



ВЕСТНИК

ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО № 10 (110)
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА 2008

ISSN 1990-8504

СЕРИЯ

«МАШИНОСТРОЕНИЕ»

Выпуск 11

ПОСВЯЩАЕТСЯ
65-ЛЕТИЮ ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международной справочной системе по периодическим и продолжающимся изданиям «Ulrich's Periodicals Directory».

Редакционная коллегия:

д.т.н., профессор, заслуженный деятель науки и техники РФ
Тверской М.М. (*отв. редактор*), д.т.н., профессор Павлюк Ю.С.,
д.т.н., профессор Прокопьев В.Н., д.т.н., профессор Рождественский Ю.В.,
д.т.н., профессор Спиридонов Е.К., д.ф.-м.н., профессор Телегин А.И.,
д.т.н., профессор Чернявский О.Ф., д.т.н., профессор Шеркунов В.Г.,
к.т.н., доцент Смирнов В.А. (*отв. секретарь*)

СОДЕРЖАНИЕ

Расчет и конструирование

ТЕЛЕГИН А.И. Структурный синтез и кинематический анализ плоских моделей шагающих аппаратов.....	3
ТЕЛЕГИН В.А., КАЙГОРОДЦЕВ М.И. Моделирование и анимация ходьбы плоских моделей шагающих аппаратов.....	15

Содержание

СМИРНОВ В.А., ФЕДОРОВ В.Б. Использование кватернионов при математическом моделировании механизмов с параллельными кинематическими цепями.....	24
ДЕРЖАНСКИЙ В.Б., ТАРАТОРКИН И.А., КЛИМОВА А.С. Прогнозирование резонансных режимов в гидромеханической трансмиссии транспортной машины.....	30
КАРТАШЕВА М.И. Математическое моделирование течений в областях отрыва потока.....	36
ТЕРЕХИН А.А., СИДЕЛЬНИКОВ Р.В., ТЕРЕХИНА Т.В. Численный анализ влияния поверхностного трения на аэродинамические характеристики профиля.....	45
КИСЕЛЁВ В.И. Быстрый метод расчёта опорной траектории спускаемого летательного аппарата.....	49
СПИРИДОНОВ Е.К., ШКОЛИН С.Б. Исследование предельных режимов двухфазного эжектора.....	55
НЕКРАСОВ С.Г., ПАШНИНА Н.А. Численное исследование течения газа в тонких профилированных зазорах с вибрацией, объединенных в Т-образную структуру.....	62
Технология	
ЛОПАТИН Б.А., ХАУСТОВ С.А. Автоматизированная система моделирования и анализа способов формирования зубьев зубчатых колес.....	72
Сведения об авторах	78

Расчет и конструирование

УДК 62-50+531.3

СТРУКТУРНЫЙ СИНТЕЗ И КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ МОДЕЛЕЙ ШАГАЮЩИХ АППАРАТОВ

А.И. Телегин

Синтезировано более шестидесяти структурных схем шагающих аппаратов (ША), которые можно моделировать плоскими шарнирными механизмами. Представлены кинематические схемы известных и новых ША, следующих из синтезированных структур. Предложены расчётные схемы кинематического анализа в процессах подготовки и выполнения шага ША с одной, двумя и тремя степенями свободы корпуса в трёхопорном состоянии. Описано использование полученных результатов в учебном процессе.

Введение. Для автоматически управляемых электромеханических ША с питанием от аккумуляторных батарей актуальной задачей является создание таких конструкций ША, их движителей и способов управления, которые обеспечивают максимальную удельную грузоподъёмность и минимальное энергопотребление приводов на реализацию заданного перемещения корпуса. Шестиногие ША имеют 18 приводов (по три привода на каждую ногу), что обеспечивает высокие кинематические возможности и за счёт эффективного управления позволяет достигать максимальной плавности хода и комфортабельного движения корпуса [1, 2]. Если ША предназначен для транспортировки, например, технологического оборудования (манипуляторов), то от него не требуется плавности хода корпуса. Для осуществления дискретно-непрерывной статически устойчивой ходьбы (по циклу – разгон, равномерное движение, торможение), обеспечивающей заданное перемещение корпуса (без специальных требований к комфортабельности движения корпуса) не требуется иметь шесть универсальных ног и несколько степеней свободы корпуса в трёхопорном состоянии. Достаточно иметь, например, две ноги, каждая из которых снабжена двумя стопами и имеет один силовой привод, а также одну поддерживающую ногу (костыль) с одной стопой и маломощными приводами [3, 4]. Кинематические возможности таких ША минимальны. В процессе ходьбы ША имеет одну степень свободы. Усложнив конструкцию ног и увеличив число приводов, можно повысить кинематические возможности ША, в том числе увеличить подвижность корпуса. Однако, следует ожидать, что минимальное количество ног и силовых приводов ША, а также эффективное управление ходьбой с рекуперацией электроэнергии приводов в цикле торможения обеспечат высокую удельную грузоподъёмность (отношение массы полезного груза к массе ША) и низкие удельные энергозатраты. Настоящая статья открывает цикл работ, посвящённых исследованию таких ША.

Здесь изложены результаты структурного синтеза ША на множестве плоских шарнирных механизмов. Из синтезированного множества структурных схем (СС) получены кинематические схемы ША, которые разбиты на три класса в зависимости от подвижности корпуса в трёхопорной фазе ходьбы. Для каждого класса описаны алгоритмы кинематических расчётов в процессах подготовки и выполнения шага.

1. Синтез СС ША. Звенья рассматриваемых ША образуют друг с другом шарниры, оси вращения которых параллельны друг другу и перпендикулярны плоскости движения ША. В состав ША входят корпус, ноги и возможно костыли, т. е. более простые и/или ослабленные (с маломощными приводами) ноги. Каждая нога (костыль) образует с корпусом шарнир, центр которого будем называть точкой подвеса ноги. На свободном конце (одном или двух) нога имеет стопу. Возможны различные устройства стоп и механизмов их связи с концами ног (костылей). Будем считать, что эти устройства позволяют стопе находиться в двух возможных состояниях – в опорном и в переносном. В опорном состоянии стопа образует с опорной поверхностью (ОП) шарнир. При переходе в переносное состояние этот шарнир исчезает, так как стопа поднимается

Расчет и конструирование

над ОП и вместе с концом ноги (костыля) получает возможность перемещаться в новое опорное состояние для осуществления очередного шага.

Условимся на рисунках СС стопы в опорном состоянии изображать тёмным (залитым) кругом, а в переносном – светлым (залитым белым цветом) кругом. Шарнир будем изображать светлым кругом с толщиной линии в три раза меньшей, чем у стопы. Однопарные и двухпарные звенья будем изображать отрезками прямых, а многопарные звенья – тёмными многоугольниками.

Из возможного многообразия плоских шарнирных ША (далее ША) будем рассматривать только те, которые имеют следующие

Структурные свойства ША:

1. ША имеет одинаковые ноги и может иметь костыль или два одинаковых костыля, конструкции которых отличаются от ног.





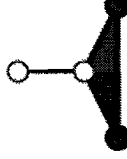

2. Нога (костыль) может быть (см. таблицу) однозвенной (вариант 1), двухзвенной (вариант 2), трёхпарной (вариант 3), четырёхпарной (вариант 4) или пятипарной (вариант 5). Костыль может быть беззвенным (вариант 0), т. е. состоять из стопы и механизмов перехода в опорное и переносное состояния.

3. Общее количество стоп ША не менее четырёх и не более шести.

В 1-й строке таблицы приведены номера вариантов СС ног (костылей). Во 2-й строке – названия этих вариантов, и в 3-й – их изображение на рисунках СС ША.

Таблица

Варианты схем ног (костылей) ША

0	1	2	3	4	5
Беззвенный костыль	Однозвенная нога (костыль)	Двухзвенная нога (костыль)	Трёхпарная нога (костыль)	Четырёхпарная нога (костыль)	Пятипарная нога (костыль)
					

Принципиальные ограничения, диктуемые перечисленными свойствами, возникли по следующим соображениям. Во-первых, для обеспечения статически устойчивой ходьбы необходимы три стопы в опорном состоянии (достаточные условия здесь не рассматриваются). Ещё одна стопа должна быть в переносном состоянии для подготовки к выполнению очередного шага. Поэтому количество стоп не может быть меньше четырёх. Во-вторых, ноги естественных шагающих существ имеют бедро и голень, т. е. состоят из двух тел. Сформулированные ограничения позволяют иметь ноги (костыли) с двумя голеньями (5-й вариант) и ноги без бёдер (варианты 1, 3). Нога (костыль) с двумя голеньями (стопами) позволяет совместить опорное состояние одной стопы с переносом другой, что ведёт к уменьшению количества приводов.

Утверждение 1. Альбом СС ША, имеющих структурные свойства (ограничения) 1–3, представлен на рис. 1–61.

Доказательство начнём с поиска возможных СС ША без костылей.

СС с вариантами ног 1 и 3 невозможны. В трёхопорном состоянии соответствующие ША теряют подвижность, так как число степеней свободы в замкнутых ветвях (в двух контурах) равно четырём и количество уравнений связей в двух опорных точках тоже равно четырём.

Возможные СС с двухзвенными ногами (2-й вариант) представлены на рис. 1 – 3. При количестве ног меньшем 4-х и большем 6-ти нарушаются ограничения (свойства) 3. Варианты СС с четырёхпарными ногами представлены на рис. 4, 5, а с пятипарными – на рис. 6, 7. При большем количестве ног 4-го или 5-го вариантов нарушается ограничение 3. Если длина корпуса в СС на рис. 4 равна нулю, то получится СС на рис. 8. Случай, когда длина корпуса на рис. 6 равна нулю, совпадает с СС с одним пятипарным костылём и двумя однозвенными ногами (см. рис. 11). Условимся в дальнейшем не выделять частные случаи, которые получаются из синтезированных СС при нулевых значениях тех или иных геометрических параметров звеньев.

К случаям СС с 2-х парным корпусом можно отнести СС на рис. 9, где нога и костыль имеют разные типы. Других СС с 2-х парным корпусом (кроме рис. 4, 6 и 9) нет.

Приступим к синтезу СС с одним костылём, в которых от двух до пяти ног (более пяти ног не может быть в силу ограничения 3). Поиск таких СС можно алгоритмизовать. Соответствующий код JS-функции (программы на языке JavaScript) представлен в листинге 1. Здесь в первом условном выражении функции *strSA_1()* закодировано два ограничения. Во-первых, тип ног не должен совпадать с типом костыля ($k'=n$). Здесь k – номер типа (варианта) костыля, n – номер типа (варианта) ноги. Во-вторых, в трёхопорном состоянии не должна исчезать подвижность. Очевидно, что это возможно в случае $k=0$, $k=1$ или $k=3$ только при $n=2$, $n=4$ или $n=5$. В случае $k=2$, $k=4$ или $k=5$ тип ноги может быть любым. Но в обоих случаях числа n и k не должны совпадать, иначе получим одну из СС на рис. 1–5. Во втором (дополнительном) условном выражении, которое вложено в первое, закодирована проверка выполнения ограничения 3 на количество стоп. Результат машинного синтеза выводится в виде набора четырёх натуральных чисел, где первое число указывает на количество ног, второе – на вариант ноги (1–5), третье – на количество костылей (1 или 2), четвёртое – на вариант костыля (0–5). Например, код СС=2114 описывает СС, изображённую на рис. 10.

Листинг 1. JS-функция синтеза кодов СС ША с одним костылём.

```
function strSA_1() {
  for (var i = 2; i < 6; i++) { // перебор количеств ног
    for (var n = 1; n < 6; n++) { // перебор типов ног
      for (var k = 0; k < 6; k++) { // перебор типов костылей
        // отсеив неподвижных СС и СС с однотипными костылями и ногами
        if ((k < 4 && k != 2 && n > 1 && n != 3) || (k > 1 && k != 3 && k != n)) {
          // проверка ограничения на количество стоп
          if (( ( k < 3 && ((n < 3 && (1+i) > 3 && (1+i) < 7) || (n > 2 && (1+2*i) > 3 && (1+2*i) < 7)) ) ||
            ( k > 2 && ((n < 3 && (2+i) > 3 && (2+i) < 7) || (n > 2 && (2+2*i) < 7)) ) )
            { // Вывод кодов СС
              document.write("СС=", i, n, k, " "); // конец второго условного выражения
            } // конец первого условного выражения
          } // конец цикла по k
        } // конец цикла по n
      } // конец цикла по i
    } // конец тела функции
  }
```

В результате выполнения этой функции в документ будут выведены следующие коды СС: СС=2114; СС=2115; СС=2213; СС=2214; СС=2215; СС=2312; СС=2314; СС=2315; СС=2410; СС=2411; СС=2412; СС=2413; СС=2415; СС=2510; СС=2511; СС=2512; СС=2513; СС=2514; СС=3112; СС=3114; СС=3115; СС=3210; СС=3211; СС=3213; СС=3214; СС=3215; СС=4112; СС=4114; СС=4115; СС=4210; СС=4211; СС=4213; СС=4214; СС=4215; СС=5112; СС=5210; СС=5211. Им соответствующие СС представлены на рис. 10–46.

Приступим к рассмотрению СС с двумя костылями. СС с одной ногой аналогичны СС с двумя ногами и одним костылём, синтез которых уже произведён, и соответствующие СС представлены на рис. 10–27. Особым является случай СС с двумя ногами. Его рассмотрим в последнюю очередь. Поиск СС, в которых три или четыре ноги, легко алгоритмизовать (при большем числе ног нарушается ограничение 3). Соответствующий код JS-функции представлен в листинге 2. Здесь первое условное выражение аналогично листингу 1. Во втором (дополнительном) условном выражении, которое вложено в первое, закодировано выполнение ограничения 3 на количество стоп с двумя костылями.

Листинг 2. JS-функция синтеза кодов СС ША с двумя костылями, имеющая три или четыре ноги:

```
function strSA_2() {for (var i = 3; i < 5; i++) {for (var n = 1; n < 6; n++) {for (var k = 0; k < 6; k++) {
  if ((k < 4 && k != 2 && n > 1 && n != 3) || (k > 1 && k != 3 && n != k)) {
    // проверяем количество стоп в СС
    if (( ( k < 3 && ((n < 3 && (2+i) > 3 && (2+i) < 7) || (n > 2 && (2+2*i) < 7)) ) ||
      ( k > 2 && ((n < 3 && (4+i) < 7) || (n > 2 && (4+2*i) < 7)) ) )
      { // Выводим коды СС с тремя и более ногами
        document.write("СС=", i, n, k, " "); } } } } } }
```

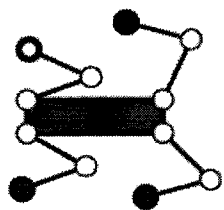


Рис. 1

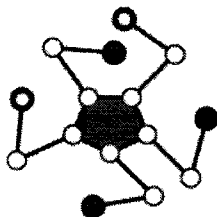


Рис. 2

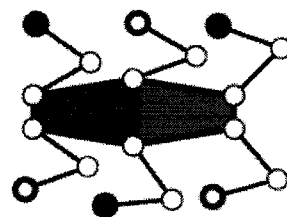


Рис. 3

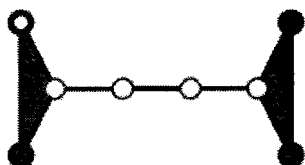


Рис. 4

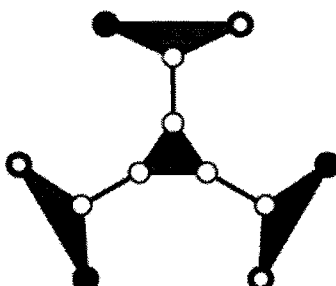


Рис. 5

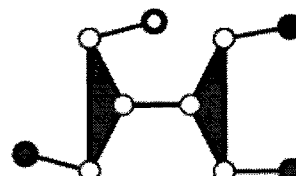


Рис. 6

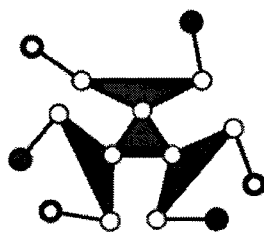


Рис. 7

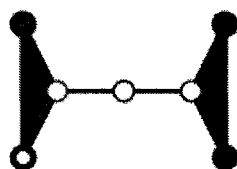


Рис. 8

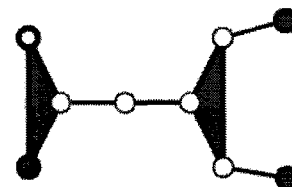


Рис. 9

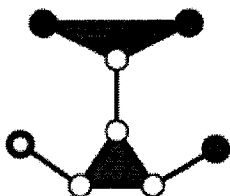


Рис. 10

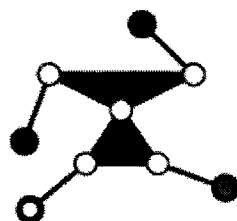


Рис. 11

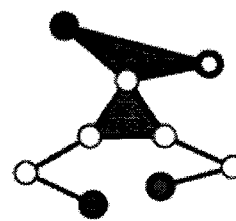


Рис. 12

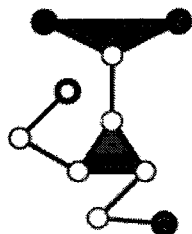


Рис. 13

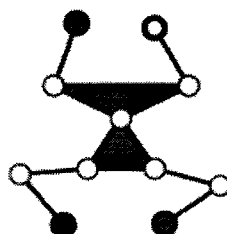


Рис. 14

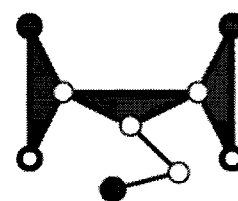


Рис. 15

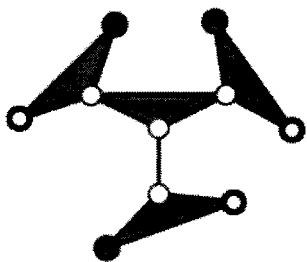


Рис. 16

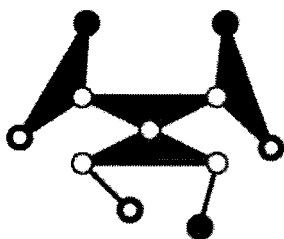


Рис. 17

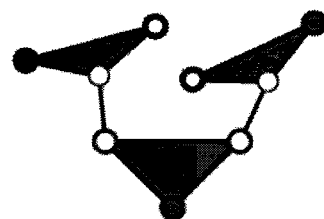


Рис. 18

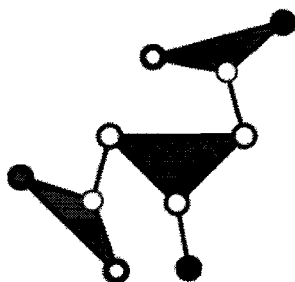


Рис. 19

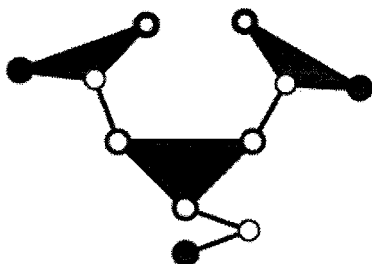


Рис. 20

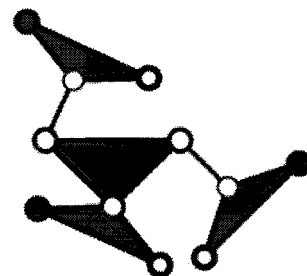


Рис. 21

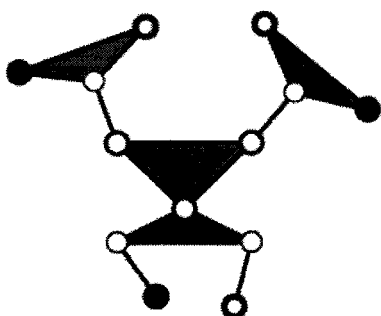


Рис. 22

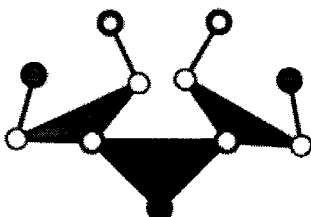


Рис. 23

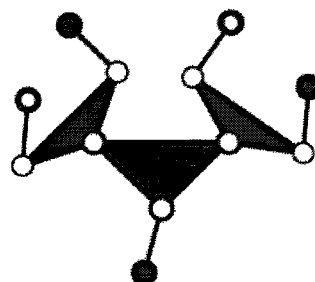


Рис. 24

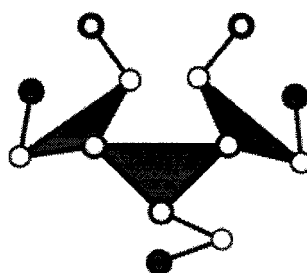


Рис. 25

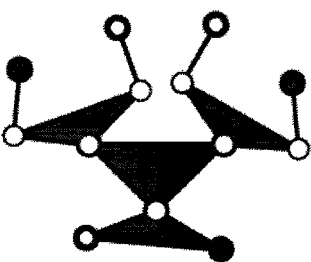


Рис. 26

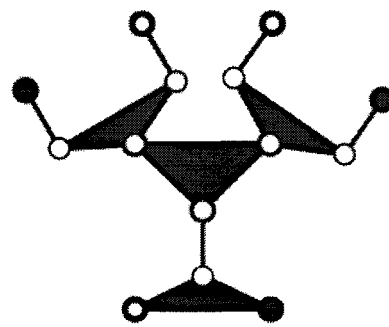


Рис. 27

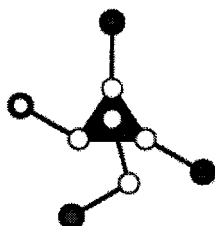


Рис. 28

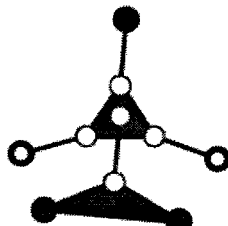


Рис. 29

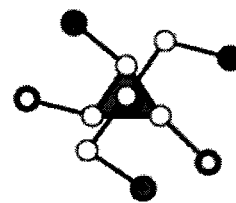


Рис. 30

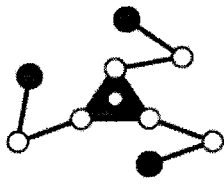


Рис. 31

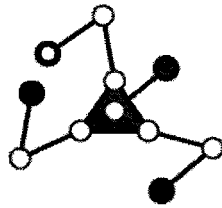


Рис. 32

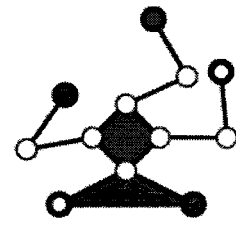


Рис. 33

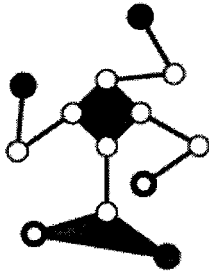


Рис. 34

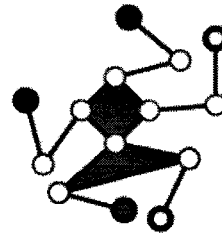


Рис. 35

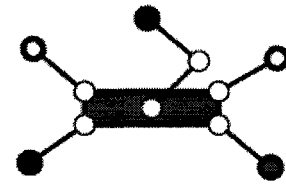


Рис. 36

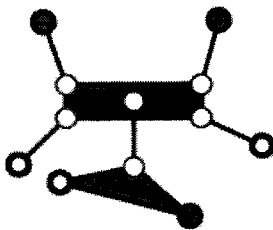


Рис. 37

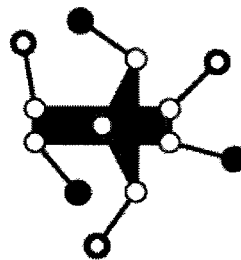


Рис. 38

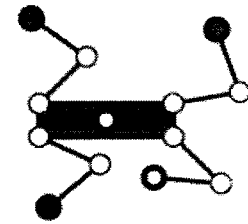


Рис. 39

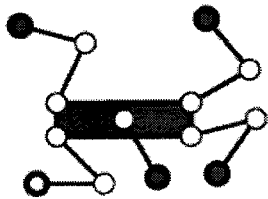


Рис. 40

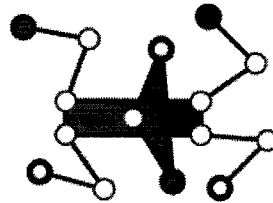


Рис. 41

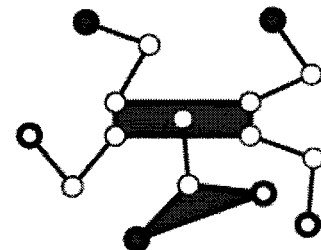


Рис. 42

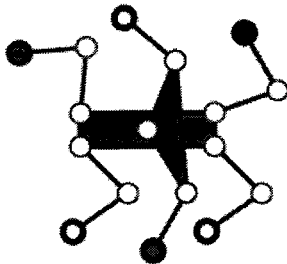


Рис. 43

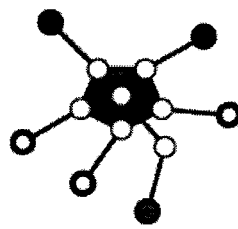


Рис. 44

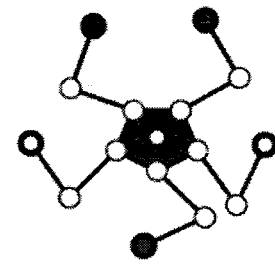


Рис. 45

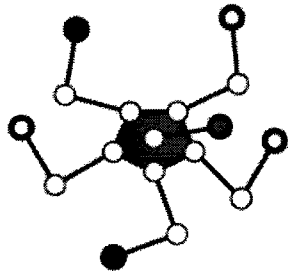


Рис. 46

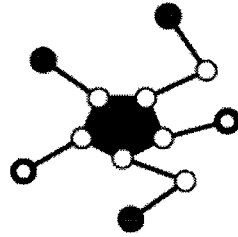


Рис. 47

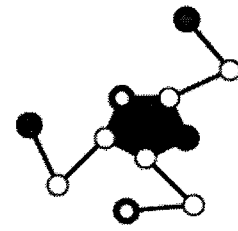


Рис. 48

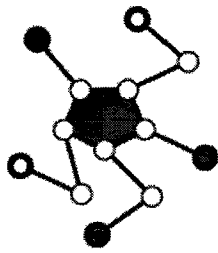


Рис. 49

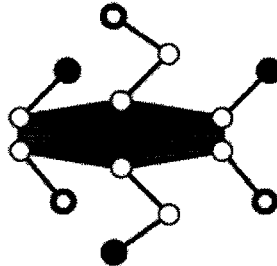


Рис. 50

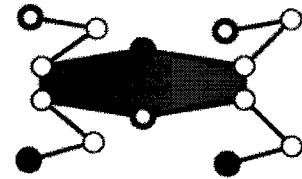


Рис. 51

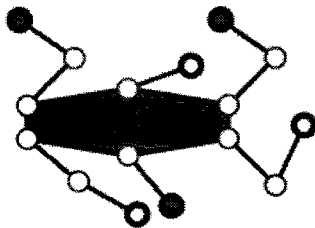


Рис. 52



Рис. 53

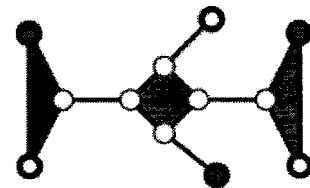


Рис. 54

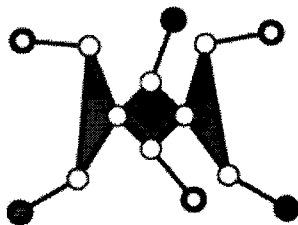


Рис. 55



Рис. 56

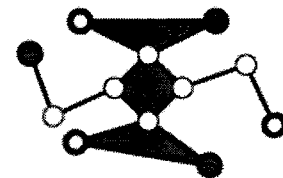


Рис. 57

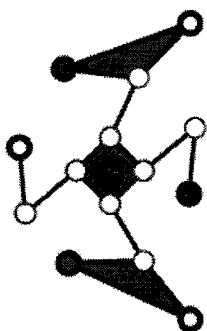


Рис. 58

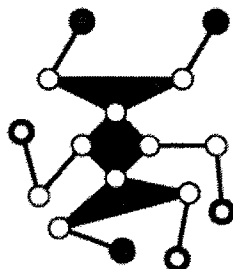


Рис. 59

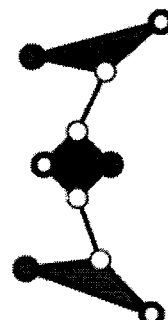


Рис. 60

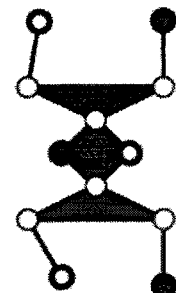


Рис. 61

Расчет и конструирование

В результате выполнения этой функции в документ будут выведены следующие коды СС: СС=3122; СС=3220; СС=3221; СС=4122; СС=4220; СС=4221. Им соответствующие СС представлены на рис. 47–52.

