья организована следующим образом. В разделе 1 приводится описание основных концепций технологии CAEBeans, рассматриваются основные особенности слоистой архитектуры системы CAEBeans. Раздел 2 посвящен краткому описанию структуры системы CAEBeans. В разделе 3 приведен алгоритм работы брокера ресурсов в системе CAEBeans. В заключении суммируются основные результаты и описаны направления дальнейшей работы.

1. Технология CAEBeans

В работе [7] описана технология CAEBeans, которая ориентирована на инкапсуляцию и предоставление ресурсов CAE-пакетов в рамках грид-среды. В основе данного подхода лежит процесс построения дерева проблемно-ориентированных оболочек CAEBeans над CAE пакетом на основе классификации типовых задач.

Архитектура системы CAEBeans формируется из четырех слоев: концептуального, логического, физического и системного. Каждый слой системы формируется из оболочек CAEBeans соответствующего типа: проблемный, потоковый, компонентный и системный.

Проблемный CAEBean предназначен для взаимодействия пользователя с системой CAEBeans. Посредством пользовательского интерфейса проблемного CAEBean пользователь может произвести постановку инженерной задачи; проследить за ходом решения поставленной задачи; получить требуемые результаты решения.

Потоковый CAEBean реализует логический план решения определенного класса задач компьютерного моделирования. Логический план решения задачи представляет собой ориентированный граф, в вершинах которого могут находиться блоки двух типов: подзадачи, выполняемые отдельными базовыми компонентами и специальные служебные операции управления потоком решения задачи.

Компонентный CAEBean инкапсулирует процесс постановки и решения конкретной подзадачи компьютерного моделирования посредством определенного базового компонента.

Системный CAEBean инкапсулирует функциональные возможности конкретного базового компонента, обеспечивает сервисно-ориентированный подход к постановке задач и получению результатов.

2. Структура системы CAEBeans

Системой CAEBeans будем называть совокупность программных средств, данных и аппаратных ресурсов, ориентированных на поддержку технологии CAEBeans. Программные средства, входящие в систему CAEBeans, должны обеспечить техническую поддержку процессов создания, модификации и использования оболочек CAEBeans. Возможно

выделить следующие основные программные продукты, входящие в состав системы CAEBeans.

- **CAEBeans-портал** – web-портал, предназначенный для постановки пользователями задачи в системе CAEBeans.
- **CAEBeans Server** – web-сервис XML, который обеспечивает выполнение задачи пользователя, отвечает за хранение и интерпретацию CAE-проектов.
- **CAEBeans брокер** – автоматизированная система регистрации, анализа и предоставления ресурсов распределенной вычислительной среды.

На рис. 1 приведены основные компоненты системы CAEBeans. Пользователь проходит аутентификацию на CAEBeans-портале, выбирает необходимый проект из списка доступных для выполнения проектов. Автоматически генерируется web-форма для потокового CAEBeap данного проекта. Пользователь указывает параметры задачи и производит постановку задачи на выполнение. Данные web-формы передаются CAEBeans Server, который находит в своей базе данных проект CAEBeap, соответствующий проблемному CAEBeap пользователя. Затем CAEBeans Server выполняет потоковый CAEBeap из проекта: формирует и делает постановку подзадачи на CAE-ресурс. Для получения ресурсов, необходимых для решения каждой конкретной подзадачи CAEBeans Server взаимодействие с брокером CAEBeans. После получения результатов решения CAEBeans Server передает их пользователю по его запросу.

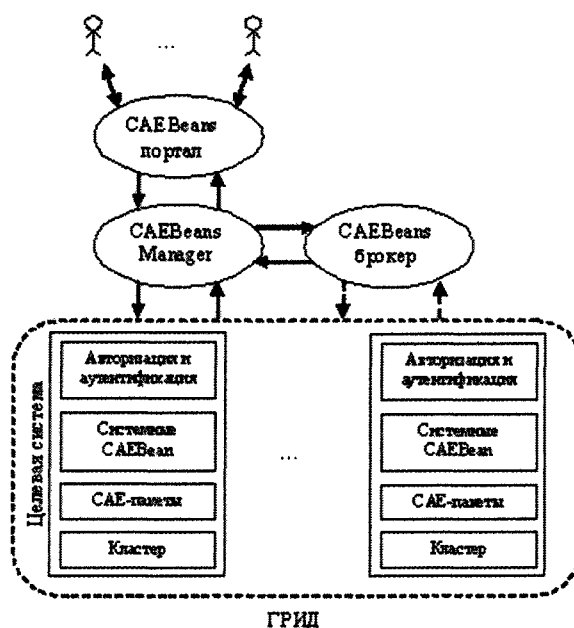


Рис. 1. Взаимодействие основных компонентов системы CAEBeans

3. Алгоритм работы брокера ресурсов

Брокер ресурсов выступает в качестве промежуточного звена между CAEBeans Server и грид-средой, обеспечивающего поиск и предоставление ресурсов, оптимальных для решения данной подзадачи.