Приступим к рассмотрению СС с двумя костылями и двумя ногами. Код JS-функции, автоматизирующей синтез таких СС, представлен в листинге 3. Здесь первое условное выражение аналогично предшествующим листингам. Во втором (дополнительном) условном выражении, которое вложено в первое, закодировано выполнение ограничения 3 на количество стоп ША с двумя костылями. В третьем (дополнительном) условном выражении, которое вложено во второе, закодирован отсев повторяющихся СС. Очевидно, что следующие пары кодов СС аналогичны: (2122, 2221), (2124, 2421), (2125, 2521), (2223, 2322), (2224, 2422), (2225, 2522). Поэтому каждый второй код из этих пар отсеивается (отбрасывается) последним логическим выражением.

Листинг 3. JS-функция синтеза кодов СС ША с двумя костылями и двумя ногами.

```
function strSA_3() { for (var n = 1; n < 6; n++) { for (var k = 0; k < 6; k++) {  
  // отсеиваем неподвижные СС и СС с однотипными костылями и ногами  
  if ((k < 4 && k! = 2 && n > 1 && n! = 3) || (k > 1 && k! = 3 && n! = k)) {  
    // проверяем количество стоп в СС с двумя костылями  
    if ( (k < 3) || (k > 2 && n < 3) ) {  
      if (k == 0 || k > n) { // отсеиваем повторяющиеся СС  
        document.write("СС=", 2, n, 2, k, ", "); } } } } } }
```

В результате выполнения этой функции в документ будут выведены следующие коды СС: СС=2122; СС=2124; СС=2125; СС=2220; СС=2223; СС=2224; СС=2225; СС=2420; СС=2520. Им соответствующие СС представлены на рис. 53–61. *Утверждение доказано.*

2. Кинематические схемы (КС) ША. Для кинематического анализа ША нет необходимости различать ноги и костыли. Поэтому здесь и в дальнейшем будем использовать только понятие ноги. Звено ноги, заканчивающееся одной или двумя стопами, условимся называть голенью. Предшествующее голени звено (если оно есть) условимся называть бедром. Из множества СС на рис. 1–61 можно выделить три класса ША в зависимости от числа степеней свободы (подвижности) корпуса в трёхопорном состоянии. На рис. 62–89 представлена лишь незначительная часть возможных КС ША, которые можно получить из синтезированного множества. Здесь в схемах трёхпарных и четырёхпарных ног шарнир голени расположен между стопами, т. е. тёмный треугольник превращён в стержень. Аналогично выглядит бедро пятипарной ноги. В многопарном корпусе за счёт использования сложных шарниров совмещены точки подвеса нескольких ног.

На рис. 62–77 представлены КС ША, корпус которых в трёхопорном состоянии имеет одну степень свободы, т. е. является одноподвижным. КС на рис. 62–73 имеют два контура. Звенья этих контуров будем называть контурными звеньями, в отличие от переносных звеньев. В первый контур входят три звена OC , CD и DA . Во 2-й входят два звена – EF и FB . Число вращающихся контурных звеньев – пять, число связей в опорных точках A и B – четыре. Следовательно, подвижность корпуса – 1. В КС на рис. 74–77 можно ограничиться рассмотрением одного контура, так как шарнирная точка A – неподвижна. Такие КС будем называть упрощёнными, так как кинематические расчёты в процессах подготовки и выполнения шага для таких КС осуществляются по упрощённому алгоритму. При изменении опорных точек в КС на рис. 77 появится 2-й контур, т. е. упрощённая расчётная схема примет обычный вид.

На рис. 78–85 представлены КС ША, корпус которых в трёхопорном состоянии имеет две степени свободы. КС на рис. 78–82 имеют два контура. В первый контур входят четыре звена OG , GC , CD и DA . Во второй входят два звена – EF и FB . Число вращающихся контурных звеньев – шесть, число связей в опорных точках A и B – четыре. Следовательно, подвижность корпуса – два. В КС на рис. 83, 84 можно ограничиться рассмотрением одного контура, так как шарнирная точка A неподвижна. Это упрощённые КС, т. е. для них расчёты в процессах подготовки и выполнения шага осуществляются по упрощённому алгоритму. КС на рис. 85 является особенной. Кинематические расчёты в процессах подготовки и выполнения шага для этой и подобных КС осуществляются по особому алгоритму.

На рис. 86–89 представлены КС ША, корпус которых в трёхопорном состоянии имеет три степени свободы. Эти КС имеют два контура. В первый контур входят пять звеньев OG , GC , CD , DH и HA . Во второй входят два звена – EF и FB . Число подвижных контурных звеньев – семь, число связей в опорных точках A и B – четыре. Следовательно, подвижность корпуса – три.

3. Алгоритмы кинематических расчётов ША. Кинематические вычисления проводятся в опорной системе координат (ОСК). Начало ОСК размещается в опорной точке O . Ось абсцисс ОСК направлена в опорную точку A .

Кинематические расчёты для всех КС сводятся к определению относительных углов поворота звеньев ведомого двузвенника с неподвижной точкой подвеса и заданными координатами его конца (ведущей точки). Необходимые расчётные формулы получаются из расчётной схемы на рис. 90, где приняты следующие обозначения: K – точка подвеса двузвенника, xk, yk – координаты точки K в ОСК OXY , M – ведущая точка (конец) двузвенника, xm, ym – координаты точки M в ОСК, KL – длина первого звена, LM – длина второго звена, KI – ось абсцисс СК, жестко связанной с первым звеном, LN – ось абсцисс СК, жестко связанной со вторым звеном, KJ – ось, проходящая через точку K параллельно OX , KP – ось, проходящая через точку K в направлении к точке M , JKM – угол, откладываемый от оси KJ до оси KP , LKM – угол откладываемый от оси KI до оси KP , JKL – угол, откладываемый от оси KJ до оси KI , KLM – острый угол между звеньями KL и LM , ILM – угол, откладываемый от оси KI до оси LN . Здесь приняты обозначения с учётом их дальнейшего использования в качестве идентификаторов (имён полей) переменных соответствующего программного обеспечения [5].

Цель вычислений – определить относительные углы поворота звеньев JKL, ILM (если они существуют) по заданным параметрам $KL, LM, xk, yk, xm, ym, kp$, где kp – код положения двузвенника относительно оси KP , $kp=0$, если двузвенник расположен справа от оси KP , $kp=1$, если двузвенник расположен слева от оси KP (для рис. 90 $kp=0$). Условия существования искомого угла очевидны – длина отрезка KM не должна превышать сумму длин звеньев ($KL + LM \geq KM$), а модуль разности длин звеньев должен быть меньше или равен KM . Используя теорему косинусов и элементарные геометрические рассуждения из рис. 90, получим следующий алгоритм (расчётные формулы, их последовательность и логику использования) вычисления искомого угла:

$dx = xm - xk, dy = ym - yk. JKM = \pi/2$, если $dx = 0$ и $dy > 0. JKM = -\pi/2$, если $dx = 0$ и $dy < 0. JKM = \arctg(dy/dx)$, если $dx > 0. JKM = \pi + \arctg(dy/dx)$, если $dx < 0. KM^2 = dx \cdot dx + dy \cdot dy$ – квадрат длины отрезка $KM. LKM = \arccos[(KL^2 + KM^2 - LM^2)/(2 \cdot KL \cdot KM)]$, где KL^2, LM^2 – квадраты длин звеньев. $JKL = JKM + LKM$, если $kp=1. JKL = JKM - LKM$, если $kp=0. KLM = \arccos[(KL^2 + LM^2 - KM^2)/(2 \cdot KL \cdot LM)]$. $ILM = \pi - KLM$, если $kp=0. ILM = \pi + KLM$, если $kp=1$.

Рассмотрим, как сводятся кинематические расчёты для каждого из трёх классов КС к описанной схеме и представленным формулам.

Если в трёхопорном состоянии корпус ША имеет одну степень свободы, то его КС имеет один или два контура. В первый входят три звена, из которых крайние образуют с ОП шарниры (в точках O и A). Крайнее звено второго контура (если он есть) образует с ОП шарнир в точке B , а предшествующее звено связано шарниром с промежуточным звеном первого контура в точке E . Первое звено первого контура, т. е. звено, образующее с ОП шарнир в точке O , будем называть поводком. Его конец, т. е. центр шарнира между поводком и промежуточным звеном первого контура, обозначим через C . На рис. 62–77 изображены КС некоторых ША с одноподвижным корпусом в трёхопорном состоянии. На рис. 91 изображена обобщённая расчётная схема, соответствующая КС с одноподвижным корпусом. Звенья ног, находящиеся в переносном состоянии, здесь не показаны. Во-первых, их количество и компоновка у разных ША разные. Во-вторых, для расчёта углов их поворота используется другой (более простой) алгоритм, сводимый к однократному использованию схемы на рис. 90 [5].

В качестве обобщённой координаты двухконтурного шарнирного механизма на рис. 91 примем угол Q поворота поводка. Тогда точка C будет ведущей точкой двузвенника AD, DC . Точка E будет ведущей точкой двузвенника BF, FE . На рис. 91 изображены: O, A, B – опорные точки, OXY – ОСК; Q – угол поворота поводка относительно оси OX ; xb, yb – координаты точки B в ОСК; xc, yc – координаты ведущей точки C в ОСК; xe, ye – координаты ведущей точки E в ОСК; $Q1, Q3$ – углы, откладываемые от оси OX до осей первых звеньев AD и BF ведомых двузвенников AD, DC и BF, FE соответственно; $Q2, Q4$ – острые углы между звеньями ведомых двузвенников AD, DC и BF, FE соответственно.

Цель кинематических расчётов по схеме на рис. 91 – для заданного угла Q поворота поводка определить параметры положения x, y, q корпуса относительно ОСК и относительные углы поворота ног $q1, q2, q3, q4$ ША. Здесь x, y – координаты полюса ША в ОСК. В качестве полюса корпуса принята точка C . q – угол от оси OX до оси корпуса. В качестве оси корпуса принята ось,

Расчет и конструирование

исходящая из точки C и направленная в точку D . q_1, q_2, q_3 – углы, отложенные от оси корпуса до оси звена ноги, подвешенной к корпусу и замкнутой на ОП в точках O, A, B соответственно. q_4 – угол от оси бедра до оси голени ноги, замкнутой на ОП в точке B .

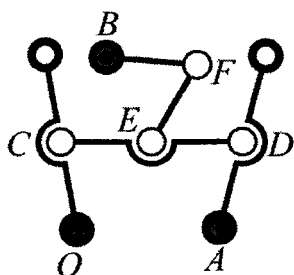


Рис. 62

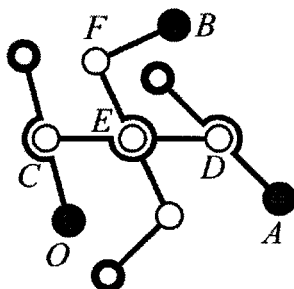


Рис. 63

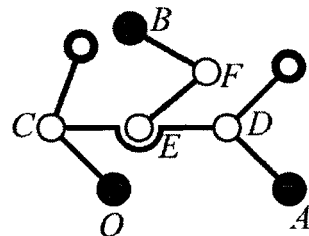


Рис. 64

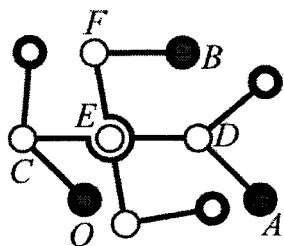


Рис. 65

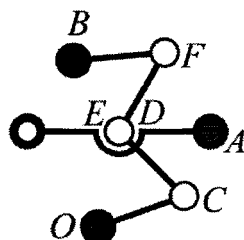


Рис. 66

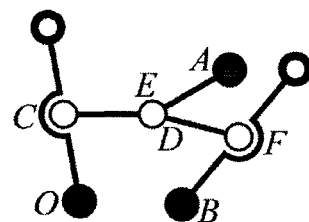


Рис. 67

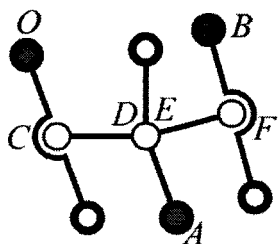


Рис. 68

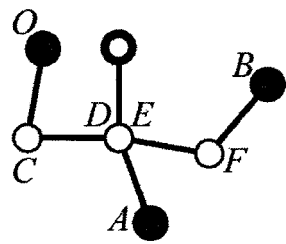


Рис. 69

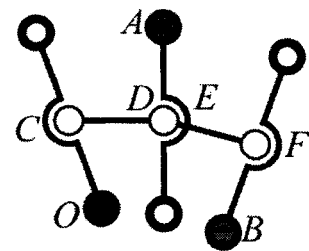


Рис. 70

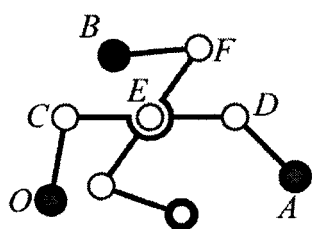


Рис. 71

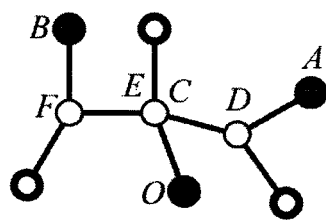


Рис. 72

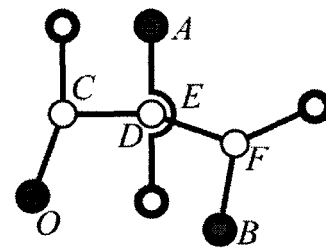


Рис. 73

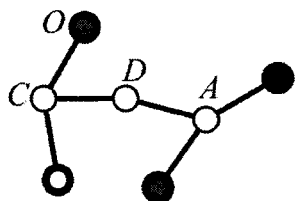


Рис. 74

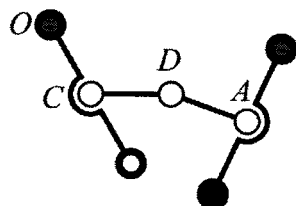


Рис. 75

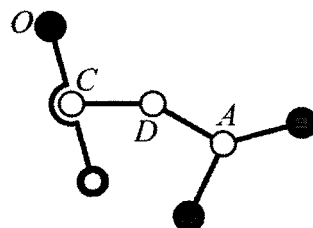


Рис. 76

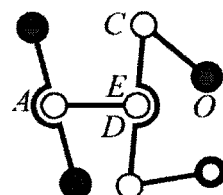


Рис. 77

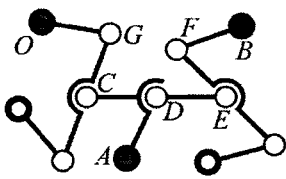


Рис. 78

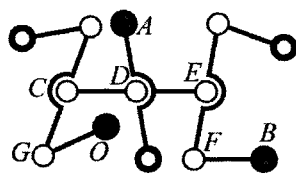


Рис. 79

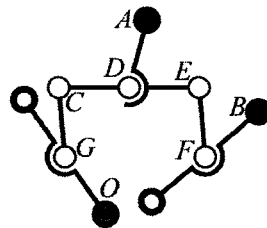


Рис. 80

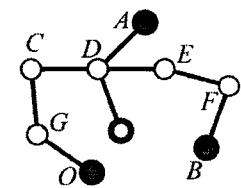


Рис. 81

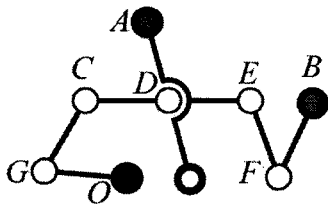


Рис. 82

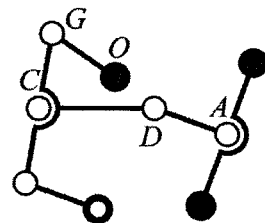


Рис. 83

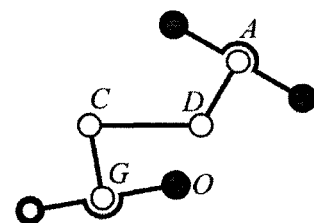


Рис. 84

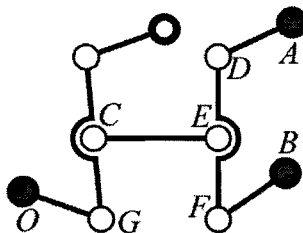


Рис. 85

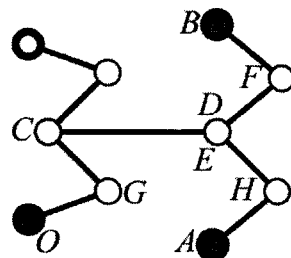


Рис. 86

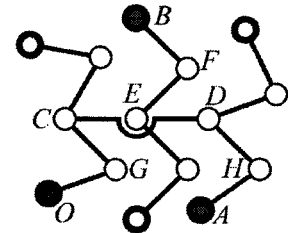


Рис. 87

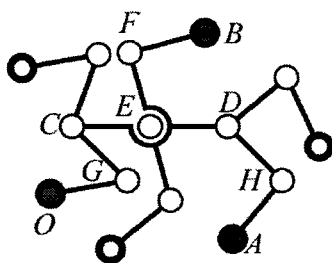


Рис. 88

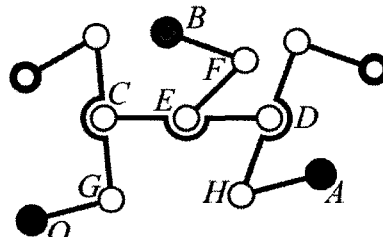


Рис. 89

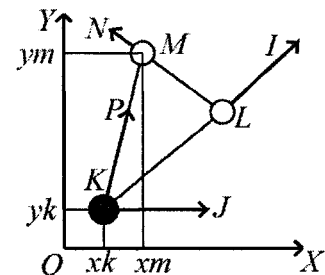


Рис. 90

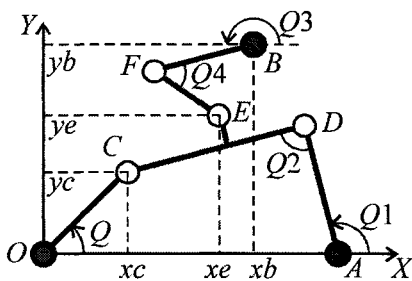


Рис. 91

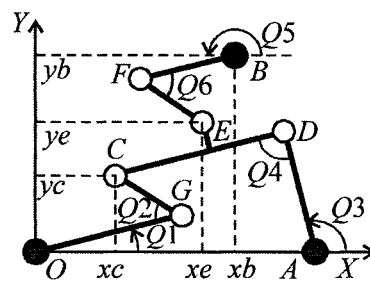


Рис. 92

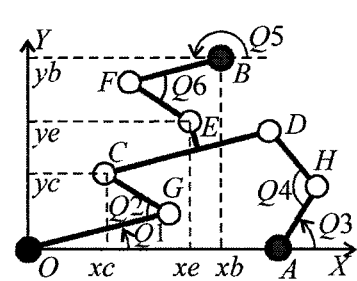


Рис. 93

Порядок вычисления параметров следующий:

- вычисление координат (x_c, y_c) ведущей точки C ;
- вычисление относительных углов поворота звеньев ведомого (точкой C) двухзвенника AD, DC (использовать общий алгоритм и схему на рис. 90, где $K=A, L=D, M=C$);
- вычисление координат (x_e, y_e) ведущей точки E ;

Расчет и конструирование

– вычисление относительных углов поворота звеньев ведомого (точкой E) двухзвенника BF , FE (использовать общий алгоритм и схему на рис. 90, где $K=B$, $L=F$, $M=E$).

Для КС с двухподвижным и трёхподвижным корпусом алгоритм вычисления параметров положения ША аналогичен. Соответствующие расчётные схемы приведены на рис. 92, 93. В схеме на рис. 92 координаты ведущей точки C задаются. В схеме на рис. 93 задаются координаты ведущей точки C и угол q поворота трёхподвижного корпуса.

С программной реализацией описанных здесь алгоритмов, а также с методикой анимации ходьбы рассмотренных ША можно познакомиться в статье [5].

4. Использование полученных результатов в учебном процессе проводится на кафедре «Системы управления и математическое моделирование» Электротехнического факультета (ЭТФ) филиала ЮУрГУ в г. Миассе в курсе «Электромеханические системы» (8-й и 9-й семестры) для специальности «Управление и информатика в технических системах» в курсовом проектировании и выполнении самостоятельных работ. Математическое и имитационное моделирование электромеханических робототехнических систем традиционно (на ЭТФ) являются основными разделами курсового проектирования электромеханических систем. Для обеспечения многовариантности технических заданий для проектирования эффективно использовать полученное многообразие структурных и кинематических схем ША. Следует заметить, что из каждой СС можно получить несколько КС в зависимости от положения точек подвеса ног. Для увеличения вариантов работ в разделе кинематического анализа в качестве поводка (для КС с одноподвижным корпусом) или первой ведущей точки (для остальных КС) можно принять любое звено или его точку. Привод каждого звена ША может быть встроенным в шарнир, или его составные части (электродвигатель, колёса редуктора, датчики угла поворота и угловой скорости вращающихся звеньев) могут располагаться на несущих конструкциях звеньев. Различные условия ходьбы, варианты препятствий, ограничения на программные траектории корпуса, устройства систем ручного управления ходьбой и многое другое позволяют обеспечить многовариантность технических заданий для курсового проектирования и самостоятельной работы студентов.

Заключение. Синтезированные структурные схемы позволяют на начальных этапах проектирования ША выбрать их кинематические схемы и проверить возможность выполнения требований технического задания для условий ходьбы, преодоления препятствий, разворотов на месте и на марше, и в целом определить возможные программные движения корпуса и ног. Эти движения необходимы для динамического анализа ША, выбора установочной мощности приводов и исследования системы управления различными режимами ходьбы проектируемых ША на основе соответствующих уравнений динамики.

Литература

1. Охоцимский, Д.Е. *Механика и управление движением автоматического шагающего аппарата* / Д.Е. Охоцимский, Ю.Ф. Голубев. – М.: Наука, 1984. – 312 с.
2. Вукобратович, М. *Шагающие роботы и антропоморфные механизмы* / М. Вукобратович. – М.: Мир, 1976 – 541 с.
3. Телегин, А.И. Алгоритмы решения первой задачи динамики произвольных систем тел / А.И. Телегин, А.В. Абросов // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение»*. – 2001. – Вып. 1. – №6 (06). – С. 3–9.
4. Телегин, А.И. Алгоритмы решения первой задачи динамики для плоских рычажных механизмов / А.И. Телегин, М.В. Тимощенко // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение»*. – 2007. – Вып. 10. – №25 (97). – С. 12–22.
5. Телегин, В.А. *Моделирование и анимация ходьбы плоских моделей шагающих аппаратов* / В.А. Телегин, М.И. Кайгородцев // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение»*. – 2008. – Вып. 11. – №10 (110). – С. 15–23.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНИМАЦИЯ ХОДЬБЫ ПЛОСКИХ МОДЕЛЕЙ ШАГАЮЩИХ АППАРАТОВ

В.А. Телегин, М.И. Кайгородцев

Предложены алгоритмы моделирования и анимации ходьбы шагающих аппаратов, описанных в статье [1]. Продемонстрировано применение для этих целей свободно распространяемых информационных технологий (SVG, CSS, JavaScript). Для построения среды имитационного моделирования ручного управления ходьбой применена архитектура MVC. Описан опыт использования полученных результатов в учебном процессе.

Введение. В статье [1] синтезировано множество структурных схем шагающих аппаратов, которые можно моделировать шарнирными механизмами на плоскости (далее ША), а также в зависимости от подвижности корпуса в трёхопорном состоянии выделены три класса кинематических схем (КС) и предложены схемы кинематических расчётов в процессах подготовки и выполнения шага. Настоящая статья является продолжением статьи [1]. Здесь на примерах изложена методика визуализации ША в статике и динамике, предложены подходы для реализации ручной и автоматической анимации движений ША и описана среда имитационного моделирования системы ручного управления ходьбой.

Для визуального моделирования и анимации движений ША предлагается использовать язык разметки двумерной векторной графики (SVG) в паре с каскадными таблицами стилей (CSS), а также язык программирования JavaScript (JS). Архитектуру MVC (Model-View-Control) эффективно использовать для определения структуры XML-приложения, особенностей кодирования SVG-моделей ША, их представления (визуализации на Web-странице) и удобного ручного управления ими. Эти технологии рекомендуются для использования по следующим причинам. Во-первых, из-за их простоты. Во-вторых, из-за их Web-ориентации. В-третьих, они взаимно дополняют друг друга. В-четвёртых, они бесплатны (распространяются свободно). Литературы по CSS, JavaScript и MVC достаточно много. Книг по SVG на русском языке практически нет, однако много информации на специализированных сайтах. Мы можем рекомендовать книгу [2], где на стр. 567–572 изложены минимальные сведения по SVG и приведены Web-ресурсы, относящиеся к SVG.






1. Схемы ША. Звенья рассматриваемых ША образуют друг с другом шарниры, оси вращения которых параллельны друг другу и перпендикулярны плоскости движения ША. В состав ША входят корпус и ноги. Каждая нога образует с корпусом шарнир, центр которого называется точкой подвеса ноги. На одном или двух концах нога имеет стопу. Звено ноги, заканчивающееся стопой, называется голенью. Если у ноги более одного звена, то предшествующее голени звено называется бедром. Устройство стопы и механизмы её связи с концами ног позволяют ей находиться в двух возможных состояниях – в опорном и в переносном. В опорном состоянии стопа образует с опорной поверхностью шарнир. При переходе в переносное состояние стопа поднимается над опорной поверхностью и вместе с концом ноги получает возможность перемещаться в новое опорное состояние для подготовки к очередному шагу. На рисунках КС изображены их виды сверху. Поэтому конструкции стоп и механизмы их связи с концами ног не показаны (элементы связи стоп с концами ноги не видны). Для рассматриваемых здесь задач в изображении этих механизмов нет необходимости. Сама стопа в опорном состоянии изображена залитым (тёмным) кругом, а в переносном – не залитым (белым) кругом. Шарнир изображается белым кругом с толщиной линии в три раза меньшей, чем у стопы. Эти особенности кодируются в стилевом файле *ctr.css*.

Из возможного многообразия ША здесь рассматриваются только те, у которых ноги имеют один тип или относятся к двум разным типам. Тип ноги может быть (см. таблицу) однозвенным (тип 1), двухзвенным (тип 2), трёхпарным (тип 3), четырёхпарным (тип 4) или пятипарным (тип 5). В первой строке таблицы приведены номера типов ног. Во второй строке – названия этих типов, и в третьей – их изображение на рисунках КС.

Расчет и конструирование

Перечисленные свойства рассматриваемых ША связаны с ограничениями, которые учитывались в процессе синтеза их структурных схем. На рис. 91, 92, 93 статьи [1] представлены расчётные схемы для каждого из трёх возможных классов ША. Эти рисунки и связанные с ними обозначения здесь используются для описания алгоритмов ходьбы рассматриваемых ША.

Таблица

Типы ног ША				
1	2	3	4	5
Однозвенная нога	Двухзвенная нога	Трёхпарная нога	Четырёхпарная нога	Пятипарная нога
				

С каждым звеном ноги жестко связана ось абсцисс системы координат (СК) с началом в шарнирной точке. С целью уменьшения громоздкости рисунков условимся эти СК не изображать, но при этом помнить, что для ноги первого типа ось абсцисс (далее ось) направлена в центр стопы. Для ноги второго типа ось бедра направлена в шарнирную точку голени, а ось голени направлена в центр стопы. Для ноги третьего типа ось направлена перпендикулярно прямолинейным участкам звена в сторону полукруга. Для ноги четвертого типа ось бедра направлена в шарнирную точку голени, а ось голени направлена перпендикулярно прямолинейным участкам в сторону полукруга. Для ноги пятого типа ось бедра направлена перпендикулярно прямолинейным участкам в сторону полукруга, а оси каждой голени направлены в центры своих стоп.

2. SVG-модели ног. Для визуализации и анимации ША удобно использовать язык SVG. Как в любом XML-словаре элементы (теги) SVG отражают предметную область, т. е. интуитивно понятны и для их практического применения достаточно познакомиться с несколькими примерами, что мы и сделаем.

Для визуализации ША в статике достаточно использовать группирующий элемент `<g>` (от слова group – группа) и следующие графические элементы (ГЭ): `<circle>` (окружность) – для разметки шарниров и стоп, `<line>` (линия) – для разметки однопарных и двухпарных звеньев ноги или многопарного корпуса с совмещёнными точками подвеса ног, `<polygon>` (полигон, многоугольник) – для разметки многопарных корпусов изображаемых многоугольниками, `<path>` (путь) – для разметки ног и многопарного корпуса, в представлении которых используются криволинейные отрезки, например, дуги окружностей.

В листинге 1 приведён SVG-документ, содержащий разметку однозвенной ноги. Если открыть файл (нога_1.svg) с этой разметкой в браузере, то на Web-странице появится рисунок как в первой ячейке третьей строки таблицы [1].

Листинг 1. SVG-разметка однозвенной ноги.

```
<?xml version="1.0"?>
<?xml-stylesheet href="str.css" type="text/css"?>
<svg version="1.1" viewBox="0 0 300 300"
width="300" height="300"
xmlns="http://www.w3.org/2000/svg">
<g transform="translate(100,150) rotate(-90)">
<g id="qn" transform="rotate(135)">
<line class="zveno" x2="100"/>
<circle class="sharnir" r="15"/>
<circle class="stopa" cx="100" r="15"/>
</g>
</g>
</svg>
```

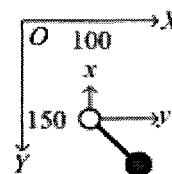


Рис. 1

Здесь первая строка является стандартной для всех XML-документов и содержит минимальный набор кода: указана только XML-версия. Во второй строке указана ссылка на внешний стилевой файл `str.css` и размечен его тип (содержимое стилевого файла приведено в листинге 5). В

следующих трёх строках описан корневой элемент SVG-документа, содержащий пять атрибутов. В первом атрибуте указана SVG-версия. Атрибут *viewBox* задаёт область просмотра документа. Первые два числа в значении атрибута представляют собой координаты $x=0$ и $y=0$ левого верхнего угла области просмотра. Атрибут *width* задаёт ширину изображения, атрибут *height* – высоту изображения. Последний атрибут указывает, что в названиях SVG-тегов префикс не используется, а значением этого атрибута является типовой адрес SVG-ресурса.

В элемент `<svg>` вложен группирующий элемент `<g>`. Значением его атрибута *transform* являются параметры (100,150) сдвига (*translate*) всей группы относительно области просмотра и угол (90) поворота (*rotate*) этой группы, где 100 – горизонтальный сдвиг (вправо), 150 – вертикальный сдвиг (вниз), 90 – угол поворота против хода часовой стрелки. Эти параметры позволяют в дальнейшем разметить точки подвеса ног к корпусу ША и указать начальные углы поворота ног относительно корпуса. Описанную группу условимся называть группой подвеса ноги. Здесь углы (по умолчанию) измеряются в градусах, сдвиги (линейные перемещения) – в относительных единицах. Положительный знак угла в разметке соответствует повороту по ходу часовой стрелки. Поэтому, чтобы наблюдать на мониторе положительный поворот звена (против хода часовой стрелки), необходимо в разметке указывать отрицательные значения углов.

В группу подвеса ноги, т. е. в первый элемент `<g>`, вложен второй группирующий элемент. Он имеет атрибут *id*, значением которого является уникальный идентификатор угла поворота ноги (в листинге 1 это – *qn*). Число после символа *q* равно уникальному номеру звена. Значением атрибута *transform* является угол поворота звена вокруг начала своей оси. В процессе анимации это значение будет меняться автоматически (программным путём), т. е. либо на основе SVG-разметки анимации, либо при помощи JS-кода. Поэтому описанную группу условимся называть группой вращения ноги относительно группы подвеса ноги.

В группу вращения ноги, т. е. во второй элемент `<g>`, вложены три ГЭ. Первый из них отнесён к классу *zveno* и размечает линию (стержень звена). Начало линии имеет координаты $x1=0, y1=0$. Конец линии имеет координаты $x2=100, y2=0$, т. е. это горизонтальная прямая длиной в 100 ед. (нулевые значения атрибутов в разметке ГЭ можно опускать, что здесь и сделано для уменьшения объёма кода). Второй ГЭ отнесён к классу *sharnir* и размечает окружность (образ шарнира ША) с центром в точке с координатами $cx=0, cy=0$ и радиусом $r=15$ ед. Последний ГЭ отнесён к классу *stopa* и размечает окружность (образ стопы) с центром в точке с координатами $cx=100, cy=0$ и радиусом $r=15$ ед. Все координаты указаны относительно СК группы вращения ноги. Важно понимать, что при изменении значения числа в скобках после кода *rotate* повернётся вся нога.

Ось абсцисс СК ноги здесь не размечена, но согласно определению она начинается в шарнирной точке и направлена в центр стопы, т. е. направлена из начала в конец ГЭ `<line>`.

На рис. 1 изображены некоторые детали взаимодействия элементов описанной разметки.

Более сложный пример содержит следующий листинг. Здесь и далее в листингах SVG-моделей не приводятся первые три и последняя строки, описанные в листинге 1.

Листинг 2. SVG-разметка двухзвенной ноги.

```
<g transform="translate(100,300) rotate(0)">
  <g id="q1" transform="rotate(0)">
    <line class="zveno" x2="100"/>
    <circle class="sharnir" r="15"/>
  <g transform="translate(100,0) rotate(0)">
    <g id="q2" transform="rotate(0)">
      <line class="zveno" x2="100"/>
      <circle class="sharnir" r="15"/>
      <circle class="stopa" cx="100" r="15"/>
    </g>
  </g>
</g>
```

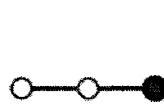


Рис. 2

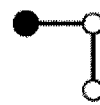


Рис. 3



Рис. 4



Рис. 5

В листинге 2 применена группа подвеса ноги с атрибутом *transform="translate(100,300) rotate(0)"*, группа вращения бедра ноги с *id="q1"*, группа подвеса голени к бедру с атрибутом *transform="translate(100,0) rotate(0)"* и группа вращения голени относительно бедра с *id="q2"*. Использование вложенных друг в друга группирующих элементов позволяет моделировать любые структуры ША. Здесь оси абсцисс СК звеньев ноги согласованы с разметками ГЭ `<line>`, т. е. их

Расчет и конструирование

начала совпадают, а направления определяются концевыми точками линий. На рис. 2–5 изображены результаты загрузки этого файла в браузере для следующих значений атрибутов *transform* групп вращения бедра и голени: *rotate(0)*, *rotate(0)* (рис. 2); *rotate(-90)*, *rotate(-90)* (рис. 3); *rotate(90)*, *rotate(0)* (рис. 4); *rotate(90)*, *rotate(90)* (рис. 5).

В следующем листинге 3 для разметки трёхпарной ноги использован ГЭ *<path>*.

Если в листинге 3 вместо ГЭ *<path>* использовать ГЭ *<line x1="-100" x2="100">*, то трёхпарная нога будет выглядеть как на рис. 6, в котором шарнир воспринимается как сложный, т. е. связывающий два подвижных звена, что неправильно (не это имеется в виду). Поэтому для разметки звена трёхпарной ноги используется ГЭ *<path>*. В значении его атрибута *d="m0,-100 10,75a25,25 0 0,1 0,50 10,75"* кодируется вид пути. Здесь использованы три команды – *m*, *l*, и *a*.

Листинг 3. SVG-разметка трёхпарной ноги.

```
<g transform="translate(200,200) rotate(0)">
  <g id="q1" transform="rotate(0)">
    <path class="zveno" d="m0,-100 10,75a25,25 0 0,1 0,50 10,75"/>
    <circle class="sharnir" r="15"/>
    <circle class="stopa" cx="-100" r="15"/>
    <circle class="stopa" cx="100" r="15"/>
  </g> </g>
```



Рис. 6



Рис. 7



Рис. 8

За командой *m* следуют координаты (0, -100) начала пути в СК группы вращения с *id="q1"*, содержащей рассматриваемый путь.

За командой *l* следуют параметры (0, 75) сдвига конца первого вертикального отрезка пути относительно его начала, которое совпадает с началом пути, здесь 0 – сдвиг по горизонтали, 75 – сдвиг по вертикали вниз.

За командой *a* следуют семь чисел (25, 25 0 0, 1 0, 50), которые кодируют эллиптическую дугу, проходящую из конца предшествующего участка пути в точку с параметрами сдвига (0, 50) относительно этого конца. Размер и ориентация дуги определяются двумя радиусами (25, 25), что соответствует окружности (как частному случаю эллипса), и углом, который указывает, как эллипс в целом повернут относительно текущей СК. Значение угла кодируется третьим числом, в нашем случае это – ноль. Центр эллипса вычисляется автоматически для удовлетворения ограничений, наложенных флагами (предпоследней парой чисел – 0, 1). Существует четыре различные дуги (два разных эллипса, каждый с двумя различными изгибами дуги), которые можно провести через две точки. Флаг большой дуги (первое число пары) и флаг изгиба (второе число пары) указывают, какая из четырех типов дуг будет нарисована. Из четырех кандидатов дуги два представляют большую дугу (не менее 180 градусов), и два представляют малую дугу (не более 180 градусов). Если флаг большой дуги равен единице, то будет выбрана одна из больших дуг, иначе (флаг большой дуги равен нулю) будет выбрана одна из меньших дуг. Если флаг изгиба равен единице, то дуга будет нарисована в направлении «положительного угла». Значение, равное нулю, заставляет рисовать дугу в направлении «отрицательного угла».

За второй командой *l* следуют параметры сдвига (0, 75) конца второго вертикального отрезка пути относительно конца эллиптической дуги.

Представление описанной разметки приведено в третьей ячейке третьей строки таблицы 1. Согласно определению ось трёхпарной ноги направлена перпендикулярно линии, соединяющей две стопы в выпуклую сторону эллиптической дуги. Если в группе вращения ноги числовое значение атрибута *transform* будет равно 90, то нога примет положение на рис. 7, если это значение равно -90, то нога примет положение как на рис. 8.

Разметка SVG-моделей остальных типов ног осуществляется путём комбинирования приведённых разметок.

3. Структура и пример SVG-модели ША. Для кинематических расчётов в процессах подготовки и выполнения каждого шага используется опорная система координат (ОСК) [1]. Поэтому разметка ША начинается с группирующего элемента, имеющего атрибут *id="ОСК"*. В значениях атрибута *transform* этого элемента используются числа (*X*, *Y*, *Q*), описывающие положение ОСК в абсолютной системе координат с началом в левом верхнем углу монитора. Здесь *X* – гори-

горизонтальный сдвиг ОСК вправо, Y – вертикальный сдвиг ОСК вниз, Q – поворот ОСК вокруг своего начала. Например, в атрибуте `transform="translate(250,100) rotate(-45)"` размечены следующие значения этих параметров: $X=250$, $Y=100$, $Q=45$.

Группирующий элемент с `id="xy"`, вложенный в предшествующий элемент `<g>`, в своём атрибуте `transform` содержит координаты (x, y) начала СК жёстко связанной с корпусом в ОСК. Эту группу будем называть группой переноса корпуса. Она содержит ещё один элемент `<g>` с `id="q"`. Эту группу будем называть группой вращения корпуса вокруг начала своей СК, так как в атрибуте `transform` этот группирующий элемент содержит угол, откладываемый от оси абсцисс ОСК до оси абсцисс системы координат корпуса (СКК). Этот `<g>`-элемент в качестве дочерних содержит, во-первых, один из ГЭ разметки корпуса, во-вторых, группу подвеса для каждой ноги. Значением атрибута `transform` i -й по порядку группы подвеса ноги являются координаты точки подвеса i -й ноги в СКК и угол поворота оси первого звена ноги, откладываемый от оси абсцисс СКК. Группа подвеса ноги содержит разметку соответствующей ноги (см. листинги 1–3).

Пример разметки SVG-модели ША приведён в листинге 4. Ось корпуса здесь не размечена, но подразумевается, что её начало находится в точке подвеса задней ноги и направлена она в точку подвеса передней ноги. В разметке у каждой группы вращения имеется свой уникальный `id`-атрибут (атрибут идентификатор). Значением этого атрибута является обозначение (имя) угла поворота соответствующего звена ноги. В листинге 4 приняты следующие идентификаторы групп вращения: q – угол поворота оси корпуса, откладываемый от оси абсцисс ОСК, $q1$ – угол поворота оси передней (трёхпарной) ноги, откладываемый от оси корпуса, $q2$ – угол поворота оси задней (трёхпарной) ноги, откладываемый от оси корпуса, $q3$ – угол поворота оси бедра средней (поддерживающей) ноги, откладываемый от оси корпуса, $q4$ – угол поворота оси голени средней ноги, откладываемый от оси бедра. В SVG-разметке анимации ША эти атрибуты используются для связи каждого элемента анимации с соответствующей группой вращения. Путём изменения атрибута `transform` в группе переноса корпуса, в группах вращения корпуса и звеньев его ног осуществляется анимация SVG-модели ША. Представление рассматриваемой разметки браузером для разных значений атрибутов перечисленных групп изображено на рис. 9–12.

Листинг 4. Фрагмент SVG-разметки ША. ГП – группа подвеса

```
<g id="ОСК" transform="translate(300,300) rotate(0)">
  <g id="xy" transform="translate(10,30)">
    <g id="q" transform="rotate(45)">
      <path class="zveno" d="m0,-100l0,75a25,25 0 0,1 0,50l0,75"/>
      <g transform="translate(100,0) rotate(0)"> // ГП передней ноги
        <g id="q1" transform="rotate(45)"> //поворот передней ноги
          <path class="zveno" d="m0,-100l0,75a25,25 0 0,1 0,50l0,75"/>
          <circle class="sharnir" r="15"/>
          <circle class="stopa" cx="100" r="15"/>
          <circle class="stopa" cx="-100" r="15"/> </g> </g>
        <g transform="translate(-100,0) rotate(0)"> // ГП задней ноги
          <g id="q2" transform="rotate(-45)"> //поворот задней ноги
            <path class="zveno" d="m0,-100l0,75a25,25 0 0,1 0,50l0,75"/>
            <circle class="sharnir" r="15"/>
            <circle class="stopa" cx="100" r="15"/>
            <circle class="stopa" cx="-100" r="15"/> </g> </g>
          <g transform="translate(0,0) rotate(0)"> // ГП средней ноги
            <g id="q3" transform="rotate(45)"> // поворот бедра
              <line class="zveno" x2="100"/>
              <circle class="sharnir" r="15"/>
              <g transform="translate(100,0)">
                <g id="q4" transform="rotate(0)"> // поворот голени
                  <line class="zveno" x2="100"/>
                  <circle class="sharnir" r="15"/>
                  <circle class="stopa" cx="100" r="15"/>
                </g></g></g> </g> </g>
            </g></g></g> </g> </g>
          </g></g></g> </g> </g>
        </g></g></g> </g> </g>
      </g></g></g> </g> </g>
```

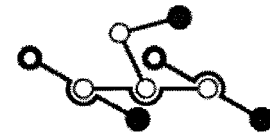


Рис. 9

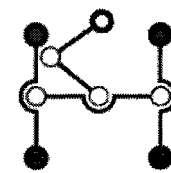


Рис. 10

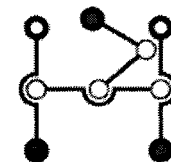


Рис. 11



Рис. 12

Расчет и конструирование

В приведённых разметках стилевое оформление КС описано во внешнем CSS-файле `str.css`, содержимое которого представлено в листинге 5.

Листинг 5. Содержимое стилевого файла `str.css`.

```
.sharnir {stroke-width: 3; fill: white; stroke: black;}
.stopa {stroke-width: 9; fill: red; stroke: black;}
.zveno {stroke-width: 6; stroke: black}
.korpus {stroke-width: 8; fill: red; stroke: black}
```

Здесь в начале каждой строки после точки указано значение атрибута `class` ГЭ из стилизуемого SVG-документа. Далее в фигурных скобках через точку с запятой перечислены стилевые пары, т. е. название (имя) стиля и его значение, разделённые друг от друга двоеточием. В листинге 5 используются следующие три стиля: `stroke-width` – толщина линии, которой изображается ГЭ, `fill` – цвет заливки замкнутых фигур, `stroke` – цвет линии. Из стиливых значений видно, что толщина линии ГЭ, с помощью которого изображается стопа, в три раза больше, чем у линии которой изображается шарнир.

4. SVG-анимация SVG-моделей ША. Для разметки процессов перемещения корпуса ША и вращений звеньев подвешенных к нему ног можно использовать несколько подходов. Архитектуре MVC соответствует подход, в котором не нарушается код SVG-модели ША. Поэтому в элементах анимации (ЭА) рекомендуется использовать ссылки на идентификатор анимируемого элемента. В этом случае ЭА `<animateTransform>` можно размещать независимо от кода SVG-модели ША. Например, если в конце листинга 4, разместить ЭА

```
<animateTransform xlink:href="#q1" attributeName="transform" type="rotate"
  from="0" to="60" begin="2s" dur="10s"/>
```

то через две секунды (`begin="2s"`) после загрузки в браузер этого листинга передняя нога (`xlink:href="#q1"`) в течении десяти секунд (`dur="10s"`) повернётся (`attributeName="transform" type="rotate"`) относительно корпуса на 60 градусов (`from="0" to="60"`) по ходу часовой стрелки. Здесь в скобках указаны атрибуты и их значения, размечающие описанный функционал. ЭА

```
<animateTransform xlink:href="#xy" attributeName="transform" type="translate"
  values="0,0;110,105;0,0" begin="2s" dur="10s"/>
```

размечает поступательное перемещение (`attributeName="transform" type="translate"`) корпуса (`xlink:href="#xy"`) вдоль линии из точки с координатами (0, 0) в точку с координатами (110, 105) и обратно (`values="0,0;110,105;0,0"`).

Для анимации звеньев в открытых ветвях, например, звеньев ноги, находящихся в состоянии переноса стопы в новое опорное положение, достаточно использовать описанный здесь подход. Вращения контурных звеньев ША являются зависимыми. В них повороты должны быть согласованы со связями. Учёт произвольных связей только средствами SVG-разметки в общем случае затруднителен. Для громоздких кинематических расчётов рекомендуется дополнительно использовать язык программирования. Но для анимации простых походок некоторых ША можно обойтись только SVG-средствами.

Для разметки трёхсекундной анимации рассматриваемого ША из положения на рис. 11 в положение на рис. 12 плоскопараллельным шагом, т. е. когда ось корпуса не вращается, достаточно применить к SVG-модели в листинге 4 следующие ЭА

```
<animateTransform id="XY" xlink:href="#xy" attributeName="transform" type="translate"
  values="100,-100; 120,-83; 145,-67; 168,-56; 170,-50; 182,-48 " dur="3s" begin="0s"/>
<animateTransform id="Q1" xlink:href="#q1" attributeName="transform" type="rotate"
  from="0" to="60" dur="3s" begin="0s"/>
<animateTransform id="Q2" xlink:href="#q2" attributeName="transform" type="rotate"
  from="0" to="60" dur="3s" begin="0s"/>
<animateTransform id="Q3" xlink:href="#q3" attributeName="transform" type="rotate"
  values="-45, -49, -53, -57, -61, -65" dur="3s" begin="0s"/>
<animateTransform id="Q4" xlink:href="#q4" attributeName="transform" type="rotate"
  values="-115, -112, -109, -108, -107, -106" dur="3s" begin="0s"/>
```

Здесь считается, что максимальный размах передней и задней ноги с учётом конструктивных ограничений составляет 120° , т. е. от -60° до 60° . Для разметки числовых значений координат начала СКК и углов поворота звеньев средней ноги используются атрибуты `values="набор`

значений". Наборы значений вычисляются заранее и заносятся в качестве значений атрибута *values* соответствующего ЭА.

Более общим является подход, когда анимируемые значения всех переменных записываются в атрибут *values* ЭА *animateTransform*. Поэтому с целью последующего программного формирования и записи этих значений в атрибуты *values* рекомендуется идентифицировать каждый ЭА, что мы и сделали, присвоив ЭА идентификаторы *XY, Q, Q1, Q2, Q3, Q4*. Эти идентификаторы используются для эффективного поиска ЭА и связи JS-функций, вычисляющих анимируемые значения с атрибутами *values* найденных ЭА. Способ формирования и записи значений в атрибуты *values* описан в конце следующего раздела.

5. JS-анимация SVG-моделей ША. Вычисление набора значений углов поворота контурных звеньев ША перед их SVG-анимацией удобно осуществлять при помощи соответствующего JS-кода. Для ручной подготовки и выполнения шага удобно иметь средство, позволяющее перемещать корпус и поворачивать звенья подвешенных ног путём «кликов» мышкой по соответствующим элементам имитируемой панели управления или видимым элементам управляемого объекта. В листинге 6 приведён JS-код, позволяющий осуществлять повороты звеньев ног любого ША относительно его корпуса и изменять состояния каждой стопы путём «кликов» кнопками мыши во внутренние области соответствующих кругов.

Листинг 6. JS-код ручной анимации SVG-моделей ША

```

window.onload=assignKeys; var dq = 5; // приращение угла поворота шарнира
// Функция изменения угла поворота шарнира
function q(evt) { var cir = evt.target; var X = cir.parentNode; if (evt.button == 1) d=-dq; else d = dq;
  db=parseFloat(cir.getAttribute('q'))+d; cir.setAttribute('q',db);
  X.setAttribute('transform', 'rotate(+'db+'')'); }
// Функция изменения состояния стопы
function stp(evt) {var X = evt.target; s = X.getAttribute('fill');
  if (s == 'white') X.setAttribute('fill', 'red') else X.setAttribute('fill', 'white'); }
// Функция настройки ручной анимации
function assignKeys() { var keys = document.getElementsByTagName('circle');
  for(var i=0; i<keys.length; i++) { var key=keys.item(i); var c=key.getAttribute('class');
  if (c == 'sharnir') { key.setAttribute('onclick', 'q(evt)');
  var qstr=key.parentNode.getAttribute('transform'); key.setAttribute('q',qstr.substring(7,qstr.length-1));}
  else {key.setAttribute('onclick','stp(evt)'); key.setAttribute('fill','red');} } }

```

Здесь по событию «конец загрузки документа в окно» (*window.onload*) вызывается функция *assignKeys()* настройки ручной анимации, которая выполняет следующие действия: формирует список *key* элементов *<circle>* из загруженного SVG-документа; в элементы класса *sharnir* заносит атрибуты *onclick="q(evt)"*, которые обеспечивают вызов функции *q(evt)* после каждого «клика» кнопкой мыши на шарнирной окружности; в элементы класса *sharnir* заносит также XML-атрибуты *q="целое число"*, где *целое число* берётся из атрибута *transform* группы вращения звена, и в дальнейшем используется функцией *q(evt)* в качестве текущего значения угла поворота этого звена; в остальные элементы заносит атрибуты *onclick="stp(evt)"*, которые вызывают функцию *stp(evt)* после каждого «клика» кнопкой мыши на окружности класса *stopa*, а также атрибуты *fill="red"*, что обеспечивает изменение состояния стопы. Вызов функции *q(evt)* при нажатии левой кнопки мыши приводит к увеличению угла поворота звена на *dq=5* градусов. Вызов функции *q(evt)* при нажатии любой другой кнопки мыши приводит к уменьшению текущего угла поворота звена на 5 градусов. Вызов функции *stp(evt)* при нажатии левой кнопки мыши приводит к изменению цвета заливки круга стопы с красного на белый и наоборот.

Аналогично устроены и другие JS-функции, обеспечивающие необходимый функционал для ручной и автоматической анимации ходьбы ША. Например, метод обрабатываемого SVG-документа *getElementById("Q3").setAttribute("values", calcQ3())* находит в SVG-модели анимации ЭА с *id="Q3"* и в его атрибут *values* записывает результат вызова JS-функции *calcQ3()*, которая вычисляет требуемые значения углов поворота бедра средней ноги относительно корпуса и возвращает их в виде строки, выполняющей роль значения атрибута *values*. После аналогичных операций со всеми ЭА можно запускать SVG-анимацию всей SVG-модели ША.

Важно обратить внимание на то, что разработанный JS-код программным путём настраивает любой экземпляр статической SVG-модели ША для её подготовки к ручной и автоматической

Расчет и конструирование

анимации. Например, создавая события *onclick* программным путём, можно использовать код в листинге 6 для автоматической анимации ША, но код для выбора последовательности действий и логики автоматического управления должен разрабатываться дополнительно. Таким образом, не меняя SVG-модели ША, создан код для ручного управления ходьбой, который можно использовать для имитации автоматического управления.

6. Имитация ручного управления ходьбой ША. В кинематических расчётах процессов подготовки и выполнения шага используется общий для всех ША выбранного класса JS-объект *ОКС_j*, где *j* – число подвижностей корпуса в трёхопорном состоянии ША, и частный JS-объект, который отражает кинематические особенности исследуемого ША. Например, частный объект *S2312* соответствует SVG-модели ША (в листинге 4) с двумя трёхпарными ногами и одной двузвенной поддерживающей ногой (костыльём). Принцип кодирования схем ША описан в статье [1]. Объект *ОКС_j* служит для описания и изменения положения ОСК относительно абсолютной СК. Он содержит объекты, которые обеспечивают изменение положений корпуса относительно ОСК и контурных звеньев ног относительно корпуса. Частный JS-объект служит для описания и изменения положений переносных звеньев ног относительно корпуса.

В качестве интерфейсных элементов имитируемого пульта ручного управления рекомендуется использовать видимые части КС ША. Это может быть сам ША или его копия (клон).

Для ША с одноподвижным корпусом роль управляющего элемента может выполнять шарнир поводка. Каждый «клик» по этому шарниру приводит к перемещению корпуса и контурных звеньев его ног относительно ОСК. Величины этих перемещений зависят от заданного квантового угла поворота поводка, например, $dq=5$ (градусов). Переносные звенья ног можно вращать независимо друг от друга способом, который описан в предшествующем разделе. Изменение состояния стоп удобно осуществлять «кликами» левой кнопкой мыши на круге, представляющем соответствующую стопу.

Для ША с двухподвижным корпусом можно использовать JS-код, позволяющий при помощи нажатой кнопки мыши перетаскивать корпус в новое положение (без изменения ориентации относительно ОСК). Однако расчёты по громоздким формулам с различными тригонометрическими функциями не позволяют просто и эффективно осуществлять такой способ имитации управления поступательным перемещением корпуса. Проще использовать JS-код обработки клавиш, например, за клавишами «стрелка вверх», «стрелка вниз» закрепить управление поступательным перемещением корпуса вдоль оси ординат ОСК, а за клавишами «стрелка вправо», «стрелка влево» закрепить управление поступательным перемещением корпуса вдоль оси абсцисс ОСК.

Для ША с трёхподвижным корпусом аналогично при помощи клавиш можно управлять поступательным перемещением корпуса относительно ОСК и его поворотом вокруг начала СКК.

В процессе ручного управления перемещением ША значения всех переменных параметров движения сохраняются в оперативной памяти и при необходимости их можно запомнить, например, записав в качестве значений атрибута *values* соответствующих ЭА. Такой подход позволяет вручную формировать, запоминать, редактировать и автоматически воспроизводить процессы ходьбы исследуемых ША.

Следует заметить, что для построения программных движений (ПД) ША такой подход является наиболее эффективным. Он аналогичен известному способу формирования ПД манипуляционных систем роботов по первому циклу, в котором оператор перемещает захват манипулятора (или кинематически подобного задающего устройства) вдоль программной траектории. При этом в памяти программноносителя записываются значения непосредственно управляемых углов поворота звеньев. Аналитическая разработка ПД манипуляторов является достаточно сложной (в вычислительном смысле) задачей. Аналитическая разработка ПД ША ещё сложнее из-за наличия нескольких замкнутых контуров и открытых ветвей, возможных столкновений контурных и переносных звеньев друг с другом и с корпусом, необходимости учёта внешней среды и препятствий и других особенностей ША.

Действительно, только расчетным путём очень сложно сформировать ПД, например, ША на рис. 9. Можно или нет, не переставляя среднюю ногу, избежать столкновений её звеньев с задней ногой в процессе завершения начатого (на рис. 9) полного шага? Из рис. 10 видно, что столкновение может произойти, если звенья ног находятся на одном уровне. Если же звенья средней ноги по уровню ниже крайних ног и в положении на рис. 10 стопы крайних ног левого борта нахо-

дятся в переносном состоянии, то такого столкновения можно избежать. Возможен также вариант изменения конфигурации звеньев средней ноги, т. е. перевод их из положения на рис. 10 (коленкой назад) в положение на рис. 11 (коленкой вперёд). Для анализа подобных состояний ША очень важно иметь ручной режим управления его ходьбой.