Каталог ресурсов – это база данных, которая хранится на web-сервере и содержит информацию о целевых системах, лицензиях и задачах пользователей. С каталогом ресурсов работают непосредственно брокер ресурсов и администратор каталога ресурсов.

Под *целевой системой* будем понимать совокупность аппаратных ресурсов вычислительной системы, операционной системы, инженерных пакетов и системных CAEBean, которые играют роль грид-оболочек над инженерными пакетами.

На целевой системе в качестве Grig Middleware должен быть установлен Unicore 6.0. Тогда *системный CAEBean* – это вид сервиса Unicore, предназначенный для работы с инженерными пакетами, на данной целевой системе.

Для выполнения расчетов с использованием инженерных пакетов необходима *лицензия*. Лицензия дает возможность выполнять отдельные функции, например, построение сетки в параллельном режиме, запуск решателя в параллельном режиме и др. Лицензия хранится на сервере лицензий, который в общем случае, может находиться вне целевой системы.

Каталог ресурсов хранит информацию о задачах пользователей, которые выполняются или стоят в очереди, ожидая необходимые им ресурсы.

Рассмотрим более подробно схему выделения и использования ресурсов грид-среды с участием брокера ресурсов (см. рис. 2).

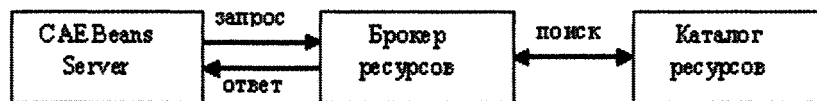


Рис. 2. Схема работы брокера ресурсов

1. CAEBeans Server производит запрос к брокеру ресурсов на предоставление ресурса.
2. Брокер ресурсов производит запрос к каталогу ресурсов, формируя список целевых систем, характеристики которых удовлетворяют заявленным обязательным требованиям задачи. Затем на основе заданного алгоритма поиска выбирается одна целевая система, ее ресурсы маркируются в каталоге ресурсов как занятые. Если все целевые системы заняты, то брокер ресурсов ставит задачу в очередь.
3. Брокер ресурсов передает URL целевой системы и имя сервиса CAEBeans Server.
4. CAEBeans Server обращается к предоставленным ресурсам.
5. Дальнейший процесс постановки, решения и получения результатов происходит напрямую, между CAEBeans Server и предоставленным ресурсом без участия брокера.
6. После получения результатов вычисления CAEBeans Server производит освобождение ресурса и извещение брокера об его освобождении.

Брокер ресурсов реализуется в виде web-сервиса XML. Web-сервис XML – это программный компонент, который позволяет создавать независимые от платформы масштабируемые и слабосвязанные приложения. Благодаря Web-сервисам XML приложения могут обмениваться сообщениями с использованием стандартных протоколов, таких как HTTP, XML, XSD, SOAP и WSDL.

Для взаимодействия с брокером ресурсов вводятся методы, которые делятся на две группы: методы, предназначенные для работы администратора с каталогом ресурсов, и методы для работы CAEBeans Server с брокером.

Методы брокера ресурсов для администратора каталога ресурсов:

- addTargetSystem(TargetSystem target)– добавление в каталог ресурсов новой целевой системы;
- delTargetSystem(TargetSystem target)– удаление из каталога ресурсов целевой системы;
- addLisence(Lisence lisence) – добавление в каталог ресурсов новой лицензии;
- delLisence(Lisence lisence) – удаление из каталога ресурсов лицензии.

Методы брокера ресурсов для взаимодействия с CAEBeans Server:

- queryResource(Query query) – поиск и захват подходящих ресурсов;
- unlockResource(Task task) – освобождение ресурса.

Запрос CAEBeans Server к брокеру ресурсов является XML-файлом и содержит следующую информацию: уникальный идентификатор задачи, список необходимых лицензий, имя системного CAEBean, время необходимое для решения задачи в секундах, оптимальную конфигурацию (количество ядер, объем оперативной памяти), минимальную конфигурацию.