7. MVC-архитектура среды имитационного моделирования ША. Для создания эффективного программного обеспечения процессов расчёта и моделирования ходьбы использована архитектура MVC (Model – модель, View – визуализация или представление, Control – управление), которая позволяет полностью разделить весь код на три независимые части – модель исследуемой системы, представление системы и графического пользовательского интерфейса, а также управление поведением системы. Согласно принципам архитектуры MVC представление выполняет две основные задачи. Во-первых, предоставляет визуальный интерфейс пользователя для вызова событий, обрабатываемых контроллером. Во-вторых, осуществляет своё обновление в соответствии с изменившейся моделью. Интерактивные средства среды имитационного моделирования определяют программисты, дизайнеры и художники. Если эти специалисты в разных лицах, то представление становится областью столкновения их интересов и предметных областей. Неразумно (неэффективно) предлагать дизайнеру писать код, а программиста привлекать к рисованию. Желательно максимально разделить их деятельность и минимизировать области их пересечения. Для этого коды SVG, CSS и JS должны располагаться в отдельных файлах. Но размещение кодов модели, представления и управления в отдельных файлах – это только необходимое условие. Желательно также, чтобы эти файлы и содержащиеся в них коды поддерживались независимо друг от друга. Согласно принципам MVC представление и модель не должны непосредственно взаимодействовать друг с другом, поэтому у нас они разделены.

Логика и управление описываются в анимационных SVG-элементах и JS-коде, которые у нас не пересекаются друг с другом. Для того, чтобы разделить контроллер и представление, использован код присоединения обработчиков событий к SVG-элементам программными средствами (см., например, функцию *assignKeys()* листинга 6). Вместо реализации встроенного обработчика использованы атрибуты *id*, *class* и JS-код автоматического встраивания анимационных атрибутов в группы переноса (для корпуса) и вращения (для корпуса и звеньев ног). Модель отображается в структуре JS-объектов и SVG-разметке ША. Особенности визуализации (представления внешнего вида ША на Web-странице монитора или на других устройствах) описываются в глобальных (внешних) стилевых таблицах. Логика и управление анимацией описаны в моделях процессов, а также в SVG-элементах анимации и JS-функциях.

8. Использование описанных методик в учебном процессе проводится на кафедре «Системы управления и математическое моделирование» Электротехнического факультета (ЭТФ) филиала ЮУрГУ в г. Миассе в курсе «Практическое программирование» (7-й семестр) для специальности «Управление и информатика в технических системах» в лабораторных и самостоятельных работах студентов. С появлением и быстрым развитием XML-технологий, эффективных архитектур и паттернов проектирования программного обеспечения возникли и ежегодно увеличиваются (на ЭТФ) задания по их использованию в лабораторных и самостоятельных работах студентов. Многовариантность структурных и кинематических схем ША позволяют формулировать практически не повторяющиеся задания для разметки SVG-моделей ША, устройств ручного управления ходьбой, ландшафта опорной поверхности и путей перемещения корпуса ША, препятствий на этих путях и многого другого.

Заключение. Предложенные SVG-модели ША, описанные методики их анимации и архитектура построения среды имитационного моделирования ША позволяют на начальных этапах проектирования новых ША визуально исследовать кинематические возможности их ходьбы.

Литература

1. Телегин, А.И. Структурный синтез и кинематический анализ плоских моделей шагающих аппаратов / А.И. Телегин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2008. – Вып. 11. – №10 (110). – С. 3–14.
2. Дейтел, Х.М. Как программировать на XML / Х.М. Дейтел, П.Дж. Дейтел, Т.Р. Ниетто, Т.М. Лиин, П. Садху. Пер. с англ. – М.: ЗАО «Издательство БИНОМ», 2005. – 944 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КВАТЕРНИОНОВ ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ МЕХАНИЗМОВ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ КИНЕМАТИЧЕСКИМИ ЦЕПЯМИ

В.А. Смирнов, В.Б. Федоров

На примере механизма с параллельными кинематическими цепями, имеющего три степени свободы, показана возможность использования кватернионов при построении математических моделей таких механизмов.

Одним из путей совершенствования технологического оборудования является использование при его построении нетрадиционных кинематических схем. Часто под такими схемами понимают схемы механизмов, имеющих параллельные кинематические цепи, связывающие исполнительный орган с основанием [1–3].

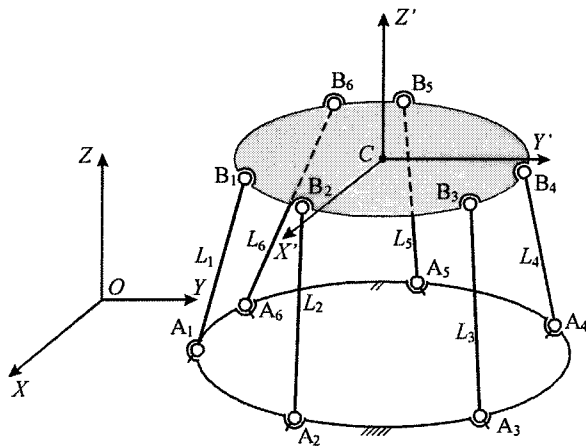


Рис. 1

Наиболее известным механизмом с параллельными кинематическими цепями (МПКЦ) является платформа Стюарта – шестикординатный механизм платформенного типа [4], схема которого показана на рис. 1. В данном механизме платформа соединена с основанием посредством шести штанг длиной L_i . Каждая из штанг соединена с платформой сферическим шарниром B_i , с основанием – через карданный шарнир A_i .

Длины штанг L_i целесообразно принять за обобщенные координаты рассматриваемого механизма, так как они однозначно описывают пространственную ориентацию платформы и удобны с точки зрения управления оборудованием, построенным на базе этого механизма.

Однако с точки зрения практического использования более полезны параметры, непосредственно характеризующие положение платформы. Назовем эти параметры выходными координатами механизма. В качестве выходных координат могут выступать координаты сферических шарниров B_i .

Математическая модель механизма должна связывать его обобщенные и выходные координаты:

$$L_i^2 = (x_{A_i} - x_{B_i})^2 + (y_{A_i} - y_{B_i})^2 + (z_{A_i} - z_{B_i})^2, \quad i=1...6. \quad (1)$$

В шесть уравнений (1) входят шесть обобщенных координат и 18 выходных координат. Следовательно, не все выходные координаты являются независимыми. Поэтому уравнения (1) должны быть дополнены 12 уравнениями связи вида [5]

$$(x_{B_i} - x_{B_j})^2 + (y_{B_i} - y_{B_j})^2 + (z_{B_i} - z_{B_j})^2 = |B_i B_j|^2, \quad (2)$$

где $i \neq j$ и расстояния между шарнирами B_i и B_j известны и постоянны.

Выбором иных выходных координат можно существенно упростить математическую модель. Можно принять в качестве выходных координат механизма три линейные координаты некоторой характерной точки C платформы, назовем ее полюсом, в неподвижной системе координат $OXYZ$ и три угловые координаты, определяющие разворот платформы вокруг полюса из некоторого начального состояния.

В качестве выходных угловых координат могут выступать, например, углы Крылова: угол рыскания ψ , угол тангажа ϑ , угол крена γ [6]. Данные углы позволяют пересчитать координаты

ты сферических шарниров, заданные в системе координат $CX'Y'Z'$, в систему координат $OXYZ$ [5]:

$$\begin{pmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \\ z_{B_i} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & x_C \\ m_1 & m_2 & m_3 & y_C \\ n_1 & n_2 & n_3 & z_C \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_{B_i} \\ y'_{B_i} \\ z'_{B_i} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $l_1 = \cos \psi \cos \gamma + \sin \vartheta \sin \psi \sin \gamma$; $l_2 = \sin \psi \cos \vartheta$; $l_3 = -\cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma$;
 $m_1 = -\sin \psi \cos \gamma + \sin \vartheta \cos \psi \sin \gamma$; $m_2 = \cos \psi \cos \vartheta$; $m_3 = \sin \psi \sin \gamma + \cos \psi \sin \vartheta \cos \gamma$;
 $n_1 = \cos \vartheta \sin \gamma$; $n_2 = -\sin \vartheta$; $n_3 = \cos \vartheta \cos \gamma$.

В этом случае уравнения (1) после преобразований примут следующий вид:

$$\begin{aligned} L_i^2 = & (x_{A_i} - x_C)^2 + (y_{A_i} - y_C)^2 + (z_{A_i} - z_C)^2 + x_{B_i}^2 + y_{B_i}^2 + z_{B_i}^2 + \\ & + 2[(C\psi C\gamma + S\vartheta S\psi S\gamma)x'_{B_i} + S\psi C\vartheta y'_{B_i} + (S\psi S\vartheta C\gamma - C\psi S\gamma)z'_{B_i}](x_C - x_{A_i}) + \\ & + 2[(S\vartheta C\psi S\gamma - S\psi C\gamma)x'_{B_i} + C\psi C\vartheta y'_{B_i} + (S\psi S\gamma + C\psi S\vartheta C\gamma)z'_{B_i}](y_C - y_{A_i}) + \\ & + 2[C\vartheta S\psi x'_{B_i} - S\vartheta y'_{B_i} + C\vartheta C\psi z'_{B_i}](z_C - z_{A_i}), \quad i=1..6, \end{aligned}$$

где для сокращения записи введены обозначения: $S\psi = \sin \psi$, $C\psi = \cos \psi$ и т. д.

Пусть необходимо составить математическую модель для механизма, показанного на рис. 2. Количество степеней свободы этого механизма $H = 6(8-1) - 3 \cdot 3 - 5 \cdot 6 = 3$. Следовательно, пространственная ориентация платформы должна описываться тремя обобщенными координатами.

Примем, что обобщенными координатами являются длины штанг L_i , выходными будем считать координаты сферических шарниров B_i в неподвижной системе координат $OXYZ$. Запишем уравнения, связывающие обобщенные и выходные координаты:

$$L_i^2 = (x_{A_i} - x_{B_i})^2 + (y_{A_i} - y_{B_i})^2 + (z_{A_i} - z_{B_i})^2, \quad i=1..3. \quad (4)$$

В уравнения (4) входят 9 координат сферических шарниров, следовательно эти уравнения должны быть дополнены 6 уравнениями связи. Однако для рассматриваемого механизма можно записать только три уравнения, аналогичные (2):

$$\begin{aligned} (x_{B_1} - x_{B_2})^2 + (y_{B_1} - y_{B_2})^2 + (z_{B_1} - z_{B_2})^2 &= |B_1 B_2|^2; \\ (x_{B_2} - x_{B_3})^2 + (y_{B_2} - y_{B_3})^2 + (z_{B_2} - z_{B_3})^2 &= |B_2 B_3|^2; \\ (x_{B_1} - x_{B_3})^2 + (y_{B_1} - y_{B_3})^2 + (z_{B_1} - z_{B_3})^2 &= |B_1 B_3|^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Остальные уравнения связи должны быть записаны из каких-то иных условий, например, учитывая, что точки B_i – центры соответствующих шарниров, лежат в заданных плоскостях.

На рис. 2 показана плоскость, в которой лежит точка B_1 . Данная плоскость проходит через штангу L_1 перпендикулярно прямой, являющейся осью вращения шарнира A_1 . Если ось вращения шарнира A_1 задана уравнением

$$\frac{x - x_{A_1}}{l_{A_1}} = \frac{y - y_{A_1}}{m_{A_1}} = \frac{z - z_{A_1}}{n_{A_1}},$$

где l_{A_1} , m_{A_1} , n_{A_1} – направляющие косинусы в системе координат $OXYZ$, то уравнение плоскости, перпендикулярной этой прямой и проходящей через точку B_1 , будет иметь вид [8]

$$l_{A_1}(x - x_{B_1}) + m_{A_1}(y - y_{B_1}) + n_{A_1}(z - z_{B_1}) = 0.$$

Так как эта плоскость проходит через точку пересечения штанги L_1 с осью вращения шарнира A_1 (точку A_1), то можно записать дополнительное уравнение связи

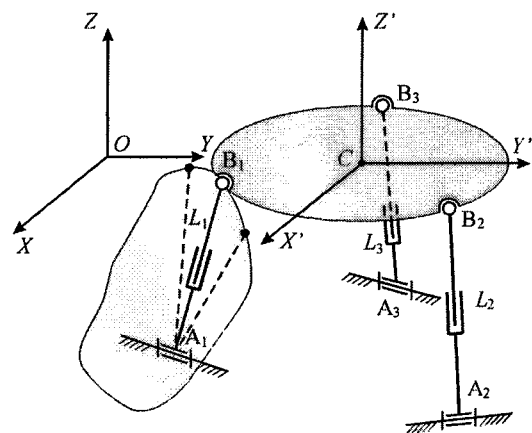


Рис. 2

Расчет и конструирование

$$l_{A_1}(x_{A_1} - x_{B_1}) + m_{A_1}(y_{A_1} - y_{B_1}) + n_{A_1}(z_{A_1} - z_{B_1}) = 0.$$

Аналогично для остальных штанг:

$$l_{A_2}(x_{A_2} - x_{B_2}) + m_{A_2}(y_{A_2} - y_{B_2}) + n_{A_2}(z_{A_2} - z_{B_2}) = 0;$$

$$l_{A_3}(x_{A_3} - x_{B_3}) + m_{A_3}(y_{A_3} - y_{B_3}) + n_{A_3}(z_{A_3} - z_{B_3}) = 0.$$

Оси вращения цилиндрических шарниров обычно лежат в плоскостях, параллельных плоскости OXY . В этом случае $n_{A_1} = n_{A_2} = n_{A_3} = 0$ и дополнительные уравнения связи несколько упрощаются:

$$l_{A_1}(x_{A_1} - x_{B_1}) + m_{A_1}(y_{A_1} - y_{B_1}) = 0;$$

$$l_{A_2}(x_{A_2} - x_{B_2}) + m_{A_2}(y_{A_2} - y_{B_2}) = 0; \quad (6)$$

$$l_{A_3}(x_{A_3} - x_{B_3}) + m_{A_3}(y_{A_3} - y_{B_3}) = 0.$$

Совместное решение девяти уравнений (4)–(6) позволит определить выходные координаты по известным обобщенным координатам, т. е. решить прямую задачу о положениях.

При решении обратной задачи о положениях необходимо задать три выходные координаты и с использованием уравнений (4)–(6) определить обобщенные координаты – длины штанг L_i .

Если при функционировании механизма представляет интерес пространственное положение его платформы, то в качестве выходных координат целесообразно использовать координаты полюса C в системе координат $OXYZ$ и три угловые координаты, характеризующие поворот платформы вокруг полюса – углы Крылова. В этом случае для решения задач о положениях потребуется совместно решать шесть уравнений – по числу выходных координат механизма:

$$\begin{aligned} L_1^2 &= (x_{A_1} - l_1 x'_{B_1} - l_2 y'_{B_1} - l_3 z'_{B_1} - x_C)^2 + (y_{A_1} - m_1 x'_{B_1} - m_2 y'_{B_1} - m_3 z'_{B_1} - y_C)^2 + \\ &+ (z_{A_1} - n_1 x'_{B_1} - n_2 y'_{B_1} - n_3 z'_{B_1} - z_C)^2; \\ L_2^2 &= (x_{A_2} - l_1 x'_{B_2} - l_2 y'_{B_2} - l_3 z'_{B_2} - x_C)^2 + (y_{A_2} - m_1 x'_{B_2} - m_2 y'_{B_2} - m_3 z'_{B_2} - y_C)^2 + \\ &+ (z_{A_2} - n_1 x'_{B_2} - n_2 y'_{B_2} - n_3 z'_{B_2} - z_C)^2; \\ L_3^2 &= (x_{A_3} - l_1 x'_{B_3} - l_2 y'_{B_3} - l_3 z'_{B_3} - x_C)^2 + (y_{A_3} - m_1 x'_{B_3} - m_2 y'_{B_3} - m_3 z'_{B_3} - y_C)^2 + \\ &+ (z_{A_3} - n_1 x'_{B_3} - n_2 y'_{B_3} - n_3 z'_{B_3} - z_C)^2; \\ l_{A_1}(x_{A_1} - l_1 x'_{B_1} - l_2 y'_{B_1} - l_3 z'_{B_1} - x_C) + m_{A_1}(y_{A_1} - m_1 x'_{B_1} - m_2 y'_{B_1} - m_3 z'_{B_1} - y_C) &= 0; \\ l_{A_2}(x_{A_2} - l_1 x'_{B_2} - l_2 y'_{B_2} - l_3 z'_{B_2} - x_C) + m_{A_2}(y_{A_2} - m_1 x'_{B_2} - m_2 y'_{B_2} - m_3 z'_{B_2} - y_C) &= 0; \\ l_{A_3}(x_{A_3} - l_1 x'_{B_3} - l_2 y'_{B_3} - l_3 z'_{B_3} - x_C) + m_{A_3}(y_{A_3} - m_1 x'_{B_3} - m_2 y'_{B_3} - m_3 z'_{B_3} - y_C) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения (7) получены из (4) и (6) с использованием (3). Уравнения (5) исключены из рассмотрения, так как при подстановке в них координат сферических шарниров, рассчитанных с использованием (3), они превращаются в тождества.

Из шести выходных координат только три являются независимыми. Принять, какие из выходных координат использовать в качестве независимых, т. е. для каких координат задавать значения при решении обратной задачи о положениях, зачастую можно только по результатам численного решения прямой задачи для различных значений обобщенных координат.

Покажем, как могут быть решены прямая и обратная задачи о положениях для рассматриваемого механизма с использованием кватернионов.

Введем в рассмотрение систему координат $A_1 X_1 Y_1 Z_1$, оси которой сонаправлены соответствующим осям системы координат $OXYZ$, и вектор \vec{r}_1 , начало которого совпадает с точкой A_1 (рис. 3), а координаты равны $r_{1X} = 0$, $r_{1Y} = 0$, $r_{1Z} = L_1$. Очевидно, что вектор \vec{r}_1 соответствует вертикальному положению штанги L_1 . Положению этой штанги при работе механизма соответствует вектор \vec{r}_1^* . С использованием математического аппарата кватернионов [7] переход от вектора \vec{r}_1 к вектору \vec{r}_1^* можно записать как

$$\vec{r}_1^* = \Lambda_1 \circ \vec{r}_1 \circ \tilde{\Lambda}_1,$$

где Λ_1 – нормированный кватернион, заданный в системе координат $A_1X_1Y_1Z_1$; $\tilde{\Lambda}_1$ – кватернион, сопряженный с Λ_1 ; \circ – символ операции умножения кватернионов.

Координаты точки B_1 конца вектора \vec{r}_1 определяются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_{B_1} \\ y_{B_1} \\ z_{B_1} \end{pmatrix} = \Lambda_1 \circ \vec{r}_1 \circ \tilde{\Lambda}_1 + \begin{pmatrix} x_{A_1} \\ y_{A_1} \\ z_{A_1} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Аналогично могут быть получены координаты точек B_2 и B_3 .

Кватернион Λ как гиперкомплексное число записывается в следующей форме:

$$\Lambda = \lambda_0 + i_1\lambda_1 + i_2\lambda_2 + i_3\lambda_3, \quad (9)$$

где λ_j – действительные числа; i_j – мнимые единицы. Для нормированного кватерниона

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1. \quad (10)$$

Кватернион $\tilde{\Lambda}$, сопряженный с Λ , записывается как

$$\tilde{\Lambda} = \lambda_0 - i_1\lambda_1 - i_2\lambda_2 - i_3\lambda_3. \quad (11)$$

Применительно к задаче описания вращения твердого тела, имеющего закрепленную точку, мнимые единицы i_j трактуются как орты некоторой прямоугольной системы координат. При таком подходе параметры λ_j определяют направление оси поворота твердого тела в системе координат, задаваемой ортами i_j ; параметр λ_0 характеризует угол \mathcal{G}^* поворота тела вокруг этой оси: $\lambda_0 = \cos \mathcal{G}^*/2$.

Примем, что для кватерниона Λ_1 орты i_j сонаправлены осям системы координат $A_1X_1Y_1Z_1$. С учетом (9) и (11) и свойств кватернионов [7] распишем преобразование (8):

$$\begin{aligned} x_{B_1} &= (\lambda_{01}^2 + \lambda_{11}^2 - \lambda_{21}^2 - \lambda_{31}^2) \cdot r_{1X} + 2(\lambda_{11}\lambda_{21} - \lambda_{01}\lambda_{31}) \cdot r_{1Y} + 2(\lambda_{11}\lambda_{31} + \lambda_{01}\lambda_{21}) \cdot r_{1Z} + x_{A_1}; \\ y_{B_1} &= 2(\lambda_{11}\lambda_{21} + \lambda_{01}\lambda_{31}) \cdot r_{1X} + (\lambda_{01}^2 + \lambda_{21}^2 - \lambda_{11}^2 - \lambda_{31}^2) \cdot r_{1Y} + 2(\lambda_{21}\lambda_{31} - \lambda_{01}\lambda_{11}) \cdot r_{1Z} + y_{A_1}; \\ z_{B_1} &= 2(\lambda_{11}\lambda_{31} - \lambda_{01}\lambda_{21}) \cdot r_{1X} + 2(\lambda_{21}\lambda_{31} + \lambda_{01}\lambda_{11}) \cdot r_{1Y} + (\lambda_{01}^2 + \lambda_{31}^2 - \lambda_{11}^2 - \lambda_{21}^2) \cdot r_{1Z} + z_{A_1}. \end{aligned}$$

Так как $r_{1X} = r_{1Y} = 0$, $r_{1Z} = L_1$ и $\lambda_{31} = 0$, полученные выражения существенно упрощаются:

$$x_{B_1} = 2\lambda_{01}\lambda_{21}L_1 + x_{A_1}; \quad y_{B_1} = y_{A_1} - 2\lambda_{01}\lambda_{11}L_1; \quad z_{B_1} = (2\lambda_{01}^2 - 1)L_1 + z_{A_1}. \quad (12)$$

Условие $\lambda_{31} = 0$ следует из того, что любое положение штанги можно рассматривать как поворот в шарнире A_1 из исходного вертикального положения на угол \mathcal{G}^* вокруг оси, лежащей в плоскости $X_1A_1Y_1$. Причем ориентация этой оси в плоскости задана, что устанавливает связь между компонентами кватерниона: $\lambda_{21} = k_1\lambda_{11}$, $k_1 = m_{A_1}/l_{A_1}$. Выражение для координаты z_{B_1} записано с использованием условия (10) нормирования кватерниона.

Для определения параметров кватернионов запишем с использованием (12) уравнения вида

$$\begin{aligned} (x_{B_i} - x_{B_j})^2 + (y_{B_i} - y_{B_j})^2 + (z_{B_i} - z_{B_j})^2 &= |B_j B_i|^2: \\ (2k_2\lambda_{02}\lambda_{12}L_2 + x_{A_2} - 2k_1\lambda_{01}\lambda_{11}L_1 - x_{A_1})^2 &+ (2\lambda_{01}\lambda_{11}L_1 - y_{A_1} - 2\lambda_{02}\lambda_{12}L_2 + y_{A_2})^2 + \\ + (2\lambda_{02}^2 - 1)L_2 + z_{A_2} - [2\lambda_{01}^2 - 1]L_1 - z_{A_1})^2 &= |B_2 B_1|^2; \end{aligned}$$

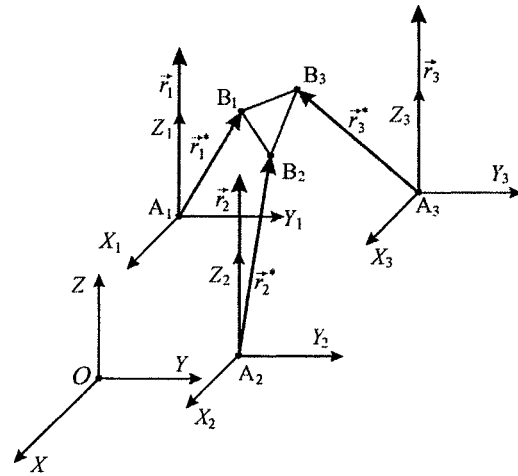


Рис. 3

Расчет и конструирование

$$\begin{aligned} & \left(2k_3\lambda_{03}\lambda_{13}L_3 + x_{A_3} - 2k_1\lambda_{01}\lambda_{11}L_1 - x_{A_1}\right)^2 + \left(2\lambda_{01}\lambda_{11}L_1 - y_{A_1} - 2\lambda_{03}\lambda_{13}L_3 + y_{A_3}\right)^2 + \\ & + \left(2\lambda_{02}^2 - 1\right)L_2 + z_{A_2} - \left[2\lambda_{01}^2 - 1\right]L_1 - z_{A_1} \right)^2 = |B_3B_1|^2; \\ & \left(2k_2\lambda_{02}\lambda_{12}L_2 + x_{A_2} - 2k_3\lambda_{03}\lambda_{13}L_3 - x_{A_3}\right)^2 + \left(2\lambda_{03}\lambda_{13}L_3 - y_{A_3} - 2\lambda_{02}\lambda_{12}L_2 + y_{A_2}\right)^2 + \\ & + \left(2\lambda_{02}^2 - 1\right)L_2 + z_{A_2} - \left[2\lambda_{03}^2 - 1\right]L_3 - z_{A_3} \right)^2 = |B_2B_3|^2, \end{aligned} \quad (13)$$

где расстояния $|B_jB_i|$ между шарнирами известны и при работе механизма не меняется.

Для определения величин λ_{01} , λ_{11} , λ_{02} , λ_{12} , λ_{03} , λ_{13} уравнения (13) должны быть дополнены уравнениями

$$\lambda_{01}^2 + \lambda_{11}^2(1 + k_1^2) = 1; \quad \lambda_{02}^2 + \lambda_{12}^2(1 + k_2^2) = 1; \quad \lambda_{03}^2 + \lambda_{13}^2(1 + k_3^2) = 1, \quad (14)$$

следующими из условия (10) нормирования кватернионов. Из уравнений (14) можно записать:

$$\lambda_{11} = \pm \sqrt{\frac{1 - \lambda_{01}^2}{1 + k_1^2}}; \quad \lambda_{12} = \pm \sqrt{\frac{1 - \lambda_{02}^2}{1 + k_2^2}}; \quad \lambda_{13} = \pm \sqrt{\frac{1 - \lambda_{03}^2}{1 + k_3^2}},$$

что позволит уменьшить количество параметров кватернионов в (13) до трех:

$$\begin{aligned} & \left(2k_2\lambda_{02}\sqrt{\frac{1 - \lambda_{02}^2}{1 + k_2^2}}L_2 + x_{A_2} + 2k_1\lambda_{01}\sqrt{\frac{1 - \lambda_{01}^2}{1 + k_1^2}}L_1 - x_{A_1}\right)^2 + \left(-2\lambda_{01}\sqrt{\frac{1 - \lambda_{01}^2}{1 + k_1^2}}L_1 - y_{A_1} - \right. \\ & \left. - 2\lambda_{02}\sqrt{\frac{1 - \lambda_{02}^2}{1 + k_2^2}}L_2 + y_{A_2}\right)^2 + \left(2\lambda_{02}^2 - 1\right)L_2 + z_{A_2} - \left[2\lambda_{01}^2 - 1\right]L_1 - z_{A_1} \right)^2 = |B_2B_1|^2; \\ & \left(2k_3\lambda_{03}\sqrt{\frac{1 - \lambda_{03}^2}{1 + k_3^2}}L_3 + x_{A_3} + 2k_1\lambda_{01}\sqrt{\frac{1 - \lambda_{01}^2}{1 + k_1^2}}L_1 - x_{A_1}\right)^2 + \left(-2\lambda_{01}\sqrt{\frac{1 - \lambda_{01}^2}{1 + k_1^2}}L_1 - y_{A_1} - \right. \\ & \left. - 2\lambda_{03}\sqrt{\frac{1 - \lambda_{03}^2}{1 + k_3^2}}L_3 + y_{A_3}\right)^2 + \left(2\lambda_{03}^2 - 1\right)L_3 + z_{A_3} - \left[2\lambda_{01}^2 - 1\right]L_1 - z_{A_1} \right)^2 = |B_3B_1|^2; \\ & \left(2k_2\lambda_{02}\sqrt{\frac{1 - \lambda_{02}^2}{1 + k_2^2}}L_2 + x_{A_2} - 2k_3\lambda_{03}\sqrt{\frac{1 - \lambda_{03}^2}{1 + k_3^2}}L_3 - x_{A_3}\right)^2 + \left(2\lambda_{03}\sqrt{\frac{1 - \lambda_{03}^2}{1 + k_3^2}}L_3 - y_{A_3} - \right. \\ & \left. - 2\lambda_{02}\sqrt{\frac{1 - \lambda_{02}^2}{1 + k_2^2}}L_2 + y_{A_2}\right)^2 + \left(2\lambda_{02}^2 - 1\right)L_2 + z_{A_2} - \left[2\lambda_{03}^2 - 1\right]L_3 - z_{A_3} \right)^2 = |B_2B_3|^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Знаки перед радикалами в (15) расставлены из анализа знаков координат сферических шарниров, получаемых с использованием преобразования (8).