Минимальная конфигурация аппаратных средств – это возможные отступления от необходимых для выполнения задачи требований. Если минимальная конфигурации не указана в запросе CAEBeans Server, то брокер ресурсов принимает в качестве нее оптимальную конфигурацию.

В случае, когда в запросе к CAEBeans брокеру информация указана не полностью, принимаются значения по умолчанию. На рисунке 3 приведен пример запроса CAEBeans Server.

```
<query>
  <id_task>3564</id_task>
  <lisence>ANSYS Academic Research</lisence>
  <system_CAEBean>Tube_CAEBean</system_CAEBean>
</query>
```

Рис. 3. Запрос CAEBeans Server к брокеру ресурсов

На рисунке 4 представлена XML-схема корректных XML-запросов.

```
<?xml version="1.0"?>
<xs:schema xmlns:xs="http://www.w3.org/2001/XMLSchema">
<xs:element name="query" type="Tquery"/>

<xs:complexType name="Tquery">
  <xs:all>
    <xs:element name="id_task" type="xs:string" use="required"/>
    <xs:element name="lisence" type="xs:string" minOccurs="0" maxOccurs="unbounded"/>
    <xs:element name="timeout" type="xs:decimal" minOccurs="0" maxOccurs="unbounded"/>
    <xs:element name="count_nodes" type="xs:decimal"/>
    <xs:element name="memory_RAM" type="xs:decimal"/>
  </xs:all>
</xs:complexType>
</xs:schema>
```

Рис. 4. XML-схема корректных XML-запросов

Каждая целевая система характеризуется статическими и динамическими свойствами. Статические свойства описывают целевую систему как совокупность аппаратных средств,

платформы и программного обеспечения, а динамические указывают на загруженность целевой системы в конкретный период времени.

К статическим свойствам целевой системы относятся название целевой системы, URL целевой системы, операционная система, список системных CAEBean, количество ядер, объем дискового пространства, объем оперативной памяти, частота CPU. Динамические свойства целевой системы – это количество свободных ядер.

Лицензия инженерного пакета имеет следующие характеристики: название лицензии; список системных CAEBean, для которых лицензия предназначена; наибольшее количество процессоров, которые могут быть использованы по лицензии; статус лицензии (принимает значения «занята» или «свободна») и целевая система, которой лицензия принадлежит.

Брокер ресурсов осуществляет поиск подходящей для задачи целевой системы и возвращает ее URL и название сервиса Unicore. Информация о задачах, которые выполняются на целевых системах, сохраняется брокером ресурсов в базе данных. Она необходима для сбора статистики и прогнозирования общего времени получения результата для постановки новой задачи.

Задача в каталоге ресурсов имеет следующие свойства: уникальный идентификатор задачи; время постановки задачи; максимальное время выполнения задачи, по истечении которого задача освобождает занимаемые ею ресурсы; уникальный номер лицензии, с которой задача работает; уникальный номер целевой системы и количество ядер, на которых выполняется задача.

Поиск ресурсов, удовлетворяющих требованиям задачи, может производиться по различным алгоритмам: случайным образом или аналитически на основе расчета общего времени получения результата (TTD – Total Time to Delivery). Одной из наиболее важных задач брокера ресурсов является оценка общего времени получения результата при постановке задачи пользователю конкретному вычислительному ресурсу. В дальнейшем, на основе этой оценки, определяется ресурс, обеспечивающий оптимальное время исполнения поставленной задачи.

При формировании данных оценок, брокер использует информацию о подзадаче, передаваемую CAEBeans Server. В процессе запроса вычислительных ресурсов CAEBeans Server может предоставить брокеру такую информацию, как размер исходных данных; вычислительная сложность рассматриваемой подзадачи; масштабируемость подзадачи и т.п. На основе этих данных и информации о текущих характеристиках грид-среды брокер ресурсов может произвести оценку общего времени получения результата.

Заключение

Представленный подход организации брокера ресурсов разработан для поддержки технологии CAEBeans. В работе дано описание алгоритма работы брокера ресурсов, представлены структура XML-запросы CAEBeans Server к брокеру ресурсов и алгоритмы планирования. Дальнейшие исследования будут направлены на поддержку брокером ресурсов очереди задач.

В качестве аппаратной поддержки технологии CAEBeans предполагается задействовать вычислительные ресурсы суперкомпьютерных систем, входящих в грид-среду СКИФ-Полигон, созданную в рамках Российско-Белорусского суперкомпьютерного проекта СКИФ-ГРИД.