Решение уравнений (15) позволяет при заданных обобщенных координатах L_i определить параметры кватернионов и, далее, с помощью зависимостей (12) и аналогичных, записанных для других сферических шарниров, определить координаты этих шарниров. Тем самым решается прямая задача о положениях. Использование кватернионов позволило снизить количество совместно решаемых уравнений с девяти до трех. Численное решение уравнений (15) авторами выполнялось с использованием пакета MathCad.

Технологическое оборудование, построенное с использованием рассматриваемого механизма с параллельными кинематическими цепями, можно использовать для перемещения заготовки, установленной на его платформе, в вертикальной плоскости с поворотом ее относительно двух горизонтальных осей. Требуемые для этого перемещения платформы можно описать с помощью трех выходных координат: координаты z_C полюса и двух углов Крылова (тангажа ϑ крена γ).

Поэтому при решении обратной задачи целесообразно выбрать в качестве трех известных выходных координат механизма величины Z_C , ϑ и γ .

Составим уравнения, позволяющие решить обратную задачу при принятых выходных координатах. С использованием третьего уравнения из (12) и аналогичных ему можно записать следующие выражения:

$$\begin{aligned}(2\lambda_{01}^2 - 1)L_1 + z_{A_1} &= n_1 x'_{B_1} + n_2 y'_{B_1} + n_3 z'_{B_1} + z_C; \\ (2\lambda_{02}^2 - 1)L_2 + z_{A_2} &= n_1 x'_{B_2} + n_2 y'_{B_2} + n_3 z'_{B_2} + z_C; \\ (2\lambda_{03}^2 - 1)L_3 + z_{A_3} &= n_1 x'_{B_3} + n_2 y'_{B_3} + n_3 z'_{B_3} + z_C.\end{aligned}\tag{16}$$

Направляющие косинусы, входящие в (16), определяются только углами ϑ и γ .

Из выражений (16) можно выразить длины штанг L_i :

$$L_i = \frac{n_1 x'_{B_i} + n_2 y'_{B_i} + n_3 z'_{B_i} + z_C - z_{A_i}}{2\lambda_{0i}^2 - 1}, \quad i = 1 \dots 3.\tag{17}$$

Подстановка (17) в (15) позволяет получить систему трех нелинейных уравнений, которая связывает три принятых независимых выходных координаты механизма с тремя неизвестными параметрами кватернионов λ_{01} , λ_{02} , λ_{03} . Численное решение этой системы позволит, с последующим использованием (17), определить обобщенные координаты L_i при заданных выходных координатах Z_C , ϑ и γ , т. е. решить для рассматриваемого механизма обратную задачу о положениях. Как и в случае прямой задачи, при использовании кватернионов количество совместно решаемых уравнений снижено до трех.

Уравнения, полученные для решения задач о положениях, служат основой для численного решения задач о скоростях и ускорениях. Следовательно, гиперкомплексные числа кватернионы могут быть успешно использованы при моделировании механизмов с параллельными кинематическими цепями путем решения прямой и обратной задач кинематики.

Литература

1. Потапов, В.А. Оборудование с параллельной кинематикой / В.А. Потапов // СТИН. – 2003. – №3. – С. 35–40.
2. Глазунов, В.А. Пространственные механизмы параллельной структуры / В.А. Глазунов, А.Ш. Колисков, А.Ф. Крайнев. – М.: Наука, 1991. – 95 с.
3. Обработывающее оборудование нового поколения. Концепция проектирования / В.Л. Афонин, А.Ф. Крайнев, В.Е. Ковалев и др.; под ред. В.Л. Афонина. – М.: Машиностроение, 2001. – 256 с.
4. Механика машин: учеб. пособие для вузов / И.И. Вульфсон, М.Л. Ерихов, М.З. Коловский и др.; под ред. Г.А. Смирнова. – М.: Высш. шк., 1996. – 511 с.
5. Манипуляционные системы роботов / А.И. Корендясев, Б.Л. Саламандра, Л.И. Тывес и др.; под общ. ред. А.И. Корендясева. – М.: Машиностроение, 1989. – 472 с.
6. ГОСТ 20085-80. Динамика летательных аппаратов в атмосфере. Термины, определения и обозначения.
7. Бранец, В.Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский. – М.: Наука, 1973. – 320 с.
8. Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. – М.: Физматгиз, 1963. – 872 с.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ РЕЖИМОВ В ГИДРОМЕХАНИЧЕСКОЙ ТРАНСМИССИИ ТРАНСПОРТНОЙ МАШИНЫ

В.Б. Держанский, И.А. Тараторкин, А.С. Климова

Изложена методика прогнозирования резонансных режимов в дотрансформаторной зоне гидромеханической трансмиссии транспортной машины и решения обратной задачи. Приводится метод выбора параметров конструкции динамического гасителя, обеспечивающего вывод резонансных режимов за пределы рабочего диапазона.

Развитие экономики России во многом определяется освоением природных ресурсов Севера, Сибири и Дальнего Востока, где дорожная сеть развита слабо, а транспортные связи осуществляются наземными машинами высокой проходимости. Для сложных климатических и дорожно-грунтовых условий с низкой несущей способностью (влажные разбитые грунтовые дороги, болотистые места или местность с высоким уровнем снежного покрова) создаются специальные транспортные машины ТМ-120, ТМ-130, а для лесопромышленного комплекса – бесчелюстная лесотрелевочная машина МЛ-107. Эти машины выполняют не только транспортную функцию, но и приспособлены для монтажа различного технологического оборудования.

Общий вид машин представлен на рис. 1.



Рис. 1. Общий вид машин: транспортной ТМ-120 (слева) и лесопромышленной МЛ-107 (справа)

Для обеспечения высокой проходимости при движении по грунтам с низкой несущей способностью наряду с другими конструктивными решениями используют гидромеханические трансмиссии. Комплекс эргономических свойств позволяет эксплуатировать такие машины продолжительное время в автономном режиме, что является существенным при проведении работ в экстремальных условиях. Эксплуатация машин в отрыве от сервисных служб повышает уровень требований к их надежности. Однако требуемый гамма-процентный ресурс часто не удается обеспечить.

Анализ статистики отказов опытных машин свидетельствует об ограниченной долговечности элементов их трансмиссий. При этом наиболее часто происходит усталостное разрушение деталей дотрансформаторной зоны «двигатель – гаситель колебаний – насосное колесо гидротрансформатора» (рис. 2), что возможно вследствие резонансных режимов. Выдвинутая гипотеза о возникновении резонансных режимов, ограничивающих долговечность деталей дотрансформаторной зоны, подтверждена выполненными экспериментальными исследованиями.

Целью работы является разработка методики прогнозирования резонансных режимов дотрансформаторной зоны и решение обратной задачи их вывода за пределы рабочего диапазона частот вращения вала двигателя.

На рис. 3 приведены фрагменты осциллограмм, характеризующих динамическую нагруженность – изменение момента в дотрансформаторной зоне трансмиссии в процессе пуска двигателя, разгона и заглохания.



Рис. 2. Пример характерных разрушений деталей дотрансформаторной зоны трансмиссии

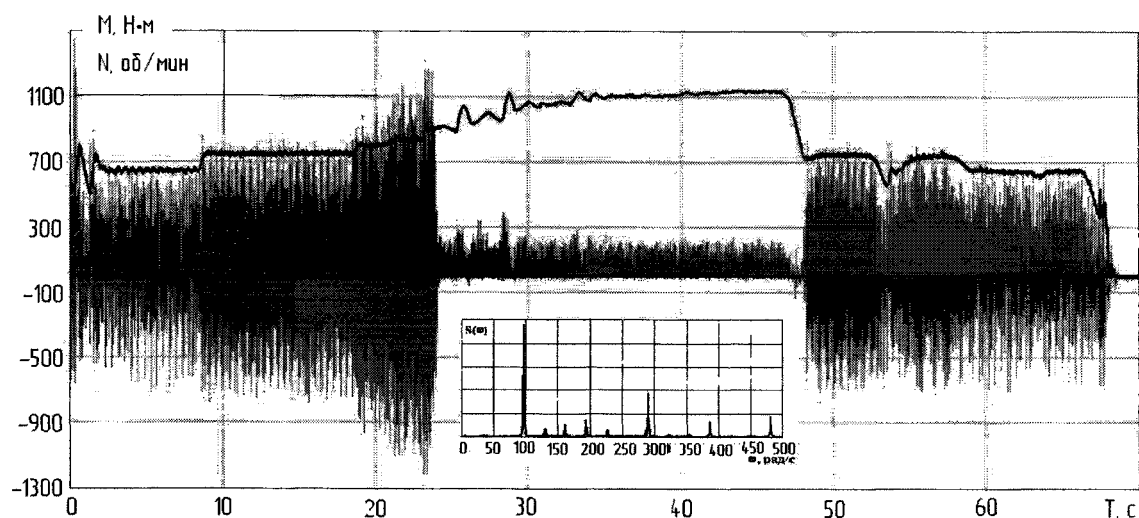


Рис. 3. Фрагмент осциллограммы и спектральная плотность момента в процессе пуска двигателя, разгона и заглохания

Из экспериментальных данных следует, что в диапазоне частот вращения вала двигателя от 400 до 900 об/мин наблюдается резонансный режим с амплитудой момента, достигающей 1300 Н·м. Основная мощность процесса сосредоточена на частоте 98 рад/с. Кроме того, спектр содержит гармоники высших порядков.

По экспериментальным данным построена амплитудно-частотная характеристика (кривая 1 на рис. 4), которая наложена на совмещенную частотную характеристику двигателя ЯМЗ-236Б и дотрансформаторной зоны трансмиссии машины ТМ-120. Из характера кривой 1 (см. рис. 4) следует, что система является существенно нелинейной, что может являться причиной генерации колебаний не только основной частоты (98 рад/с), но и супергармонических, кратных ей.

Подробный анализ, выполненный в работе [1], позволил сделать заключение о том, что динамическая нагруженность дотрансформаторной зоны трансмиссии формируется

- периодической составляющей момента двигателя, в том числе на нестационарных режимах при пуске, разгоне и заглохании;
- зацеплением ведущего колеса с гусеницами (траковая частота);
- периодической составляющей момента сопротивления;
- кинематикой карданных передач основного и дополнительного потоков мощности;
- гидродинамическими процессами в межлопаточном пространстве разблокированного гидротрансформатора;
- динамическими свойствами механической системы.

Расчет и конструирование

В то же время выполненная в дальнейшем экспериментальная и теоретическая оценка основных характеристик упругой системы: частот и форм свободных колебаний, сопоставление их с частотами возмущающих воздействий от гусеничного движителя, подвески и момента сопротивления позволили считать обоснованным рассмотрение дотрансформаторной зоны трансмиссии как самостоятельной механической системы, характер изменения момента в которой не зависит от номера включенной передачи, а определяется динамическими свойствами дотрансформаторной зоны.

В соответствии с этим, при определенных допущениях, систему можно рассматривать как двухмассовую с моментами инерции двигателя J_D и насосного колеса J_H .

Рассматриваемая система содержит гаситель крутильных колебаний, упруго-диссипативная характеристика (УДХ) которого и определяет существенную нелинейность системы. Наибольшее применение в трансмиссиях транспортных машин, в том числе и рассматриваемых, находят упруго-фрикционные гасители пружинного типа. Упруго-диссипативная характеристика такого гасителя приведена на рис. 5 (справа). Жесткость C_D соответствует рабочему участку, C_1 , C_2 – участкам до включения и после выключения гасителя соответственно; $M_{под}$ – момент предварительного поджатия, $M_{тр}$ – момент трения.

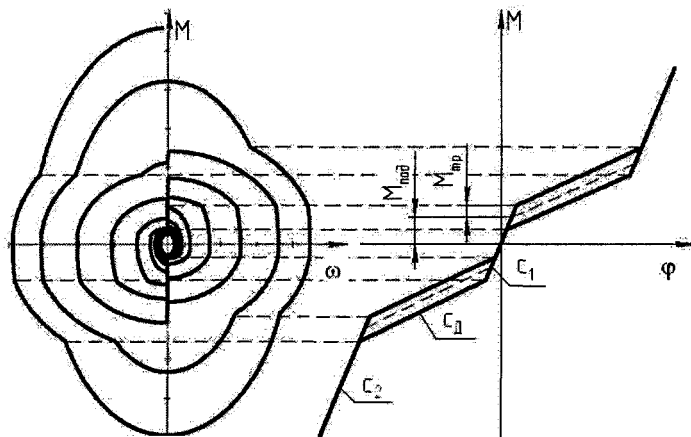


Рис. 5. Нелинейная упруго-диссипативная характеристика гасителя крутильных колебаний и фазовый портрет решения системы дифференциальных уравнений

момента, возникающие в работающем двигателе внутреннего сгорания. В V-образном шестицилиндровом четырехтактном двигателе ЯМЗ-236Б с углом развала блоков цилиндра 90° , установленном на машинах ТМ-120, ТМ-130, к указанным переменным возмущениям прибавляются моменты, вызванные неравномерностью чередования вспышек в цилиндрах ($150^\circ-90^\circ-150^\circ-90^\circ-150^\circ-90^\circ$ угла поворота коленчатого вала). Крутящий момент двигателя изменяется по сложному периодическому закону в соответствии с характером изменения газовых и инерционных сил двигателя и может быть представлен в виде суммы гармонически изменяющихся моментов. Гармонический анализ крутящего момента, действующего на одну шатунную шейку коленчатого вала двигателя, проводят на основании теоремы Фурье, согласно которой всякую периодическую

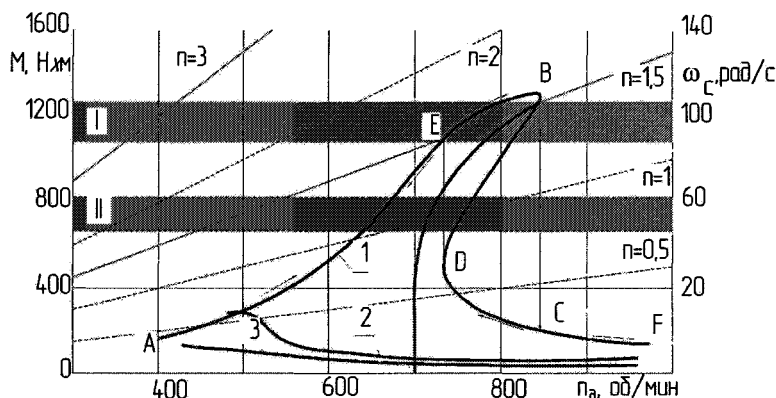


Рис. 4. Совмещенная частотная характеристика двигателя ЯМЗ-236Б и дотрансформаторной зоны трансмиссии машины ТМ-120: 1 – штатный гаситель ($c=22\ 800$ Н·м/рад); 2 – опытный гаситель ($c=7\ 400$ Н·м/рад); 3 – эластичная муфта CentaMax-Silicon (СМ-1600) ($c=5\ 250$ Н·м/рад); I – диапазон собственных частот механической системы со штатным гасителем ($c=22\ 800$ Н·м/рад); II – диапазон собственных частот механической системы с опытным гасителем ($c=7\ 400$ Н·м/рад)

Уравнения движения нелинейной системы имеют следующий вид:

$$\begin{cases} J_D \ddot{\varphi} + F(\varphi, \dot{\varphi}) = M(t); \\ J_H \ddot{\psi} - F(\varphi, \dot{\varphi}) = 0, \end{cases}$$

где $F(\varphi, \dot{\varphi})$ – упругий момент, являющийся функцией угла закрутки вала φ и направления скорости относительного перемещения $\dot{\varphi}$, учитывающий явление нелинеаризованного «сухого» трения гасителя колебаний; $M(t)$ – полигармонический возмущающий момент.

Основным возбудителем крутильных колебаний в дотрансформаторной зоне являются переменные газовые силы и инерционные

функцию можно представить в виде сходящегося бесконечного ряда гармонических составляющих.

В настоящей работе функция момента двигателя определена на основе индикаторной диаграммы одного цилиндра с учетом порядка работы, особенностей конструкции. На основе спектрального анализа этой функции определены частоты составляющих момента двигателя. Необходимо отметить, что лишь небольшая часть гармоник, т. н. «мажорных», имеет определяющее влияние, и при расчете вынужденных колебаний допустимо учитывать только эти гармоники. Как следует из результатов проведенного расчета, «мажорными» для двигателей семейства ЯМЗ-236 являются 1,5, 3, 4,5 гармоники (наклонные линии на рис. 4), и функция момента двигателя может быть представлена в виде

$$M(t) = \frac{M_0}{2} + \sum M_n \sin(n\omega \cdot t + \psi_n),$$

где M_n и ψ_n – амплитуда и фаза n -й гармоники соответственно, $n = 1,5, 3, 4,5$; ω – частота, M_0 – статическое значение момента.

На основе динамической характеристики двигателя и данных о упруго-инерционных свойствах (собственных частотах) линеаризованной механической системы построена совмещенная частотная характеристика дотрансформаторной зоны (см. рис. 4). Горизонтальные линии соответствуют собственным частотам механической системы при применении двух гасителей, имеющих различную жесткость. По совпадению частот собственных (горизонтальных линий) и одной из «мажорных» гармоник двигателя (наклонных линий) можно определить резонансные режимы и принять обоснованное решение об отстройке системы от резонанса.

С учетом приведенного выше можно сделать вывод, что опасные резонансные колебания могут возникнуть при совпадении «мажорной» полуторной гармоники двигателя ($n=1,5$) с собственной частотой системы в диапазоне частот вращения вала двигателя 810...830 об/мин с гасителем, имеющим жесткость 22 800 Н·м/рад. Данный вывод подтверждается численным моделированием и результатами экспериментов.

В соответствии с полученными данными решена обратная задача по выводу резонансной частоты за пределы рабочего диапазона. Для данной системы определены требуемые параметры: жесткость гасителя должна быть уменьшена до 7 400 Н·м/рад, а требуемое значение момента трения $M_{тр} = 100$ Н·м.

В соответствии с требуемой характеристикой отделом главного конструктора ОАО «Ярославский моторный завод» разработана и изготовлена конструкция опытного гасителя, которая обеспечила вывод резонанса за пределы рабочего диапазона частот вращения вала двигателя в диапазон 480...500 об/мин (график 2 на рис. 4), а величина динамического момента сократилась в 6 раз, соответственно достигнут и требуемый уровень долговечности. Следует отметить, что наряду с недостаточным уровнем разработки теории синтеза гасителя, создание конструкции с требуемыми параметрами потребовало использования проволоки и технологии навивки пружин шведской фирмы «Oteva» – мирового лидера в изготовлении пружин, работающих при циклическом нагружении, например, в газораспределительных механизмах двигателей внутреннего сгорания. Конструкция пружин обеспечивает требуемый уровень долговечности при значительной деформации и касательных напряжениях до 1100 МПа. Увеличение требуемой угловой податливости в 4,5 раза по сравнению с серийной достигнуто применением двухступенчатой конструкции упругих элементов. Разработанный вариант гасителя обеспечивает вывод резонансного режима основной частоты за пределы рабочего диапазона и десятикратное повышение долговечности. Однако в процессе длительной эксплуатации машин в суровых условиях Сибири и Полярного Урала установлена необходимость решения не только вопросов снижения динамической нагруженности, но и виброзащиты гидромеханической трансмиссии, которая существенно влияет на долговечность элементов, расположенных на крыше моторно-трансмиссионной установки (фильтров, трубопроводной арматуры), стеклопакетов кабины и уменьшает уровень комфортабельности машины. Исследованиями установлено, что возбуждение вибраций формируется бифуркационными процессами, свойственными существенно нелинейным системам. Анализ условий возникновения вибраций приводится ниже.

Скольжение поверхностей трения определяется условием $\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2 \neq 0$. В момент, когда неравенство обращается в ноль, происходит переход от этапа скольжения к этапу относительного покоя поверхностей трения. При этом фиксируется накопление углового смещения поверхностей

Расчет и конструирование

трения. Во время этапа относительного покоя это смещение остается неизменным: $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \text{const}$.

Анализ динамических свойств рассматриваемой существенно нелинейной системы выполнен в типичной постановке задач, характерных для динамических систем [2]: решается задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, исследуются фазовые портреты в зависимости от различных начальных условий, фиксируются бифуркационные значения параметров процесса. На фазовой плоскости в координатах $\dot{\varphi} - M$ (см. рис. 5) отчетливо выделяются три основных режима работы гасителя крутильных колебаний.

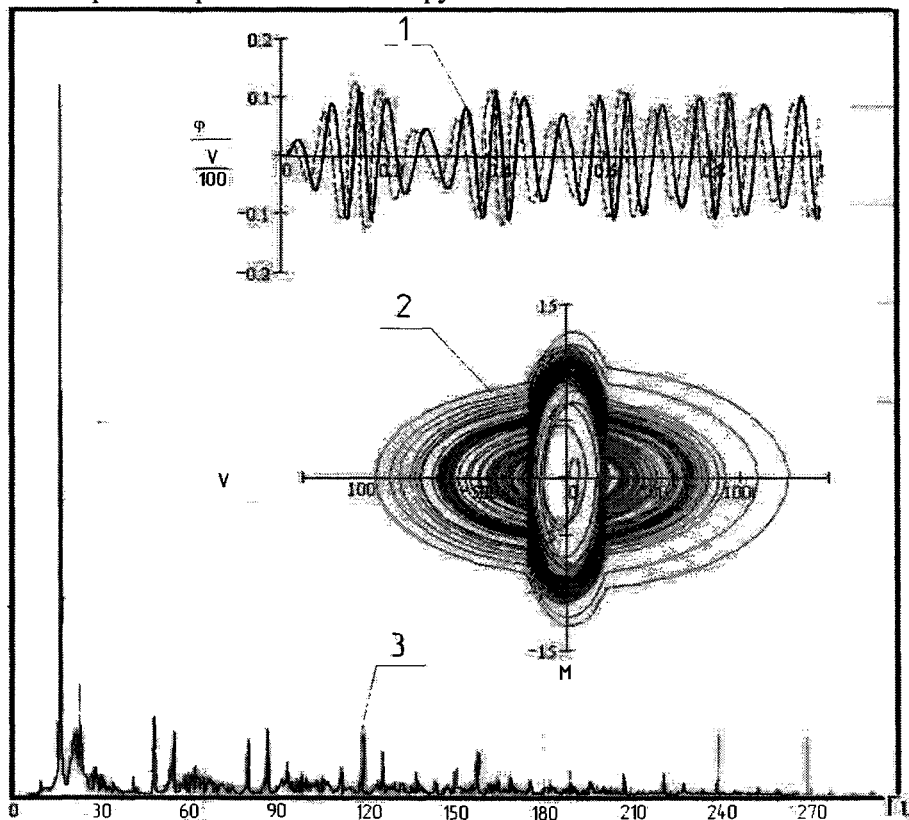


Рис. 6. Результаты численного моделирования динамики дотрансформаторной зоны ГМТ: 1 – процесс изменения относительных перемещения и скорости; 2 – фазовый портрет нелинейной системы; 3 – спектральная плотность процесса

Первый соответствует работе на упорах, когда наблюдается значительное увеличение момента при относительно небольшом скручивании упругого вала между гасителем и насосным колесом гидротрансформатора. Второй соответствует функционированию гасителя на рабочем участке УДХ. При этом наблюдается скачкообразное изменение момента при $\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 = 0$ за счет диссипации энергии колебаний во фрикционе. Установившемуся состоянию равновесия соответствует не одна точка на фазовой плоскости, а целая область возможных состояний равновесия, представляющая собой отрезки прямых, расположенных на оси момента. Длина отрезка зависит от ширины петли УДХ. И, наконец, третий режим представлен в виде предельного цикла и соответствует работе гасителя на участке УДХ до включения рабочей ветви. В этом случае при практически нулевой диссипации энергии, при существенном увеличении момента трения (экспериментально установлено, что после 178 часов работы в нормальном режиме и 50 часов в резонансном режиме момент трения увеличился в 2,0...3,0 раза) возможно возникновение высокочастотных колебаний (более 100 Гц) со значительной амплитудой (см. спектральную плотность на рис. 3). Таким образом, увеличение диссипативных свойств нельзя рассматривать как положительный эффект, так как при блокировке гасителя его жесткость возрастает, и резонансный режим происходит на более высокой частоте.

Анализ характера изменения фазовой траектории позволяет предположить существование гармонических составляющих высокого порядка – супергармонических колебаний. Для подтверждения данного положения выполнено численное моделирование дотрансформаторной зоны

машины ТМ-120. Установлено, что основная гармоника, соответствующая частоте, формируемой жесткостью рабочего участка гасителя колебаний, порождает как минимум шесть нечетных супергармонических колебаний (рис. 6, график 2), что подтверждено результатами экспериментальных исследований (см. график спектральной плотности на рис. 3).

Исключение вибрации может быть достигнуто созданием конструкции гасителя с линейными характеристиками. Например, для рассмотренной выше дотрансформаторной зоны может быть использована в качестве гасителя эластичная муфта фирмы «Centa». Установленным значениям требуемых параметров УДХ соответствует муфта CentaMax – Silicon, размера CM-1600-S-475-65240. Амплитуда момента во всем диапазоне частот вращения двигателя не превышает 50 Н·м (см. график 3 на рис. 4), т. е. момент снижен по сравнению с серийным гасителем в 26 раз.

Из полученных данных следует, что при такой конструкции исключаются не только резонансы на основной частоте, но и супергармонические колебания, т. е. существенно снижается вибронегруженность. Колебания носят вынужденный нерезонансный характер с незначительными амплитудами на частотах, соответствующих «мажорной» гармонике момента двигателя – в рассматриваемом примере пик спектральной плотности процесса на частоте 16,2 Гц при оборотах двигателя 650 об/мин соответствует полуторной гармонике двигателя. Возможность широкого применения таких конструкций определяется долговечностью, ограничиваемой биологическим старением резиновых деталей, стабильностью свойств в широком диапазоне температур.

В соответствии с приведенными результатами можно рекомендовать следующий метод прогнозирования резонансных режимов и решения обратной задачи их вывода за пределы рабочего диапазона.

1. Определение собственной частоты дотрансформаторной зоны по твердотельным чертежам элементов и упругости гасителя.
2. Расчет функции полигармонического возмущающего момента двигателя по индикаторной диаграмме одного цилиндра с учетом порядка работы и особенностей конструкции; на основе спектрального анализа полученной функции определяются «мажорные» гармоники.
3. Построение совмещенной частотной характеристики двигателя и дотрансформаторной зоны трансмиссии. Прогнозирование резонансного режима по точкам пересечения линий собственных частот системы и «мажорных» гармоник двигателя, а также определение соответствующего им диапазона частот вращения вала двигателя.
4. Определение границ допустимого скоростного диапазона частот вращения вала двигателя, за который необходимо вывести резонанс.
5. Расчет требуемых параметров УДХ, разработка конструкции гасителя или выбор из каталогов.

Приведенные выше результаты исследований относятся к прогнозированию резонансных режимов и решению обратной задачи для дотрансформаторной зоны транспортной машины ТМ-120 с двигателем ЯМЗ-236Б.

Необходимость прогнозирования резонансных режимов и решения обратной задачи возникает не только при разработке новых машин, но и при модернизации существующих. Например, при оснащении автомобилей КАМАЗ с колесной формулой 6×6, 8×8 и двигателем «Мустанг» мощностью 240 кВт, гусеничной машины МЛ-107 с двигателем ЯМЗ-238 опытной гидромеханической трансмиссией существенно возрастает момент инерции ведущих частей трансмиссии, определяемый параметрами массивного насосного колеса гидротрансформатора. Это приводит к существенному снижению собственных частот системы с серийным гасителем. На определенном скоростном диапазоне двигателя возникают резонансные режимы, ограничивающие долговечность входного вала трансмиссии. Традиционные меры повышения его прочности приводят к усталостному разрушению коленчатого вала двигателя. Эффективное решение задачи достигается синтезом конструкции гасителя по приведенной методике.

Общность полученных результатов подтверждена эффективностью применения приведенной методики для других транспортных машин.