Работа выполнялась при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (контракт 2007-4-1.4-20-01-026) и программы СКИФ-ГРИД (контракт СГ-1/07).

Литература

1. Эвристики распределения задач для брокера ресурсов Grid / А.И. Аветисян, С.С. Гайсарян, Д.А. Грушин, Н.Н. Кузюрин, А.В. Шокуров // Труды Института системного программирования РАН. – 2004. – Т. 5, – С. 41 – 62.
2. Системы Grid-вычислений – перспектива для научных исследований / А.Е. Дорошенко, О.В. Алистратов, Ю.М. Тырчак, А.П. Розенблат, К.А. Рухлис // Проблемы программирования. – 2005. – № 1. – С. 14 – 38.
3. Радченко, Г.И. CAEBeans: иерархические системы структурированных проблемно-ориентированных оболочек над инженерными пакетами / Г.И. Радченко, Л.Б. Соколинский // Научный сервис в сети Интернет: многоядерный компьютерный мир. 15 лет РФФИ: тр. Всерос. науч. конф. (24-29 сентября 2007 г., г. Новороссийск). – Новороссийск, 2007. – С. 54 – 57.
4. Радченко, Г.И. BeanShells: интеграция CAE-пакетов в GPE / Г.И. Радченко, Л.Б. Соколинский, И.С. Кутепов // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2007): тр. Междунар. науч. конф. (Челябинск, 29 янв. – 2 февр. 2007 г.). – Челябинск, 2007. – Т. 2. – С. 15.
5. Uniform Interface to Computing Resources: [<http://www.unicore.eu/>], 19 Jun 2008.
6. Foster, I. The Grid 2: Blueprint for a New Computing Infrastructure. Second edition / I. Foster, C. Kesselman. – San Francisco: Morgan Kaufmann, 2003.
7. Радченко, Г.И. Методы организации грид-оболочек системного слоя в технологии CAEBeans // Вестник ЮУрГУ. Сер. «Математическое моделирование и программирование». – 2008. – Вып. 1, № 15 (115). – С. 69 – 80.

Кафедра системного программирования,
Южно-Уральский государственный университет
sham2004@bk.ru

Поступила в редакцию 15 сентября 2008 г.

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ФИЛЬТРУЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ НА МНОГООБРАЗИИ

Д.Е. Шафранов

ON THE CAUCHY PROBLEM FOR THE EQUATION OF FREE SURFACE OF FILTERED FLUID ON THE MANIFOLD

D.E. Shafranov

Показано существование единственного решения задачи Коши для уравнения свободной поверхности фильтрующейся жидкости в пространстве k -форм, заданных на гладком компактном ориентированном римановом многообразии без края.

Ключевые слова: Уравнения соболевского типа, k -формы, риманово многообразие

The author introduces the existence of the unique solution of the Cauchy problem for the equation of free surface of filtered fluid in the k -form spaces defined on the smooth compact oriented Riemannian manifold without boundary.

Keywords: Sobolev type equation, k -forms, Riemannian manifold

Введение

Уравнение

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u - \beta\Delta^2 u \quad (1)$$

описывает эволюцию формы свободной поверхности жидкости, фильтрующейся в пласте ограниченной мощности [1]. Здесь действительные параметры α, β и λ характеризуют среду, причем $\alpha, \beta > 0$.

Разрешимость начально-краевых задач для уравнения (1) в цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$, где Ω – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ , изучалась ранее в различных постановках, например, в [2, 3]. Уравнение свободной поверхности фильтрующейся жидкости относится к обширному классу уравнений соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu. \quad (2)$$

В данной статье рассмотрим задачу Коши для уравнения (1) в пространстве гладких k -форм, определенных на Ω – гладком компактном ориентированном римановом многообразии без края. Редуцируем эту задачу к задаче Коши

$$u(0) = u_0, \quad (3)$$

для уравнения соболевского типа (2) в банаховом пространстве. Для этого воспользуемся теорией гармонических полей Кодаиры и разложением Ходжа [4]. Для исследования

разрешимости полученной задачи используем результаты теории вырожденных аналитических полугрупп операторов. Отметим, что в [5] был рассмотрен более узкий класс уравнений соболевского типа, имеющих аналитические разрешающие группы, на многообразиях.

Статья помимо вводной части содержит еще два пункта. В первом пункте вводятся необходимые определения и формулируются, адаптированные для нашей задачи, теоремы теории вырожденных аналитических полугрупп и теории Ходжа – Кодаиры доказанные в [3, 4, 6, 7]. Во втором пункте приведена схема редукции исходной задачи Коши к задаче (2), (3) и сформулирован основной результат статьи.

Предварительные сведения

Пусть \mathcal{U} и \mathcal{F} банаховы пространства и операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ – линейный и ограниченный, $M \in Cl(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ – линейный, замкнутый и плотно определенный. Введем в рассмотрение L -резольвентное множество

$$\rho^L(M) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \right\}$$

и L -спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M . Оператор-функцию $(\mu L - M)^{-1}$ будем называть L -резольвентой оператора, а оператор-функции $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1} L$ и $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ правой и левой L -резольвентой оператора M соответственно.

Определение 1. Оператор M называется (L, p) -секториальным, если существуют константы $\nu \in \mathbb{R}$ и $\theta \in (\pi/2, \pi)$ такие, что

$$S_{\nu, \theta}^L(M) = \{ \mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - \nu)| < \theta, \mu \neq \nu \} \subset \rho^L(M),$$

причем,

$$\exists K > 0 : \max \left\{ \|R_\mu^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})}, \|L_\mu^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})} \right\} \leq \frac{K}{\prod_{k=0}^p |\mu_k - \nu|}, \forall \mu_k \in S_{\nu, \theta}^L(M), \quad k = 0, 1, \dots, p.$$

Решением уравнения (2) называется вектор-функция $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{U}))$ удовлетворяющая уравнению (2).

Обозначим через \mathcal{U}^1 замыкание множества $\text{im} R_{(\mu, p)}^L(M)$ в норме пространства \mathcal{U} .

Теорема 1. Пусть оператор M (L, p) -секториален. Тогда для любого начального значения $u_0 \in \mathcal{U}^1$ существует единственное решение задачи Коши (2), (3).

Пусть Ω_n – n -мерное ориентированное гладкое (т. е. класса C^∞) компактное связное риманово многообразие без края. Через $\mathbb{H}^k \equiv \mathbb{H}^k(\Omega_n)$, $\mathbb{H}^{-1} = \mathbb{H}^{n+1} = \{0\}$ обозначим линейное пространство гладких k -форм на многообразии Ω_n .

Формулой

$$(\alpha, \beta)_0 = \int_{\Omega_n} \alpha \wedge * \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{H}^k \tag{4}$$

где $*$ – оператор Ходжа, определим скалярное произведение на \mathbb{H}^k , $k = 0, 1, \dots, n$, а соответствующую норму обозначим через $\|\cdot\|_0$. Продолжим скалярное произведение на прямую сумму $\bigoplus_{k=0}^n \mathbb{H}^k$, требуя чтобы различные пространства \mathbb{H}^k были ортогональны. Пополнение пространства \mathbb{H}^k по норме $\|\cdot\|_0$ обозначим через \mathfrak{H}_k^0 .

Теорема 2. (Теорема Ходжа – Кодаиры). Для произвольного $k = 0, 1, \dots, n$ существует расщепление пространства \mathfrak{H}_k^0 в прямую ортогональную сумму

$$\mathfrak{H}_k^0 = \mathfrak{H}_{kd}^0 \oplus \mathfrak{H}_{k\delta}^0 \oplus \mathfrak{H}_{k\Delta}$$

причем пространство $\mathfrak{H}_{k\Delta}$ конечномерно.

Здесь операторы d, δ являются расширением оператора d – (внешнего) дифференцирования k -форм и оператора $\delta = (-1)^{n(k+1)+1} * d*$, а $\Delta = -\delta d - d\delta$ – оператор Лапласа – Бельтрами. Пространство \mathfrak{H}_{kd}^0 ($\mathfrak{H}_{k\delta}^0$) является пополнением линейала $d\delta[\mathbb{H}^k] = d[\mathbb{H}^{k-1}]$ ($\delta d[\mathbb{H}^k] = \delta[\mathbb{H}^{k+1}]$) по соответствующей норме, а пространство $\mathfrak{H}_{k\Delta}$ содержит только гармонические k -формы.