Литература

1. Тараторкин, И.А. Прогнозирование вибронегруженности дотрансформаторной зоны трансмиссий транспортных машин и синтез гасителей крутильных колебаний: автореф. дис. ... канд. техн. наук. / И.А. Тараторкин. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2003. – 16 с.
2. Бутенин, Н.В. Теория колебаний / Н.В. Бутенин. – М.: Высшая школа, 1963.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ В ОБЛАСТЯХ ОТРЫВА ПОТОКА

М.А. Карташева

Рассмотрено обтекание гиперзвукового летательного аппарата, движущегося в плотных слоях атмосферы. Значительное влияние на газодинамические и тепловые характеристики гиперзвукового летательного аппарата оказывает отрывная донная область. С помощью численных методов проведено математическое моделирование газодинамических параметров отрывной донной области за гиперзвуковым летательным аппаратом при различных условиях работы. Предложена модель отрывной донной области, позволяющая определять газодинамические параметры отрывного течения за срезом гиперзвукового летательного аппарата.

Современные гиперзвуковые летательные аппараты (ГЛА), предназначенные для полета в космическое пространство и возвращения на Землю, функционируют в условиях значительных газодинамических и тепловых нагрузок на элементы их конструкций. Способность ГЛА выдерживать такие нагрузки в значительной мере определяет его эффективность, так как существенно влияет на параметры траектории снижения летательного аппарата. При проектировании тепловой защиты ГЛА необходимо определить параметры газодинамического обтекания аппарата и рассчитать тепловые воздействия на элементы его конструкции.

Решение поставленной задачи возможно с помощью математического моделирования газодинамических параметров течения около ГЛА, в том числе и отрывной донной области, параметры которой оказывают существенное влияние на аэродинамические характеристики летательного аппарата в целом и на тепловые потоки к его днищу.

Таким образом, одной из важнейших задач математического моделирования течений газа является моделирование процессов в отрывных зонах за обтекаемыми телами различных конфигураций. На рис. 1 представлена схема отрывной донной области за летательным аппаратом, представляющим затупленный осесимметричный конус, обтекаемый равномерным сверхзвуковым потоком под нулевым углом атаки при умеренных числах Рейнольдса [1].

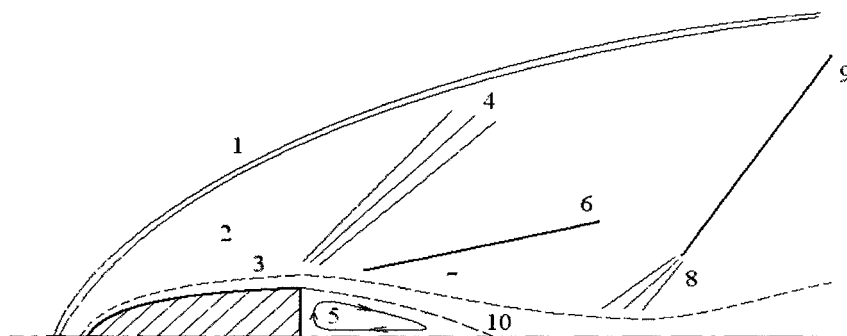


Рис. 1. Схема течения около летательного аппарата: 1 – головная ударная волна, 2 – область невязкого течения, 3 – пограничный слой, 4 – веер волн разрежения, 5 – область возвратно-циркулярного течения, 6 – висячий скачок уплотнения, 7 – вязкий слой смешения, 8 – волны сжатия, 9 – замыкающий скачок уплотнения, 10 – разделяющая линия тока

Расчет параметров течения в рассматриваемой области может быть осуществлен двумя принципиально различными способами: с помощью прямого численного моделирования либо с помощью специально разработанных моделей отрывной донной области [2].

Математическое моделирование течения в отрывной области с помощью численных методов, в частности методов сквозного счета, позволяет определить параметры течения, не выделяя особенностей (разрывов) потока. Однако в этом случае необходимо внести изменения в вычислительный алгоритм, реализующие учет имеющихся в этой области течения вязких эффектов. То

есть, потребуется разработка двух вычислительных алгоритмов (для расчета параметров «вязкой» и «невязкой» областей течения), что существенно усложняет задачу моделирования процессов в рассматриваемой области течения. Такое усложнение часто приводит к снижению точности расчетов в связи с необходимостью расчета параметров области вязко-невязкого взаимодействия, положение которой заранее неизвестно и должно быть определено непосредственно в процессе расчета.

Возможен также расчет параметров отрывной донной области с использованием алгоритмов для расчета невязких течений. При этом неизбежно снижается точность расчета параметров исследуемой области, но снимаются проблемы связанные со сходимостью и устойчивостью вычислительного алгоритма. Такие проблемы обычно возникают при «сшивании» различных вычислительных алгоритмов. Поэтому применение методов расчета невязких течений в данном случае является оправданным. В рамках данного исследования для расчета параметров отрывной донной области использованы метод установления с использованием схемы С.К. Годунова (модификация В.П. Колгана) и метод «крупных частиц».

Другой способ заключается в разработке специальных методов расчета параметров отрывной области с использованием упрощающих положений, аналитических соотношений и эмпирических формул. Рассматриваемый подход имеет преимущества при исследовании сложных газодинамических и тепловых процессов в отрывных зонах в случаях, когда имеется необходимый объем экспериментальных исследований, позволяющий верифицировать разработанную модель отрывной донной области.

Кроме того, такой подход удобен при поиске оптимальных геометрических конфигураций конструкции днища ГЛА и газодинамических и тепловых параметров отрывной донной области.

К методам расчета параметров отрывной донной области, реализующим данный подход, следует отнести методы разделяющей линии тока, предложенные Корстом и Чепменом, теорию смещения Крокко–Лиза, метод Карашимы и «интегральные» методы [2]. В этих моделях поток при больших числах Рейнольдса априорно разделен на области внешнего невязкого и внутреннего вязкого течений типа пограничного слоя и следа. Потенциальный внешний поток обтекает так называемое «тело вытеснения», распределение давления на котором, в первом приближении, совпадает с распределением давления на границе вязкого потока, при этом давление в отрывной области, а также поперек пограничного слоя и следа считается неизменным.

Метод разделяющей линии тока (РЛТ) основан на использовании простейшей модели тела вытеснения, состоящего только из двух областей: донной отрывной области, давление в которой предполагается постоянным и равным донному, и дальнего следа, давление в котором равно давлению невязкого потока. В этом случае основным параметром, определяющим границы областей такого течения, и является величина донного давления. Для ее определения необходимо рассмотреть течение в автомодельном вязком слое, развивающимся вдоль границы невязкого потока в изобарической области, при этом формулируется условие присоединения разделяющейся линии тока вблизи оси симметрии потока. Сама присоединяющаяся линия тока выбирается с учетом условия сохранения массы в отрывной области. Существует достаточно большое количество расчетных методов, относящихся к методам РЛТ, отличающихся друг от друга различиями в учете тех или иных факторов, например, толщины пограничного слоя в точке отрыва потока, а также различными зависимостями (в том числе эмпирическими) для профиля скорости в вязком слое смещения, зависимостями между параметрами вязкого слоя в сечениях его отрыва и присоединения.

Благодаря применению эмпирических и полуэмпирических зависимостей методы РЛТ позволяют получить достаточно хорошее совпадение расчетных и экспериментальных значений величин донного давления в области отрыва потока. Как указано в работе [3], применение методов РЛТ достаточно эффективно в широком диапазоне сверхзвуковых скоростей и сравнительно небольших толщинах пограничного слоя, что вполне соответствует условиям работы рассматриваемых высокоскоростных спускаемых летательных аппаратов.

Интегральные методы расчета отрывных течений основаны на использовании более сложной модели тела вытеснения, чем в методе РЛТ. В этом случае тело вытеснения включает в себя реальное тело, увеличенное на толщину вытеснения безотрывного пограничного слоя, область отрыва потока, возвратных течений и присоединения потока в ближнем следе, и определяется взаимодействием вязкого и невязкого потоков на значительной длине до сечения запирающего сле-

Расчет и конструирование

да. Данные методы основываются на априорной схеме течения, в соответствии с которой выделяются характерные области и слои вязкого и невязкого течений с заданными профилями скорости, температуры и другими параметрами течения, зависящими от некоторого числа свободных формпараметров [3].

В настоящей статье основное внимание уделено расчету параметров отрывной зоны за ГЛА. Для расчета параметров отрывной области целесообразно использовать более простые и наглядные методы разделяющей линии тока. Ранее метод Корста был использован автором для определения параметров отрывной области за торцем укороченного центрального тела в кольцевых соплах внешнего расширения.

В настоящей работе для расчета параметров отрывной области за высокоскоростным летательным аппаратом предложен метод, относящийся к методам разделяющей линии тока и учитывающий свойства газового потока и различные физические процессы, протекающие при обтекании газом летательного аппарата. Метод построен на основе классического метода Корста [2] с использованием положений, разработанных в работах [4], с учетом осесимметричности течения. Схема течения, соответствующая рассматриваемому методу Корста, представлена на рис. 2.

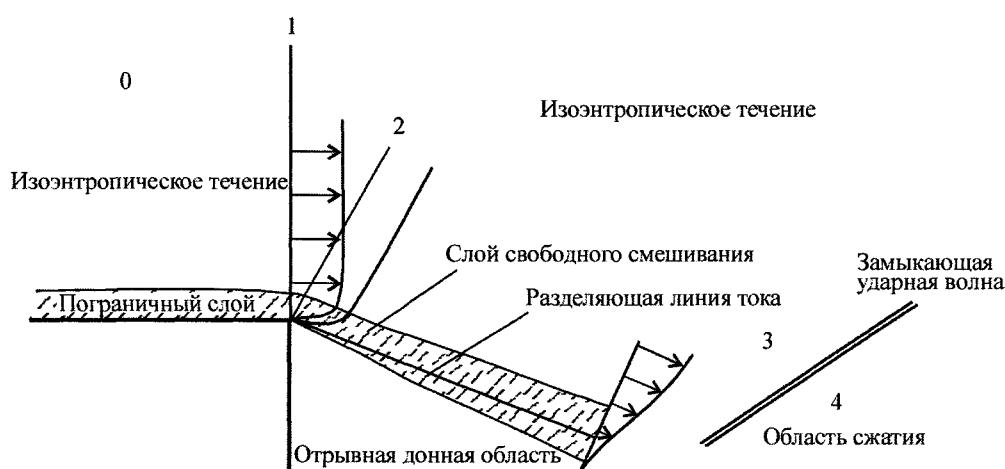


Рис. 2. Схема течения для расчета величины донного давления

Основные положения метода заключаются в следующем: поток, набегающий на донную часть вдоль двумерной поверхности, является звуковым или сверхзвуковым и остается сверхзвуковым после отрыва от угла. Образуются четыре области течения:

1. Область между сечениями 0 и 1. Поток набегающий на заднюю кромку.
2. Область между сечениями 1 и 2. Поток расширяется при обтекании задней кромки.
3. Область между сечениями 2 и 3. Вблизи границ сжимаемой струи происходит смешение при постоянном давлении.
4. Область 3 и 4. Повторное сжатие в плоском скачке в конце отрывного течения.

В каждой из указанных газодинамических областей используются соответствующие соотношения, описывающие процессы в этих областях, которые представлены в работе [2]. Основные допущения теории Корста следующие:

- в области вязкого течения, на которое воздействует прилегающий почти однородный невозмущенный поток, статическое давление равно давлению в невозмущенном потоке: $p = p_i$;
- расширение внешнего потока между сечениями 1 и 2 происходит в соответствии с решением Прандтля–Майера;
- смешение на границе струи между сечениями 2 и 3 происходит при постоянном давлении: $p_2 = p_3$; безразмерный профиль скорости в слое смешения описывается соотношением

$$\varphi = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{erf} \eta),$$

где $\eta = \sigma(y/x)$, $C_{2a} = \left\{ 1 + \frac{2}{(k-1)M_n^2} \right\}$ и представлен на рис. 3;

– возрастание давления в области повторного сжатия в конце отрывной области течения определяется примыкающим внешним течением, а сжатие во внешнем потоке – плоским косым скачком между областями 3 и 4;

– в отрывной области масса газа должна сохраняться, условие смыкания линий тока получается из условия сохранения массы в отрывной зоне и применяется к линии тока, которая приходит в критическую точку области замыкания.

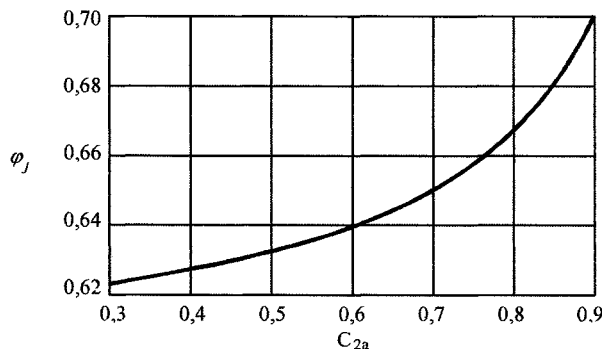


Рис. 3. Безразмерная скорость вдоль разделяющей линии тока

Рассмотренный метод расчета параметров отрывной донной области может быть положен в основу метода определения ее газодинамических параметров и параметров теплового состояния. Описанная двумерная схема течения должна быть модифицирована для осесимметричного случая. Такая модификация предполагает учет осесимметричности газового потока с помощью уравнения расхода, определения осевой и радиальной координат точки присоединения разделяющей линии тока. Для осесимметричных течений присоединение и разворот невязкого потока при обтекании тел происходит при достижении разделяющей линией тока половины радиуса торца [5].

Дальнейшая модификация рассматриваемой модели связана с уже упомянутым учетом физических процессов и свойств газа при его движении около ГЛА. Прежде всего, это учет влияния толщины начального пограничного слоя на величину донного давления [6]. Учет начальной толщины пограничного слоя в точке отрыва потока на задней кромке ГЛА заключается в учете массы газа, содержащейся в пограничном слое, с помощью закона сохранения массы газа в области отрыва, а также корректировки безразмерного профиля скорости газа φ в слое смешения. Координата сечения присоединения потока при этом устанавливается из равенства площадей прямого и обратного тока в отрывной донной области.

Предлагаемый метод также учитывает особенности течения за торцем летательного аппарата в соответствии с подходом к расчету параметров отрывной области, изложенным в работе [7]. Используется математическая модель вязко-невязкого взаимодействия, основанная на рассмотрении вязкого течения в приближении пограничного слоя и невязкого течения при одной и той же величине донного давления p_d . Такая модель в целом соответствует идеологии взятого за основу метода Корста и может быть использована для его модификации. Ее основные положения заключаются в следующем:

– профили скорости пограничного слоя перед и за волной разрежения (сжатия) описываются степенными законами, величина полного давления постоянна вдоль линии в пограничном слое в пределах волны;

– за уступом, до точки соединения потоков, донное давление p_d и энтальпия H_d постоянны;

– для каждой пары величин p_d и H_d параметры на внешних границах зон смешения и максимальное давление в области соединения двух потоков равны параметрам соответствующих невязких потоков.

Безразмерный профиль скорости в слое смешения описывается соотношением

$$\varphi = \frac{1}{2} [1 + \operatorname{erf}(\eta - \eta_x)] + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\eta - \eta_x}^{\eta} \left(\frac{\eta - \beta}{\eta_x} \right)^{1/n} e^{-\beta^2} d\beta, \quad (1)$$

Расчет и конструирование

где $\eta = \eta_x \frac{y}{\delta_1}$; $\eta_x = \frac{\sigma \delta}{1,5(x^2 + 4,4\sigma^2 x \delta \varepsilon_0)^{0,5}}$; β – параметр интегрирования; δ_1 – толщина пограничного слоя в точке отрыва потока.

В отличие от модели Корста, в которой в качестве условия присоединения потока использовалось равенство полного давления в газе в слое смешения статическому давлению газа за косым скачком уплотнения за точкой присоединения потока, в данной модели используется другое условие присоединения, которое учитывает работу сил трения в пограничном слое и вязком слое смешения:

$$\frac{p_o}{p_d} = \frac{p_c}{p_d} \frac{1}{\bar{p}_{cr}}, \quad (2)$$

где p_o – полное давление газа в слое смешения (на разделяющей линии тока); p_d – донное давление на торце центрального тела; p_c – статическое давление за косым скачком уплотнения в области присоединения потока; \bar{p}_{cr} – критический перепад давления на скачке уплотнения, определяемый как мера работы сил трения в пограничном слое и зоне смешения.

Рассмотренный подход был развит в работе [4], в которой предложен приближенный метод расчета донного давления и энтальпии за плоским или осесимметричным уступом, обтекаемым сверхзвуковым потоком. Метод основан на использовании модели вязко-невязкого взаимодействия и позволяет определять параметры донного течения для произвольных толщин начального пограничного слоя при различных числах Маха. Метод является логическим продолжением работы [7] и вносит уточнения в соотношения параметров и условия, использованные ранее.

Течение за уступом содержит следующие характерные области (рис. 4):

I – набегающего сверхзвукового потока с пограничным слоем;

II – перехода потока и пограничного слоя через веер волн разрежения или скачок уплотнения у кромки уступа;

III – изобарическую длиной L_b , с давлением, приблизительно равным донному давлению p_d ;

IV – повышения давления длиной L_p ;

V – выравнивания давления.

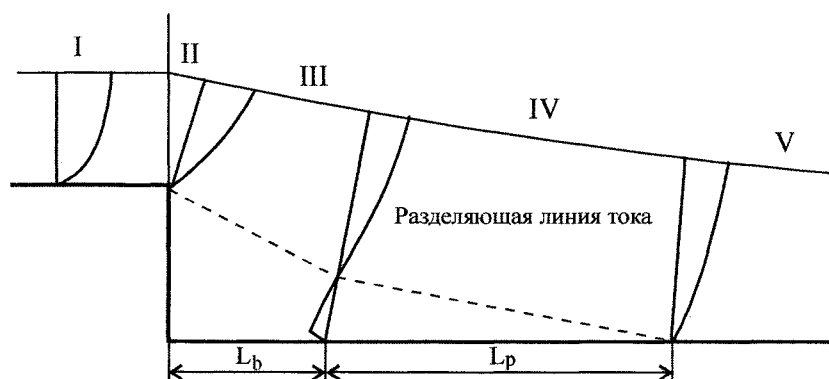


Рис. 4. Схема отрывного течения за осесимметричным донным уступом

Отличие от рассматриваемого ранее метода состоит в следующем: ранее предполагалось, что до точки встречи оторвавшегося потока на оси летательного аппарата давление постоянно и равно донному давлению, а в точке смыкания потока давление возрастает в замыкающем скачке уплотнения. В предлагаемом методе повышение давления в области присоединения происходит плавно, причем длина этой области в несколько раз больше, чем длина изобарической области за точкой отрыва потока. Длина L_p этой области определяется с помощью уравнения импульсов пограничного слоя в интегральной форме для осесимметричного течения – в виде уравнения баланса сил давления и трения, записанного для окрестности точки присоединения, где $u \approx v \approx 0$. Следствием внесенных изменений в модель отрывной области течения является несколько иной вид условия присоединения на оси потока и новое выражение для безразмерного профиля скоро-

сти на разделяющей линии тока. Соответствующие соотношения приведены в работе [4]. Экспериментальные данные, приведенные в данной работе, свидетельствуют о хорошем согласовании полученных в результате использования предлагаемой модели донной области расчетных данных с результатами экспериментов.

В настоящей работе предложена модель течения в отрывной донной области, основанная на модифицированной модели Корста, с учетом осесимметричности течения, толщины начального пограничного слоя в точке отрыва потока, работы сил трения в слое смешения и протяженности зоны повышения давления в области присоединения потока.

Предложенная модель реализована в вычислительном алгоритме и модуле расчета параметров отрывной области и величины донной тяги кольцевого сопла.

С помощью разработанного алгоритма проведены численные параметрические исследования зависимости газодинамических параметров и параметров теплового состояния в осесимметричной отрывной донной области высокоскоростного спускаемого летательного аппарата при различных характеристиках потока в точке отрыва. Полученные результаты представлены на рис. 5–7.

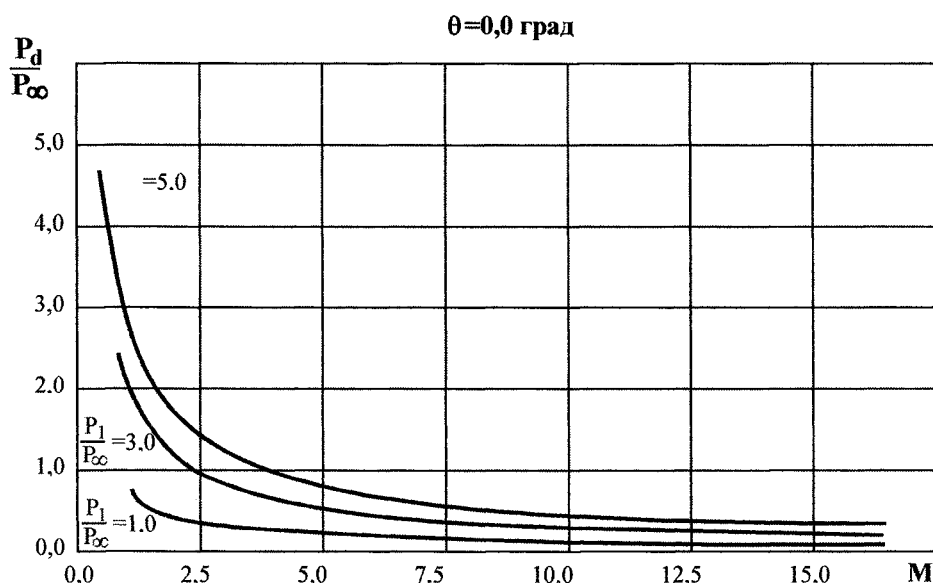


Рис. 5. Зависимость величины донного давления от числа Маха при различных давлениях в точке отрыва

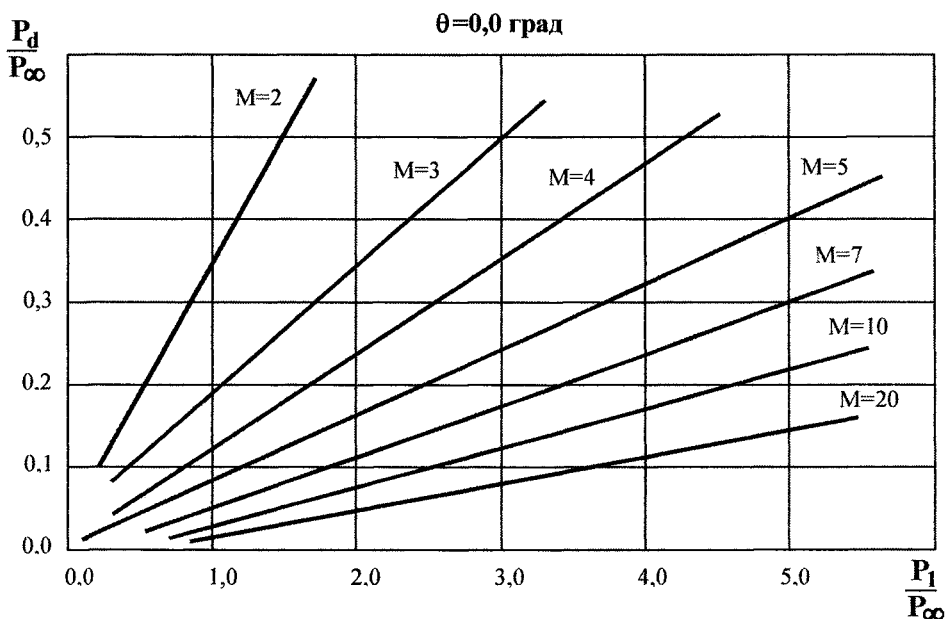


Рис. 6. Зависимость величины донного давления от давления в точке отрыва при различных числах Маха

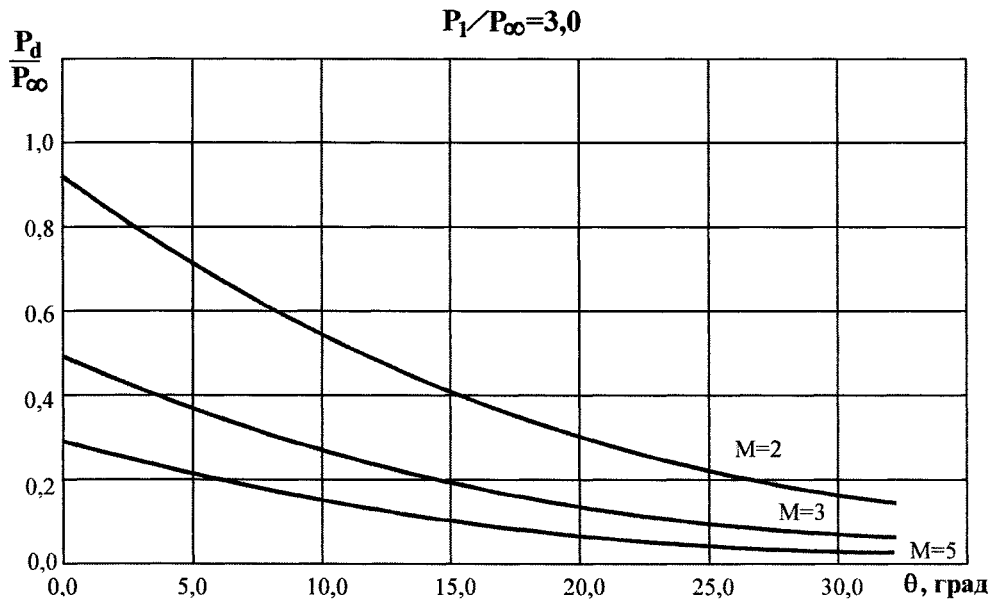


Рис. 7. Зависимость величины донного давления от угла наклона поверхности летательного аппарата к продольной оси в точке отрыва потока

На рисунках обозначены: P_d – донное давление, P_1 – давление в точке отрыва потока, P_{∞} – давление потока на бесконечности, M – число Маха, θ – угол наклона поверхности летательного аппарата к продольной оси в точке отрыва потока.

На рис. 8, 9, 10 представлены результаты математического моделирования параметров отрывной донной области (величины донного давления) с помощью методов сквозного счета. Сплошной тонкой линией обозначены результаты расчета по схеме Годунова–Колгана [8], пунктирной линией обозначены результаты расчета методом «крупных частиц» [9].

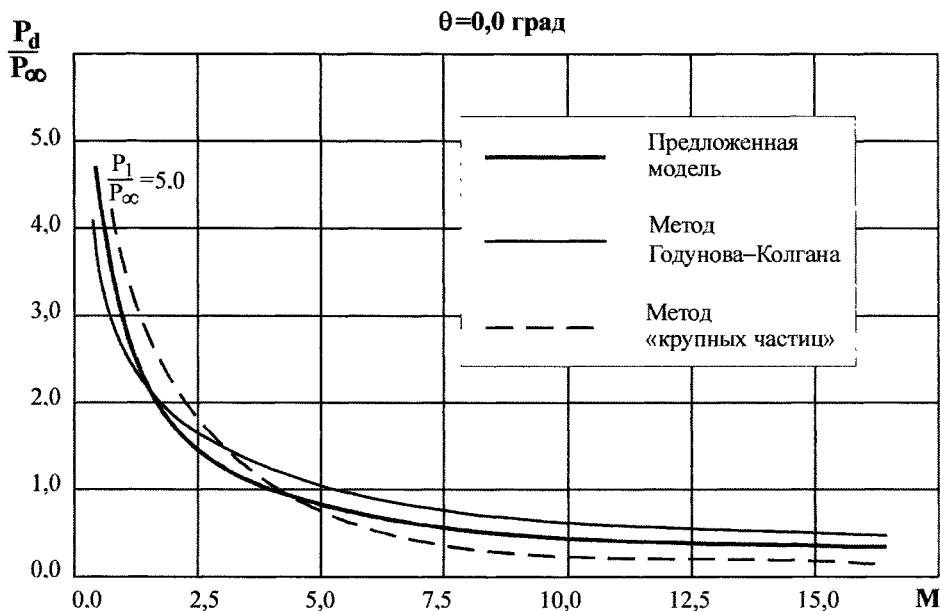


Рис. 8. Результаты расчета зависимости величины донного давления от числа Маха различными методами

Проведено сравнение полученных результатов с результатами расчетов по предложенной модели отрывной донной области. Анализ результатов расчетов показывает хорошее согласование результатов, полученных с помощью численных методов и предложенной полуаналитической моделью. Имеющиеся расхождения в результатах расчетов не превышают нескольких процентов практически всем сравниваемом диапазоне. Для определения величины давления на днище летательного аппарата такую погрешность следует считать достаточно низкой, так как совре-

менные эмпирические и полуэмпирические (учитывающие результаты экспериментальных исследований) методики предназначены, в основном, для работы в узких диапазонах параметров течения, давая при этом значительную погрешность (иногда в 2–3 раза). При этом следует отметить простоту предложенной модели, построенной по модульному принципу с учетом большинства значимых физических факторов, действующих в рассматриваемой отрывной области течения. Это позволяет использовать предложенную модель для расчета параметров отрывной донной области гиперзвуковых летательных аппаратов в широком диапазоне полетных условий.

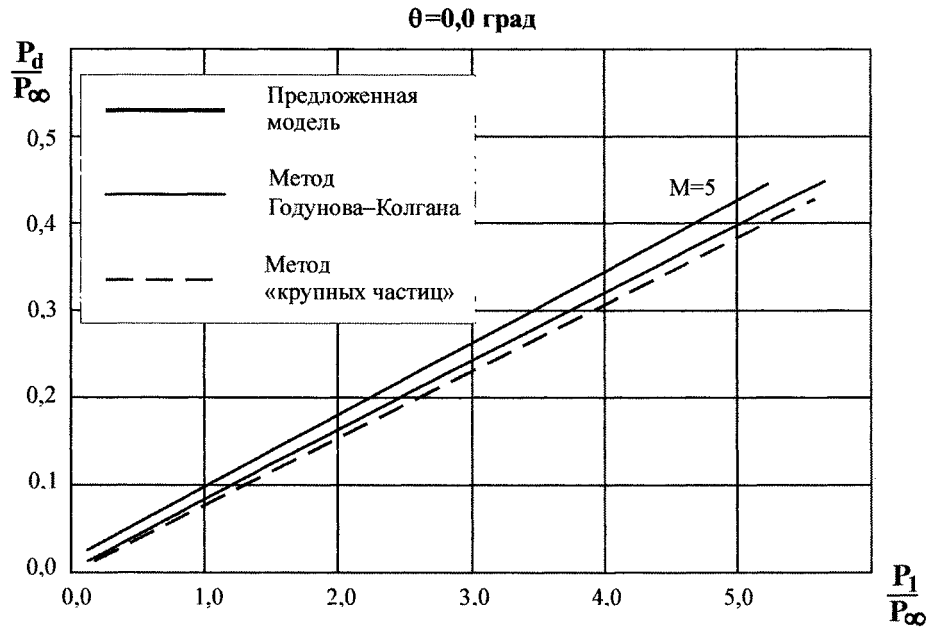


Рис. 9. Результаты расчета зависимости величины донного давления от давления в точке отрыва потока различными методами

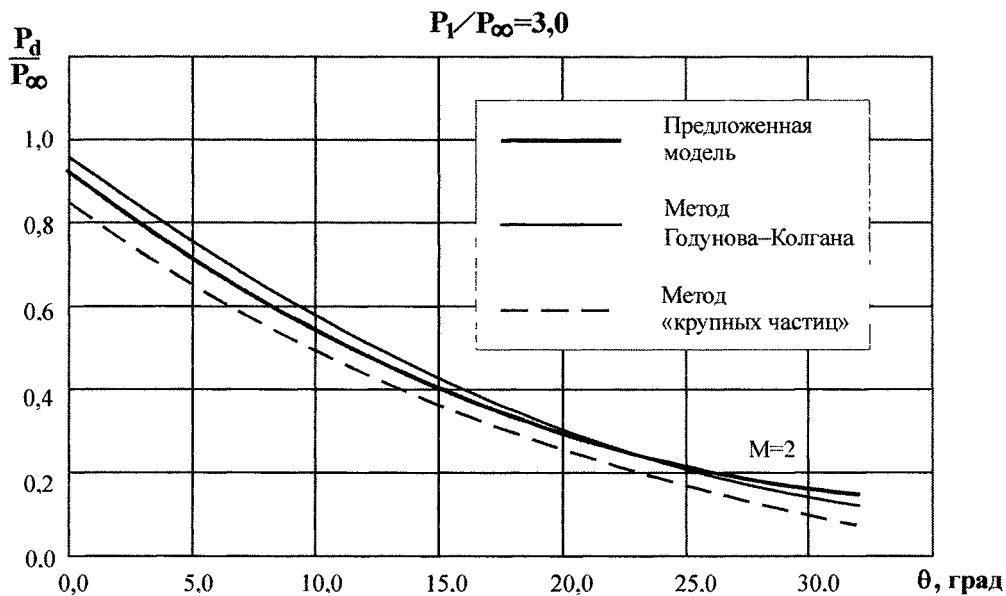


Рис. 10. Результаты расчета зависимости величины донного давления от угла наклона поверхности летательного аппарата к продольной оси в точке отрыва потока различными методами

По результатам проведенных исследований разработаны методические рекомендации по использованию предложенной модели отрывной донной области для исследования характеристик летательных аппаратов различного назначения различных конструкций.

Литература

1. Кокошинская, Н.С. Численное исследование сверхзвукового обтекания тел вязким газом / Н.С. Кокошинская, Б.М. Павлов, В.М. Пасконов. – М.: Изд-во Московского университета, 1980. – 247 с.
2. Чжен, П. Отрывные течения. В 3 т. / П. Чжен. – М.: Мир, 1973. – Т.3. – 333 с.
3. Гогши, Л.В. Турбулентные отрывные течения / Л.В. Гогши, Г.Ю. Степанов. – М.: Наука, 1979. – 367 с.
4. Аукин, М.К. Расчет донного давления и энтальпии за плоским или осесимметричным уступом, обтекаемым сверхзвуковым потоком, с учетом влияния начального пограничного слоя / М.К. Аукин, Р.К. Тагиров // Изв. РАН. МЖГ, 1999. – № 2. – С. 110–119.
5. Швец, А.И. Газодинамика ближнего следа / А.И. Швец, И.Т. Швец. – Киев: Наукова думка, 1976. – 382 с.
6. Тагиров, Р.К. Влияние начального пограничного слоя на донное давление / Р.К. Тагиров // Изв. АН СССР. МЖГ, 1966. – № 2. – С. 145–148.
7. Масалов, В.К.. Расчет донного давления и энтальпии за уступом, обтекаемым двумя сверхзвуковыми потоками, с учетом влияния пограничных слоев и тепловых потоков / В.К. Масалов, Р.К. Тагиров // Изв. АН СССР. МЖГ, 1991. – № 5. – С. 167–176.
8. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов и др. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
9. Белоцерковский, О.М. Метод крупных частиц в газовой динамике / О.М. Белоцерковский, Ю.М. Давыдов. – М.: Наука: Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 392 с.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ПОВЕРХНОСТНОГО ТРЕНИЯ НА АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОФИЛЯ

А.А. Терехин, Р.В. Сидельников, Т.В. Терехина

Исследуется влияние точности моделирования пограничного слоя на точность вычисления интегральных и распределённых характеристик профиля крыла на примере RAE 2822. Используются две математических модели течения газа: $k-\omega$ SST и «невязкого» газа. Решение проводится алгоритмами первого и второго порядков точности, которые дают разные результаты в области отрыва пограничного слоя. Как показали численные исследования, точность расчёта коэффициента трения на поверхности профиля и толщины пограничного слоя существенно влияет на определение точки отрыва потока, что сказывается на вычислении распределённого по поверхности давления и интегральных характеристик профиля.

Турбулентные отрывные течения играют важную роль в современной аэродинамике в связи с необходимостью анализа нестандартных условий полета и решения ряда других проблем, неразрывно связанных с явлением отрыва потока от обтекаемой поверхности. Сложность моделирования отрывных течений объясняется их физическими особенностями, параметры которых определяются конкретными геометрическими характеристиками рассматриваемого течения и граничными условиями, что делает построение универсальной полуэмпирической модели турбулентности для расчёта отрывных течений исключительно сложным. Известно, что численное моделирование отрывных течений может быть выполнено на базе различных моделей турбулентности и даже на модели идеальной жидкости, где эффекты диссипации энергии создаёт численная диффузия. Так же неоднократно в литературе отмечалось, что за счёт численной диффузии можно моделировать эффекты турбулентности, при этом улучшая сходимость и устойчивость математического счёта [1–3].

Положение точек отрыва и присоединения пограничного слоя (ПС) характеризуется поверхностным трением, которое при численном моделировании является результатом совместного решения полуэмпирической модели турбулентности и соответствующей ей модели стенки. Неточное определение точек отрыва ведёт к искажению описания распределения давления по поверхности исследуемого объекта, что означает неизбежное ошибочное определение интегральных характеристик. В данной статье с целью отработки моделей турбулентности проводится оценка влияния точности определения коэффициента поверхностного трения C_f на распределение давления и расчётные интегральные аэродинамические характеристики (подъёмную силу и центр давления) путём сравнения с результатами обширного физического эксперимента для случая обтекания профиля RAE 2822.

Сверхкритический профиль RAE 2822 имеет особенности, связанные с большой кривизной хвостовой части. Подробное его описание приводится в работе [4]. В ней вариант обтекания №1 соответствует безотрывному течению с отсутствием на поверхности профиля скачков уплотнения. Вариант обтекания №10 является наиболее сложным из всех случаев, представленных в работе [4], там скачок уплотнения, образующийся на верхней поверхности профиля, вызывает разрыв пограничного слоя [5].

Исходные данные для постановки численного эксперимента представлены в табл. 1. Анализ положительных и отрицательных качеств моделей течений проводится на модели вязкого газа с полуэмпирической моделью турбулентности $k-\omega$ SST [6, 7] и модели «невязкого» газа. При решении системы уравнений применяются схемы первого и второго порядков точности.

В расчётах используется «С» сетка, основанная на «Неха» элементах. Параметр Y^+ по поверхности профиля для модели $k-\omega$ SST не превышает 1, в соответствии с чем, количество контрольных объёмов в расчётной области для $k-\omega$ SST модели турбулентности составляет 40 194. Для модели «невязкого» газа из-за увеличения размера грани контрольного объёма в 10^3 раз по

Расчет и конструирование

направлению нормали к поверхности профиля, размер сетки составляет 26 930 контрольных объёмов.

В качестве характерных параметров для анализа эффективности моделей выбраны:

- распределение коэффициента давления

$$C_p = \frac{2(p - p_\infty)}{\rho_\infty V_\infty^2},$$

- распределение коэффициента поверхностного трения $C_f = \frac{2\tau_{TP}}{\rho_\infty V_\infty^2}$,

- профиль скорости V , отнесенный к скорости на границе пограничного слоя V_p .

На рисунках ниже обозначены: координата y – расстояние по нормали от поверхности профиля, x – расстояние от носка профиля, s – длина профиля. Интегральные характеристики сравниваются по коэффициентам нормальной силы C_n и центра давления C_d .

Одной из характерных особенностей модели «невязкого» газа является появление в решениях флуктуаций давления нефизической природы. Решение уравнений «невязкого» газа схемами первого порядка точности даёт флуктуацию давления в дозвуковой области, близкой к трансзвуковой (рис. 1, область А).

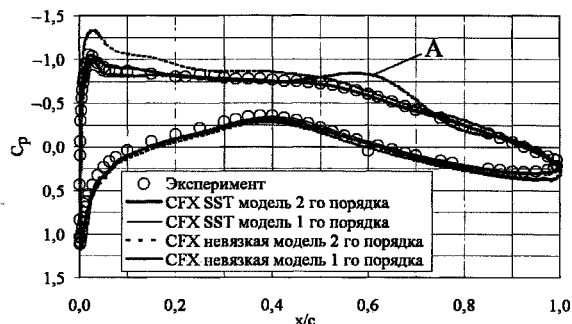


Рис. 1. Распределение коэффициента давления по поверхности профиля, вариант 1

Исходные данные
численного эксперимента

Вариант	1	10
M_∞	0,676	0,750
α , град	2,400	3,190
$Re, 10^6$	5,700	6,200
Длина профиля, м	0,389	

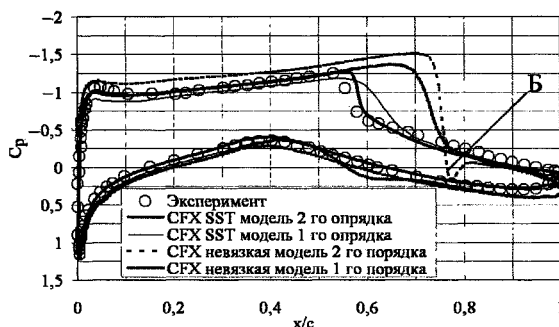


Рис. 2. Распределение коэффициента давления по поверхности профиля, вариант 10

В случае решения уравнений «невязкого» газа с помощью схемы второго порядка точности, флуктуации давления на поверхности профиля наблюдаются в области за скачком уплотнения (рис. 2, область Б).

За счёт повышенной численной диффузии (при использовании алгоритма первого порядка точности для уравнений «невязкого» газа) происходит сглаживание флуктуаций давления, что соответствует более точному описанию процесса трансзвукового обтекания (см. рис. 2).

Как показали расчёты, при дозвуковых скоростях безотрывного обтекания в численной модели пограничный слой мало влияет на определение коэффициента давления. Несоответствие значения коэффициента трения на поверхности при численном расчёте с физическим экспериментом (рис. 3, 4) не приводит к расхождению коэффициента давления (см. рис. 1).

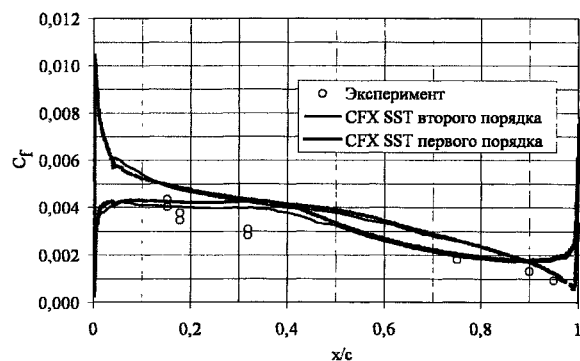


Рис. 3. Распределение коэффициента поверхностного трения, вариант 1

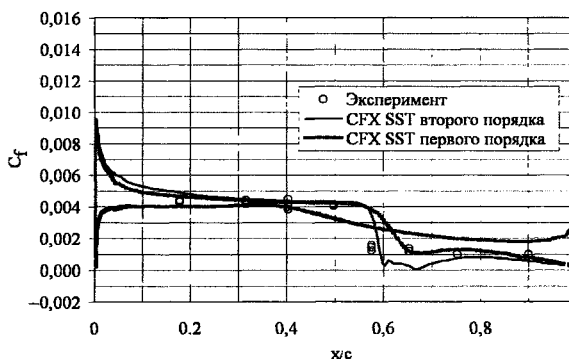


Рис. 4. Распределение коэффициента поверхностного трения, вариант 10

Завышение поверхностного трения приводит к ошибке определения толщины пограничного слоя в среднем на 40% (рис. 5, 6). Здесь расхождения связаны с особенностями численного эксперимента (численная диффузия, разрешающая способность разностной сетки, сгущение сетки к поверхности и т. д.) (табл. 2), а качественная же картина моделируется достаточно надежно всеми математическими моделями.

Таблица 2

Сравнение интегральных характеристик

	Эксперимент	k- ω SST	Модель «невязкого» газа	Расхождение между экспериментом и k- ω SST, %	Расхождение между k- ω SST и моделью «невязкого» газа, %	Расхождение между экспериментом и моделью «невязкого» газа, %
Вариант 1						
C_n	0,566	0,5929 (0,5681)	0,7318 (0,6212)	4,7(0,37)	23,4 (4,7)	29,2 (9,7)
m_z	–	0,2299 (0,2263)	0,2874 (0,2634)	– (1,56)	25,0 (14,5)	–
C_d	–	0,3870 (0,3978)	0,3923 (0,4240)	– (2,79)	1,3 (9,5)	–
Вариант 10						
C_n	0,743	0,7586 (0,7390)	1,0553 (0,9255)	2,1(0,53)	39,1 (22,0)	42,0 (24,5)
m_z	–	0,2860 (0,2892)	0,4481 (0,3937)	– (1,14)	56,0 (37,6)	–
C_d	–	0,3759 (0,3907)	0,4237 (0,4249)	– (1,48)	12,7 (13,0)	–

В скобках приведены значения интегральных характеристик, полученные с алгоритмом первого порядка точности.

При образовании скачка уплотнения на поверхности и его взаимодействии с пограничным слоем наблюдается отрыв последнего. Область, где коэффициент поверхностного трения близок к нулю (см. рис. 4), соответствует отрыву и прилипанию ПС. В данном случае различные модели ведут себя по-разному. Лишь одна модель k- ω SST с использованием алгоритма второго порядка точности корректно моделирует отрыв ПС и соответствует физическому эксперименту.

В областях течения до отрыва ПС решения для C_p разными схемами дают одинаковые результаты, но существенно отличаются после отрыва.

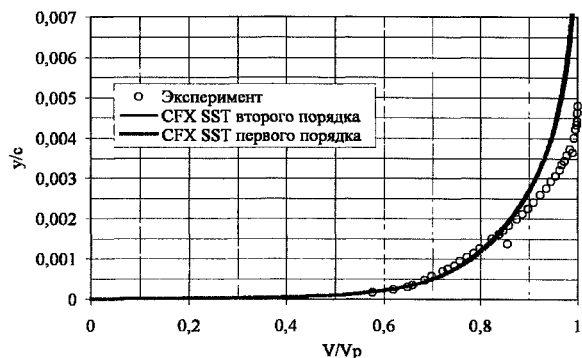


Рис. 5. Распределение скорости по толщине пограничного слоя на верхней поверхности профиля, вариант 1, $x/c=0,319$

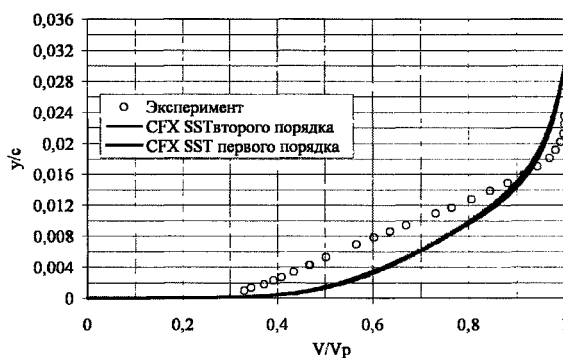


Рис. 6. Распределение скорости по толщине пограничного слоя на верхней поверхности профиля, вариант 1, $x/c=0,95$

Наряду с использованием C_f взаимодействие ПС с обтекаемой поверхностью можно оценить по характеру изменения профиля скорости в пристеночной области ПС (рис. 7, 8).

Профили скорости при моделировании обтекания профиля крыла без образования скачка уплотнения для моделей k- ω SST по разным схемам совпадают (см. рис. 5–7). Это подтверждает то, что в дозвуковой области могут быть использованы более простые схемы решения систем уравнений. А в варианте обтекания с отрывом пограничного слоя профили скорости до скачка уплотнения и после, полученные схемами разного порядка точности с использованием модели k- ω SST, отличаются значительно (см. рис. 7, 8). Модель первого порядка точности не дает отрыва ПС, а моделирует только его искажение.

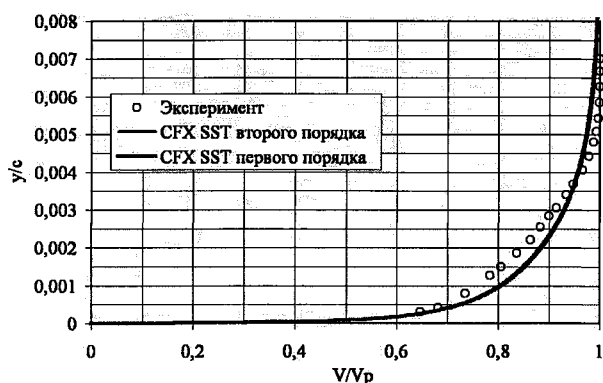


Рис. 7. Распределение скорости по толщине пограничного слоя на верхней поверхности профиля, вариант 10, $x/c=0,319$

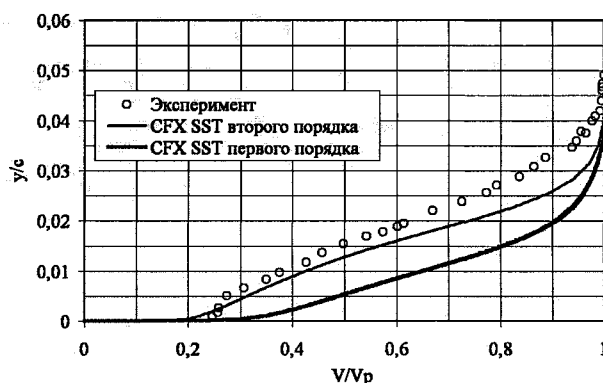


Рис. 8. Распределение скорости по толщине пограничного слоя на верхней поверхности профиля, вариант 10, $x/c=0,90$

От надежности моделирования напряжений трения на стенке зависит правильность определения точки отрыва пограничного слоя; ошибочное определение ведёт к искажению коэффициента давления и приводит к ошибкам в интегральных характеристиках. Но, как показывает практика, не всегда нужно уделять большое внимание точности определения напряжений трения. При безотрывном обтекании влияние его мало, а, следовательно, выбор модели, с которой необходимо решать поставленную задачу, существенно облегчается. Поэтому, при расчётах безотрывного обтекания, предварительном анализе схемы течения или в многопараметрических задачах в качестве наиболее экономичной и простой может быть выбрана модель, не учитывающая естественной вязкости. В силу наличия численной диффузии как её дискретного аналога в вычислительной схеме, такая модель часто даёт удовлетворительные результаты, и в совокупности с численными схемами первого порядка точности позволяет значительно экономить требуемые вычислительные ресурсы.

Литература

1. Белоцерковский, О.М. Метод крупных частиц в газовой динамике / О.М. Белоцерковский, Ю.М. Давыдов. – М.: Наука, 1982. – 704 с.
2. Флетчер, К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х т.: пер. с англ. / К. Флетчер. – М.: Мир, 1991. – Т.1. – 504 с.
3. Флетчер, К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х т.: пер. с англ. / К. Флетчер. – М.: Мир, 1991. – Т.2. – 552 с.
4. Cook, P.H. Aerofoil RAE 2822 – Pressure Distributions, and Boundary Layer and Wake Measurements. Experimental Data Base for Computer Program Assessment / P.H. Cook, M.A. McDonald, M.C.P. Firmin // AGARD Report AR 138. – 1979.
5. Холст, Т.Л. Подведение итогов деятельности рабочей группы по расчёту вязкого трансзвукового обтекания профиля / Т.Л. Холст // Аэрокосмическая техника. – 1989. – №11.
6. Menter, F. R. Two-equation eddy viscosity turbulence models for engineering applications / F.R. Menter // AIAA J. – 1994. – № 1. – P. 1299–1310.
7. Белов, И.А. Моделирование турбулентных течений: учебное пособие / И.А. Белов, С.А. Исаев. – СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2001. – 108 с.

БЫСТРЫЙ МЕТОД РАСЧЁТА ОПОРНОЙ ТРАЕКТОРИИ СПУСКАЕМОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

В.И. Киселёв

Предложен новый метод расчёта опорной траектории спускаемого с орбиты искусственного спутника Земли летательного аппарата. Метод основан на результатах, полученных в работе [1], и включает алгоритм автоматического выбора шага интегрирования и модифицированные формулы многошагового метода Адамса на участке смены шага интегрирования. Метод успешно применялся при решении ряда практических задач.

Введение. При решении большинства практических задач, математические модели которых описываются системами обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, используются численные методы интегрирования. В инженерной практике наибольшее применение вполне обоснованно и справедливо получил метод Рунге–Кутты четвёртого порядка вследствие достаточно высокой точности, относительно высокого быстродействия, наличия стандартных программных процедур, инженерных традиций и т. д. Вместе с тем в ряде практически значимых задачах приходится многократно интегрировать достаточно сложную систему обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка. Например, это задача выбора оптимального управления и построения соответствующей оптимальной, в том или ином смысле, траектории спуска космического аппарата (КА) с орбиты искусственного спутника Земли. Математическая модель процесса спуска КА описывается системой двенадцати нелинейных уравнений [2], а решение задачи ведётся с применением численных методов нелинейного программирования [1]. В этом случае траектория спуска достаточно продолжительна (несколько десятков минут), интегрирование ведётся с достаточно малым шагом, а количество обращений к процедуре расчёта траектории КА достигает нескольких сотен. Вследствие этого для проектирования (выбора) одной оптимальной траектории, даже с учётом быстродействия современных вычислительных машин, могут тратиться часы. Это не всегда приемлемо, особенно в тех случаях, когда задачу приходится решать в режиме реального времени.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу построения опорной траектории спускаемого летательного аппарата (СЛА). Для обеспечения точной посадки в заданном районе СЛА проводит внешнетраекторные измерения для уточнения своего местоположения. Для проведения этих измерений необходимо обеспечить прохождение СЛА через район проведения навигационных измерений с допустимыми значениями кинематических параметров.

Наиболее распространённый подход к решению такого рода задач состоит в построении до спуска опорной программной траектории, удовлетворяющей всем заданным условиям. Информация об этой траектории помещается в память бортового компьютера. В полёте в результате воздействия различного рода возмущений фактическая траектория будет отличаться от опорной траектории. Задача системы управления СЛА в полёте заключается в парировании действующих возмущений и обеспечении движения СЛА по траектории, близкой к опорной.

Движение центра масс СЛА в рассматриваемом случае описывается известной системой дифференциальных уравнений в сферически-скоростной системе координат [2]:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{W}_{x1} \cdot \cos \alpha - \dot{W}_{y1} \cdot \sin \alpha - G_r \cdot \sin \theta - G_\omega \cdot (\sin \varphi \cdot \sin \theta + \cos \theta \cdot \cos \sigma \cdot \cos \varphi); \\ V \cdot \dot{\theta} &= \dot{W}_{x1} \cdot \cos \gamma \cdot \sin \alpha + \dot{W}_{y1} \cdot \cos \gamma \cdot \cos \alpha + (V^2 / R - G_r) \cdot \cos \theta - \\ &- 2V \cdot \omega \sin \sigma \cdot \cos \varphi - G_\omega \cdot (\sin \varphi \cdot \cos \theta - \sin \theta \cdot \cos \sigma \cdot \cos \varphi); \\ \dot{R} &= V \cdot \sin \theta; \dot{\varphi} = (V / R) \cdot \cos \theta \cdot \cos \sigma; \dot{\lambda} = -(V / R \cdot \cos \varphi) \cdot \cos \theta \cdot \sin \sigma. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь R – расстояние от центра масс СЛА до центра Земли, φ – геоцентрическая широта, λ – геоцентрическая долгота, V – скорость СЛА, θ – угол наклона вектора скорости к плоскости местного горизонта, σ – угол между проекцией вектора скорости на плоскость местного горизонта и местным меридианом, ω – угловая скорость вращения Земли, G_ω , G_r – составляющие

Расчет и конструирование

ускорения силы тяжести по направлению вектора угловой скорости вращения Земли и радиус-вектора, $\dot{W}_{x1} = \frac{c_x \cdot q \cdot S}{m}$, $\dot{W}_{y1} = \frac{c_y \cdot q \cdot S - K_N \cdot P}{m}$ – составляющие кажущегося ускорения по осям связанной с изделием системы координат, c_x, c_y – аэродинамические коэффициенты, $q = \rho \cdot V^2 / 2$ – скоростной напор, S – площадь характерного (миделевого) сечения СЛА, P – сила тяги управляющего двигателя, ρ – текущая плотность атмосферы, K_N – коэффициент усиления тяги, α – пространственный угол атаки, γ – скоростной угол крена (угол отклонения плоскости угла атаки от вертикальной плоскости). Управление движением СЛА осуществляется путём формирования пространственного угла атаки α и скоростного угла крена γ с помощью специальных управляющих двигателей тягой P .

Ограничимся случаем плоского движения и сформулируем следующую задачу.

Для СЛА, движение центра масс которого описывается системой уравнений (1), заданы:

- вектор начального состояния объекта $x(t_0) = (R_0, \varphi_0, \lambda_0, V_0, \theta_0, \sigma_0)$;
- множество допустимых управлений $U \in \Omega_U$;
- множество допустимых состояний $x \in \Omega_x$;
- требуемые значения терминальных траекторных параметров на момент начала внешних навигационных измерений: V_T – скорость, θ_T – угол наклона вектора скорости, H_T – высота, D_T – дальность;
- требования по точности выполнения заданных терминальных условий
 $-\delta_1 + H_T \leq H_n \leq H_T + \delta_1; -\delta_2 + D_T \leq D_n \leq D_T + \delta_2;$
 $-\delta_3 + \theta_T \leq \theta_n \leq \theta_T + \delta_3; -\delta_4 + V_T \leq V_n \leq V_T + \delta_4,$

где $\delta_i > 0, i = 1, \dots, 4, H_n, D_n, \theta_n, V_n$ – соответственно высота, дальность, угол наклона вектора скорости к местному горизонту на момент начала измерений, реализовавшиеся при выбранном управлении.