Через $P_{k\Delta}$ обозначим ортопроектор на $\mathfrak{H}_{k\Delta}$. Формулами

$$(\alpha, \beta)_1 = (-\Delta\alpha, \beta)_0 + (\alpha_\Delta, \beta_\Delta)_0,$$

$$(\alpha, \beta)_2 = (\Delta\alpha, \Delta\beta)_0 + (\alpha, \beta)_1,$$

введем скалярные произведения на \mathbb{H}^k , где $\omega_\Delta = P_{k\Delta}\omega$. Пополнения линейала \mathbb{H}^k по соответствующим нормам $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ обозначим через \mathfrak{H}_k^1 и \mathfrak{H}_k^2 соответственно. Аналогичным образом можем построить пространство \mathfrak{H}_k^4 . Пространства \mathfrak{H}_k^l , $l = 1, 2$, – банаховы (их гильбертова структура нас в дальнейшем не интересует), причем имеют место непрерывные и плотные вложения $\mathfrak{H}_k^2 \subset \mathfrak{H}_k^1 \subset \mathfrak{H}_k^0$.

Следствие 1. Для любого $k = 0, 1, \dots, n$ существуют расщепления пространств $\mathfrak{H}_k^l = \mathfrak{H}_{k\Delta}^{l1} \oplus \mathfrak{H}_{k\Delta}$, где $\mathfrak{H}_{k\Delta}^{l1} = (\mathbb{I} - P_{k\Delta})[\mathfrak{H}_{k\Delta}^l]$, $l = 1, 2$.

Основные результаты

Спектр оператора Лапласа – Бельтрами $\sigma(\Delta)$ в пространстве k -форм описанном выше неположителен, дискретен, конечнократен и сгущается только к точке ∞ (см. [7]). Обозначим через $\{\lambda_l\}$ последовательность собственных значений оператора Лапласа – Бельтрами, занумерованных по невозрастанию с учетом кратности. Через $\{\varphi_l\}$ обозначим ортонормированную (в смысле (4)) последовательность собственных функций. Если $\lambda_l = 0$, то при некотором фиксированном l выполняется $\varphi_l \in \mathfrak{H}_{k\Delta}$.

Зададим операторы L и M формулами $L = \lambda - \Delta$, $M = \alpha\Delta u - \beta\Delta^2 u$, $\text{dom } M = \mathfrak{H}_k^4$. Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, а оператор $M \in Cl(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ действуют из пространства $\mathcal{U} = \mathfrak{H}_k^4$ в пространство $\mathcal{F} = \mathfrak{H}_k^0$. Тем самым задача Коши

$$u(x, 0) = u_0(x) \tag{5}$$

для уравнения (1) редуцирована к задаче Коши (3) для уравнения соболевского типа (2).

Лемма 1. Для любого $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lambda \neq \frac{\alpha}{\beta}$ оператор M ($L, 0$)-секториален.

Для данной задачи $\mathcal{U}^1 = \{u \in \mathcal{U} : (u, \varphi_l)_0 = 0, \lambda_l = \lambda\}$.

Из леммы 1 и теоремы 1 следует

Теорема 3. При любых $\alpha, \beta > 0$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lambda \neq \frac{\alpha}{\beta}$ и при любом $u_0 \in \mathcal{U}^1$ существует единственное решение $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{U}^1)) \cap C(\overline{\mathbb{R}_+}; \mathcal{L}(\mathcal{U}^1))$ задачи Коши (1), (5).

Литература

1. Дзекцер, Е.С. Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью / Е.С. Дзекцер // Докл. АН СССР. – 1972. – Т. 202, № 5. – С. 1031 – 1033.
2. Свиридюк, Г.А. Разрешимость задачи Коши для линейных сингулярных уравнений эволюционного типа / Г.А. Свиридюк, М.В. Суханова // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, № 3. – С. 508 – 515.
3. Свиридюк, Г.А. О единицах аналитических полугрупп операторов с ядрами / Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров // Сиб. матем. журнал. – 1998. – Т. 39, № 3. – С. 604 – 616.
4. Морен, К. Методы гильбертова пространства / К.Морен. – М.: Мир, 1965.
5. Шафранов, Д.Е. Задача Коши для уравнений соболевского типа на римановых многообразиях: дис... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Д.Е. Шафранов; СГПА. – Стерлитамак, 2006. – 96 с.
6. Sviridyuk, G.A. Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht: VSP, 2003.
7. Уорнер, Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли / Ф. Уорнер. – М.: Мир, 1987.

Кафедра уравнений математической физики,
Южно-Уральский государственный университет
shafr@math.susu.ac.ru

Поступила в редакцию 2 сентября 2008 г.

Издательство Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 27.10.2008. Формат 60×84 1/8. Печать трафаретная.

Усл. печ. л. 13,95. Уч.-изд. л. 11,23. Тираж 500 экз. Заказ 406/461.

Отпечатано в типографии Издательства ЮУрГУ. 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.