Требуется определить допустимое управление U , переводящее СЛА из заданного начального состояния в заданное конечное состояние с требуемой точностью.

В этом случае управление входит в уравнения движения (1) как через величину тяги P , так и через угол атаки α . Величина угла атаки, определяемого величиной и направлением тяги управляющего двигателя и называемого в данном случае балансирующим углом атаки α_b , находится из уравнения балансировки. Уравнение балансировки выражает собой равенство моментов внешних сил, действующих на СЛА, и управляющего момента, создаваемого тягой управляющего двигателя. Это уравнение имеет вид

$$K_N \cdot P \cdot (y_p - y_T) = c_y(\alpha_b) \cdot q \cdot S \cdot (y_D - y_T).$$

Здесь y_T – центр тяжести СЛА, $(y_p - y_T)$ – плечо управляющей силы P относительно центра масс, $(y_D - y_T)$ – плечо внешних сил относительно центра масс. Уравнение балансировки решается на каждом шаге интегрирования. Поскольку в математической модели (1) движение центра масс СЛА отделено от движения вокруг центра масс, то предполагается, что переход с одного балансирующего угла атаки на другой происходит мгновенно, без переходного процесса.

2. Решение задачи. Поставленная задача по ряду причин (простота реализации и др.) решалась в классе кусочно-постоянных законов управления. В этом случае управление U может быть задано с помощью многомерного вектора $U = (P_1, P_2, \dots, P_k, t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{2k})$, где P_1, P_2, \dots, P_k – значения тяг управляющих двигателей, t_1, t_2, \dots, t_{2k} – моменты переключения тяг, k – количество импульсов. Каждому вектору U при интегрировании системы уравнений (1) соответствует единственная траектория. Решение задачи, как это показано в [1], сводится к решению специальной задачи нелинейного программирования. В ходе решения этой задачи нелинейного программирования число обращений к процедуре интегрирования системы уравнений (1) может достигать нескольких сотен. С учётом того, что расчёт только одной траектории составляет несколько десят-

ков секунд, время получения одной оптимальной траектории может составлять часы, что не всегда приемлемо. Поэтому так важно сократить время расчёта одной траектории.

В рассматриваемом случае резонно воспользоваться многошаговым методом интегрирования, известным преимуществом которого по сравнению с методом Рунге–Кутты является именно быстродействие за счёт однократного обращения на каждом шаге интегрирования к процедуре вычисления правой части интегрируемой системы уравнений. Известным недостатком многошаговых методов является необходимость «разгонки» (получения первых четырёх точек) каким-либо одношаговым методом, например, с помощью того же самого метода Рунге–Кутты. Однако, задачи указанного типа (спуска) характеризуются достаточно частой сменой управления, в результате чего правая часть уравнений движения СЛА претерпевает скачок. Но в этом случае, чтобы не потерять в точности при интегрировании многошаговым методом, например, методом Адамса, приходится при каждой смене управления вновь «разгоняться» по методу Рунге–Кутты. Кроме этого, в математической модели полёта СЛА моменты переключения управления требуется реализовать с предельной точностью, что при интегрировании с постоянным шагом требует разработки специальной итерационной процедуры поиска моментов переключения управления и повышает время расчёта одной траектории. При большом количестве переключений это нивелирует преимущество в быстродействии многошаговых методов. Аналогичная ситуация возникает в системах с переменной структурой. Таким образом, ставится следующая задача: с целью ускорения времени проектирования опорной траектории СЛА модифицировать метод Адамса интегрирования систем дифференциальных уравнений с переменной правой частью, используя в нём одноразовую разгонку по методу Рунге–Кутты четвёртого порядка, исключив при этом итерационную процедуру поиска моментов смены правых частей уравнений системы и сохранив приемлемую точность решения задачи. При решении задачи проектирования оптимальной траектории методами нелинейного программирования моменты переключения управления выдаются оптимизационной подпрограммой и могут считаться известными. В этом случае, зная моменты переключения управления, логичнее отказаться от указанной итерационной процедуры, определить необходимое количество шагов интегрирования и шаг интегрирования с текущим управлением (правой частью) и проинтегрировать уравнения на этом участке движения с новым шагом интегрирования. Новый шаг интегрирования можно определить, в частности, по формулам:

$$N = \left[\frac{t_b - t_a}{h} \right] + 1, \quad h_m = \left[\frac{t_b - t_a}{N} \right]. \quad (2)$$

Здесь t_b, t_a – моменты выключения, включения управления в задаче спуска или смены правой части в задачах с переменной структурой, h – предыдущий шаг интегрирования, h_m – текущий (новый) шаг интегрирования на участке постоянства (в структурном смысле) правых частей уравнений интегрируемой системы, [...] – означают процедуру взятия целой части в первой из формул.

Примечание 1. Приводимые ниже формулы метода Адамса получены для $N \geq 4$. Если это не так, то необходимо положить $N = 4$.

Примечание 2. Если $t_b - t_a$ делится на h нацело, то шаг интегрирования не меняется.

Чтобы перейти к интегрированию с новым шагом и избежать при этом разгонки по методу Рунге–Кутты, необходимо уточнить формулы метода Адамса на участке смены шага интегрирования.

3. Формулы интегрирования на участке смены шага интегрирования. Стандартная формула метода Адамса на участке интегрирования с постоянным шагом имеет вид [3]

$$Y_{k+1} = Y_k + \frac{h}{24} (55 \cdot f_k - 59 \cdot f_{k-1} + 37 \cdot f_{k-2} - 9 \cdot f_{k-3}), \quad (3)$$

где здесь и далее Y_k, Y_{k+1} – значения решения в текущей и следующей за ней точке, $f_{k-3}, f_{k-2}, f_{k-1}, f_k$ – значения правых частей уравнений в трёх предыдущих и текущей точках соответственно. На участке смены шага интегрирования коэффициенты при $f_{k-3}, f_{k-2}, f_{k-1}, f_k$ меняются и содержат значения предыдущего и нового шагов интегрирования. Ниже приводятся полученные автором значения этих коэффициентов на каждом шаге интегрирования с новым шагом.

Первый шаг интегрирования с новым шагом h_m :

Расчет и конструирование

$$Y_{k+1} = Y_k + k_1 \cdot f_{k-3} + k_2 \cdot f_{k-2} + k_3 \cdot f_{k-1} + k_4 \cdot f_k,$$

где

$$k_1 = -\frac{h_m^2 (2h + h_m)^2}{24h^3}, \quad k_2 = \frac{h_m^2}{24 \cdot h^3} [18 \cdot h^2 + 16 \cdot h_m \cdot h + 3 \cdot h_m^2],$$

$$k_3 = -\frac{h_m^2}{24 \cdot h^3} [36 \cdot h^2 + 20 \cdot h_m \cdot h + 3 \cdot h_m^2], \quad k_4 = \frac{1}{24 \cdot h^3} [24 \cdot h^3 \cdot h_m + 22 \cdot h^2 \cdot h_m^2 + 8 \cdot h_m^3 \cdot h + h_m^4].$$

Второй шаг интегрирования с новым шагом h_m :

$$Y_{k+1} = Y_k + k_1 \cdot f_{k-3} + k_2 \cdot f_{k-2} + k_3 \cdot f_{k-1} + k_4 \cdot f_k,$$

где

$$k_1 = -\frac{h_m^3}{24 \cdot h^2 \cdot (2 \cdot h + h_m)} \cdot (17 \cdot h_m + 10 \cdot h), \quad k_2 = \frac{h_m^3}{12 \cdot h^2 \cdot (h + h_m)} \cdot (17 \cdot h_m + 20 \cdot h),$$

$$k_3 = \frac{1}{h^2 \cdot h_m} \cdot \left[\frac{(h + 2h_m)^4 - (h + h_m)^4}{8} \right] - \frac{1}{h^2 \cdot h_m} \cdot \left[\frac{h_m \cdot ((h + 2h_m)^3 - (h + h_m)^3)}{6} \right] -$$

$$-\frac{1}{h^2 \cdot h_m} \cdot \left[\frac{h_m \cdot (h + h_m) [(h + 2h_m)^2 - (h + h_m)^2]}{4} \right],$$

$$k_4 = \frac{h_m}{4 \cdot (2h + h_m) \cdot (h + h_m)} \cdot (65 \cdot h_m^2 - 10 \cdot h^2).$$

Третий шаг интегрирования с новым шагом h_m :

$$Y_{k+1} = Y_k + k_1 \cdot f_{k-3} + k_2 \cdot f_{k-2} + k_3 \cdot f_{k-1} + k_4 \cdot f_k,$$

где

$$k_1 = -\frac{9 \cdot h_m^4}{4 \cdot h \cdot (h + h_m) \cdot (h + 2 \cdot h_m)}, \quad k_2 = \frac{h_m}{24 \cdot h} \cdot (27 \cdot h_m + 10 \cdot h),$$

$$k_3 = -\frac{43 \cdot h_m^2 + 16 \cdot h_m \cdot h}{12 \cdot (h + h_m)}, \quad k_4 = \frac{119 \cdot h_m^2 + 46 \cdot h_m \cdot h}{24 \cdot (h + 2 \cdot h_m)}.$$

Четвертый шаг интегрирования с новым шагом h_m :

$$Y_{k+1} = Y_k + \frac{h_m}{24} \cdot [55 \cdot f_k - 59 \cdot f_{k-1} + 37 \cdot f_{k-2} - 9 \cdot f_{k-3}].$$

Видно, что все полученные формулы совпадают с основной (стандартной) формулой интегрирования по методу Адамса (3) в случае совпадения предыдущего и нового шагов интегрирования, что является косвенным подтверждением их справедливости.

4. Вывод формул. Для вывода формул воспользуемся интерполяционным многочленом Лагранжа для приближения правых частей уравнений интегрируемой системы и квадратурой

$$Y_{k+1} = Y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} p(x) dx. \quad (4)$$

Здесь x – независимое переменное, Y_{k+1}, Y_k – значения решения системы в текущей и следующей точках системы

$$\dot{Y} = f(x), \quad (5)$$

$p(x)$ – интерполяционный многочлен Лагранжа третьей степени, приближающий (аппроксимирующий) правые части системы (5).

Вывод формулы проведём для одного уравнения системы, т. е. для системы 1-го порядка.

Интерполяционный многочлен Лагранжа третьей степени имеет вид [3]

$$p(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \cdot f_{k-3} + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \cdot f_{k-2} + \\ + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \cdot f_{k-1} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \cdot f_k, \quad (6)$$

где x_0, x_1, x_2, x_3 – узлы интерполяции, т. е. точки, в которых значения правой части уравнения (5) известны, $f_{k-3} = f(x_0)$, $f_{k-2} = f(x_1)$, $f_{k-1} = f(x_2)$, $f_k = f(x_3)$.

При интегрировании с постоянным шагом h узлы интерполяции связаны соотношениями

$$x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \quad x_3 = x_0 + 3h. \quad (7)$$

Подставляя выражения (7) в формулу (6), и интегрируя полученное выражение в соответствии с (4), получим известную формулу метода Адамса (3).

Чтобы получить первую группу формул на участке смены шага интегрирования, осуществим аналогичную процедуру. Для первого шага интегрирования с изменённым (новым) шагом интегрирования узлы интерполяции по-прежнему связаны соотношениями (7), а квадратура (4) принимает вид

$$Y_{k+1} = Y_k + \int_{x_k}^{x_k+h_m} p(x) dx. \quad (8)$$

Тогда многочлен $p(x)$ примет вид

$$p(x) = -\frac{[(x-x_0)-h] \cdot [(x-x_0)-2h] \cdot [(x-x_0)-3h]}{6h^3} \cdot f_{k-3} + \\ + \frac{[(x-x_0)] \cdot [(x-x_0)-2h] \cdot [(x-x_0)-3h]}{2h^3} \cdot f_{k-2} - \\ - \frac{[(x-x_0)] \cdot [(x-x_0)-h] \cdot [(x-x_0)-3h]}{2h^3} \cdot f_{k-1} + \\ + \frac{[(x-x_0)] \cdot [(x-x_0)-h] \cdot [(x-x_0)-2h]}{6h^3} \cdot f_k. \quad (9)$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов коэффициент p_1 при f_{k-3} примет вид

$$p_1 = -\frac{(x-x_0)^3 - 6h(x-x_0)^2 + 11h^2(x-x_0) - 6h^3}{6h^3}. \quad (10)$$

Интегрируя (10) в интервале от x_k до $x_k + h_m$, получим значения коэффициента k_1 при f_{k-3} в формуле интегрирования:

$$k_1 = -\left[\frac{(x-x_0)^4}{24h^3} \right]_{x_k}^{x_k+h_m} + \left[\frac{(x-x_0)^3}{3h^2} \right]_{x_k}^{x_k+h_m} - \left[\frac{11(x-x_0)^2}{12h^2} \right]_{x_k}^{x_k+h_m} + (x-x_0)_{x_k}^{x_k+h_m}. \quad (11)$$

Так как в данном случае $x_k = x_0 + 3h$, $x_{k+1} = x_0 + 3h + h_m$, то после подстановки значений x_k , x_{k+1} в формулу (11) окончательно получим

$$k_1 = -\frac{h_m \cdot (2h + h_m)^2}{24h^3}. \quad (12)$$

Видно, что если h_m совпадает с h , то $k_1 = -\frac{9}{24}h$, что совпадает со значением коэффициента в формуле (3). Аналогичным способом получаются коэффициенты k_2, k_3, k_4 при f_{k-2}, f_{k-1}, f_k соответственно.

Расчет и конструирование

Чтобы получить значения коэффициентов в формуле интегрирования на втором шаге интегрирования с новым шагом h_m , необходимо положить узлы интерполяции равными

$$x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \quad x_3 = x_0 + 2h + h_m, \quad (13)$$

$$x_k = x_3 = x_0 + 2h + h_m, \quad x_{k+1} = x_k + h_m = x_0 + 2h + 2h_m. \quad (14)$$

Подставляя выражения (13) в (9) и интегрируя получившийся многочлен в интервале от x_k до x_{k+1} (14), получим искомые коэффициенты.

Чтобы получить значения коэффициентов в формуле интегрирования на третьем шаге интегрирования с новым шагом h_m , необходимо положить узлы интерполяции равными

$$x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + h + h_m, \quad x_3 = x_0 + h + 2h_m, \quad (15)$$

$$x_k = x_3 = x_0 + h + 2h_m, \quad x_{k+1} = x_k + h_m = x_0 + h + 3h_m. \quad (16)$$

Четвёртый шаг интегрирования осуществляется по стандартной формуле метода Адамса, но уже с новым шагом интегрирования h_m .

5. Пример. Предложенный метод был применён, например, при решении задачи построения плоской опорной траектории спускаемого летательного аппарата (СЛА), управление которым осуществляется регулированием угла атаки. В этом случае движение СЛА происходит только в вертикальной плоскости. Задача решалась при следующих условиях:

- движение СЛА описывается системой уравнений (1);
- начальное положение СЛА: $t_0 = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\lambda(0) = 0$, $R(0) = 6\,471\,100$ что соответствует высоте 100 км над поверхностью Земли;
- начальные значения кинематических параметров: $V(0) = 7800$ м/с, $\theta(0) = -8^\circ$, $\sigma(0) = 0$;
- терминальные условия к моменту начала измерений: $V_T = 3000$ м/с, $H_T = 8$ км, $\theta_T = -10^\circ$;
- точность выполнения заданных терминальных условий: $|V_n - V_T| \leq 50$ м/с, $|H_n - H_T| \leq 200$ м, $|\theta_n - \theta_T| \leq 0,5^\circ$.

Поставленная задача решалась в классе двухимпульсных законов управления. В этом случае управление U может быть задано с помощью шестимерного вектора $U = (P_1, P_2, t_1, t_2, t_3, t_4)$, где P_1, P_2 – значения тяг управляющих двигателей, t_1, t_2, t_3, t_4 – моменты переключения тяг. Применение предложенного метода интегрирования системы уравнений (1) позволило сократить время расчёта одной траектории от начального момента до момента начала измерений примерно в 4 раза, а общее время проектирования одной оптимальной траектории – примерно в 3 раза. При этом при длительности полёта свыше 30 минут при интегрировании системы уравнений (1) со средним шагом интегрирования 0,5 с отличие в результатах интегрирования по всем параметрам не превосходит 0,01% от значений, получаемых при интегрировании по методу Рунге–Кутты на всём промежутке интегрирования.

Заключение. Предложен метод быстрого построения опорной траектории спускаемого летательного аппарата. Метод включает процедуру автоматического выбора шага интегрирования и модифицированный метод Адамса. Модификация метода Адамса заключается в адаптации его к интегрированию на участке смены шага интегрирования. Полученная модификация может применяться и самостоятельно для интегрирования систем уравнений переменным шагом интегрирования. Предложенный метод применялся для решения задачи проектирования оптимальной траектории спуска космического аппарата с орбиты искусственного спутника Земли и показал свою эффективность.

Литература

1. Киселёв, В.И. Метод формирования опорной траектории спускаемого летательного аппарата. / В.И. Киселёв, Т.К. Сиразетдинов, А.С. Мещанов // Известия вузов. Авиационная техника, 1992. – №3. – С. 14–18.
2. Механика оптимального пространственного движения летательных аппаратов в атмосфере/ Л.М. Шкадов, Р.С. Буханова, В.Ф. Илларионов, В.П. Плохих. – М.: Машиностроение, 1972. – 240 с.
3. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов. – М.: Наука, 1975. – 631 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ ДВУХФАЗНОГО ЭЖЕКТОРА

Е.К. Спиридонов, С.Б. Школин

Уточнена математическая модель жидкостногазового эжектора с точки зрения анализа потенциальных возможностей аппарата. Рассмотрены предельные режимы по структуре двухфазного потока в камере смешения жидкостногазового эжектора, их влияние на теоретическую напорную характеристику струйного аппарата, результаты сравниваются с данными экспериментальных исследований.

Жидкостногазовые эжекторы (струйные насосы) находят широкое применение в энергетике, металлургии, химической, нефтяной и газовой промышленности в качестве газоотводящих аппаратов, вакуумных насосов, насосов-смесителей газовых, жидких и газообразных сред, гидрокомпрессоров. Столь широкое распространение струйных насосов в технике обусловлено их конструктивной простотой, отсутствием подвижных частей, возможностью размещения в труднодоступных местах. Однако, в ряде случаев их работа сопровождается перерасходом рабочей среды и энергии [1, 2]. Вместе с тем экономичность и надежность многих установок с жидкостногазовыми струйными насосами существенно зависит от качества последних. Так, по данным Кармановской ГРЭС углубление вакуума на 2 мм рт. ст. в конденсаторе паровой турбины мощностью 300 МВт, снабженной водовоздушными эжекторами, приводит к дополнительной выработке 60 000 МДж электрической энергии в сутки. Исходя из вышесказанного следует, что повышение экономичности жидкостногазовых эжекторов является актуальной задачей.

Одним из наиболее эффективных способов повышения экономичности работы двухфазных эжекторов является более точная оценка предельно допустимых параметров данных аппаратов на этапе проектирования.

Принципиальная схема жидкостногазового эжектора показана на рис. 1. Струя жидкости, формируемая соплом, с большой скоростью устремляется в рабочую камеру и увлекает за собой газ из приемной камеры. По мере продвижения вдоль рабочей камеры струя частично или полностью дробится на капли, которые, обмениваясь количеством движения с эжектируемым газом, распределяются по поперечному сечению камеры. В этом бурном двухфазном потоке сплошной средой является газ, а дискретной – струи и капли жидкости, причем скорости движения жидкости и газа различные. На этом начальном участке смесительной камеры давление постепенно нарастает по длине потока.

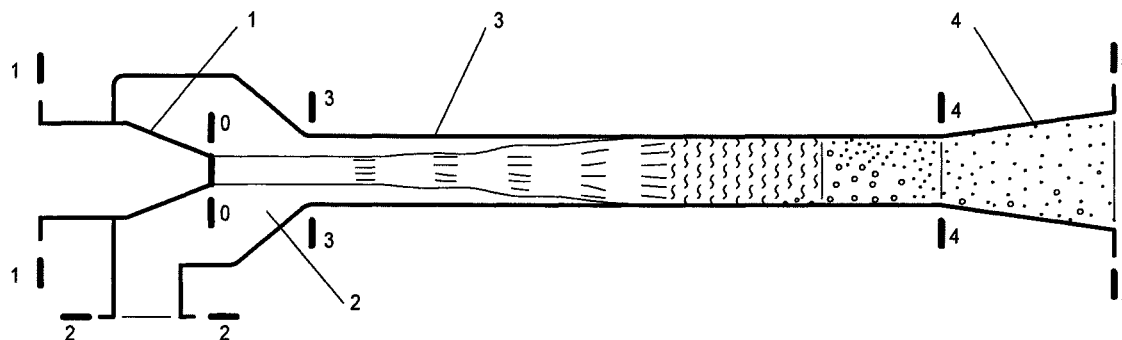


Рис. 1. Схема жидкостногазового струйного насоса с одноструйным соплом: 1 – сопло; 2 – приемная камера; 3 – камера смешения; 4 – диффузор. Сечения: 1-1 – подвод активной жидкости; 2-2 – подвод пассивного потока газа; 3-3 – входное сечение камеры смешения; 4-4 – входное сечение диффузора; 5-5 – выходное сечение аппарата

При некотором противодавлении за эжектором в газожидкостном потоке на небольшой длине русла происходит внезапное изменение структуры течения. Это структурное изменение двухфазного потока, называемое прыжком или скачком перемешивания, сопровождается резким возрастанием давления, снижением средней по сечению скорости, диссипацией энергии. За скачком

Расчет и конструирование

перемешивания сплошной средой в потоке уже является жидкостью, а дискретной – газ. Причем скольжение между ними практически отсутствует. Поток находится в спокойном состоянии, давление вдоль потока постепенно уменьшается [5].

Таким образом, в рабочей камере жидкостногазового струйного насоса происходит сложный гидромеханический процесс обмена количеством энергии между струей жидкости и газом с одновременным их смешением и повышением статического давления.

Основными безразмерными параметрами работы жидкостногазового эжектора являются: степень повышения давления (степень сжатия) $\varepsilon_{52} = \frac{P_5}{P_2}$ (для эжектора без диффузора степень

повышения давления $\varepsilon_{42} = \frac{P_4}{P_2}$), относительное динамическое давление струи $\Gamma = \frac{\rho_{ж} \cdot V_{ж0}^2}{P_{Г2}}$,

массовый μ и объемный α_2 коэффициенты эжекции: $\mu = \frac{m_{Г}}{m_{ж}}$; $\alpha_2 = \frac{Q_{Г2}}{Q_{ж}}$; коэффициент

скольжения фаз $\psi = \frac{V_{Г3}}{V_{ж3}}$, относительная площадь сопла $\Omega_{03} = \frac{A_0}{A_3}$ и относительная площадь

диффузора $\Omega_{54} = \frac{A_5}{A_4}$. Здесь $P_i, \rho_{Гi}, T_{Гi}$ – давление, плотность газа, температура газа в i -м сече-

нии, $V_{жи}$ – скорость жидкости (активного потока) в i -м сечении (см. рис. 1), $V_{Гi}, V_{Ci}$ – скорости газа и жидкостногазовой смеси в i -м сечении, $m_{Г}$ – массовый расход газа, $m_{ж}$ – массовый расход активной жидкости, $Q_{Г2}, Q_{ж}$ – объемные расходы пассивного газа в сечении 2-2 и активной жидкости, A_0 и A_3 – площади проходных сечений сопла и камеры смешения, A_4 и A_5 – площади входного и выходного проходных сечений диффузора [5, 6].

Взаимосвязи безразмерных параметров эжектора выражают его характеристики, важнейшей из которых является безразмерная напорная характеристика, отражающая зависимость степени повышения давления от объемного коэффициента эжекции при тех или иных параметрах струи Γ и относительных площадях сопла и диффузора Ω_{03}, Ω_{54} .

Аналитическое выражение напорной характеристики, полученное на основе уравнений количества движения, баланса расходов, уравнения состояния газожидкостной смеси и уравнения энергии имеет вид [5, 6]

$$\varepsilon_{42} = 0,4 \cdot \left[\varepsilon_{42X} + \sqrt{\varepsilon_{42X}^2 - \frac{4 \cdot c \cdot \alpha_2 \cdot \Omega_{03}^2 \cdot \Gamma}{K_{П4} \cdot K_T}} \right], \quad (1)$$

$$\varepsilon_{42X} = 1 + \Gamma \cdot \Omega_{03} (1 - c \cdot \Omega_{03}), \quad (2)$$

$$c = 1 + 0,5 \cdot \zeta_{34}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{52} + \frac{\alpha_2}{K_T} \cdot \ln \varepsilon_{52} + \frac{\Gamma}{2} \cdot \left[\frac{\Omega_{03}}{\Omega_{54}} \right]^2 \cdot \left[1 + \frac{\alpha_2}{\varepsilon_{52} \cdot K_{П5} \cdot K_T} \right]^2 = \\ = \varepsilon_{42} + \frac{\alpha_2}{K_T} \cdot \ln \varepsilon_{42} + \frac{\Gamma \cdot \Omega_{03}^2}{2} \cdot \left[1 + \frac{\alpha_2}{\varepsilon_{42} \cdot K_{П4} \cdot K_T} \right]^2 \cdot (1 - \zeta_{45}) - \frac{\alpha_2}{K_T} \cdot \ln \frac{K_{П5}}{K_{П4}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь ε_{42X} – степень повышения давления в рабочей камере при холостом режиме работы струйного насоса ($m_{Г} = 0; \alpha_2 = 0$), ζ_{34} – коэффициент сопротивления камеры смешения,

$K_{П4} = 1 - \frac{P_{Н.П}}{P_4}$ – поправочный коэффициент на давление насыщенных паров жидкости, $P_{Н.П}$ –

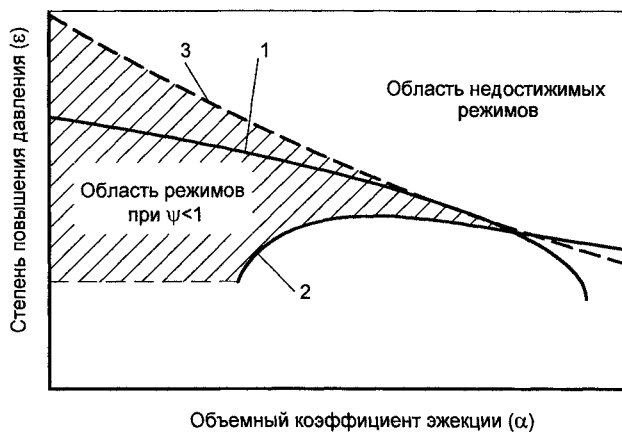
давление насыщенных паров, $K_T = \frac{T_{Г}}{T_{ж}}$ – поправочный коэффициент на различие температур газа

$T_{Г}$ и жидкости $T_{ж}$ перед их поступлением в эжектор.

Для эжектора без диффузора ($\Omega_{s4} = 1$) степень повышения давления может быть определена по уравнению (6).

Потенциально возможные режимы работы жидкостногазового эжектора лучше всего описывается семейством экстремальных характеристик при том или ином относительном динамическом давлении струи Γ . Каждая из экстремальных характеристик представляет собой огибающую семейства индивидуальных напорных характеристик, выражающих зависимость степени сжатия аппарата от объемного коэффициента эжекции. Параметром семейства является относительная площадь сопла Ω_{03} . Экстремальные характеристики, приведенные в [6, 7], устанавливают ограничения на физически осуществимые степени сжатия и коэффициенты эжекции аппарата при том или ином значении относительного давления активного потока Γ . Однако практика показывает, что существуют другие ограничения, кроме границы физически осуществимых режимов.

В работах [6–8] рассмотрено ограничение по предельно достижимому коэффициенту скольжения фаз. Данное ограничение заключается в невозможности достижения скоростей газа пассивной среды выше скорости активного потока жидкости. Таким образом, максимальное значение коэффициента скольжения фаз не может принимать значения выше единицы (при турбулентном режиме течения выше 0,84–0,91), следовательно, область достижимых режимов сужается (рис. 2). В последующем режим, соответствующий предельному коэффициенту скольжения фаз назовем первым предельным режимом. Кривые первого предельного режима можно видеть на рис. 2, 6, 10 (линии 2).



Объемный коэффициент эжекции (α)

Рис. 2. Область достижимых режимов по максимальному скольжению фаз: 1 – теоретическая напорная характеристика двухфазного эжектора; 2 – кривая предельного режима по коэффициенту скольжения; 3 – экстремальная напорная характеристика

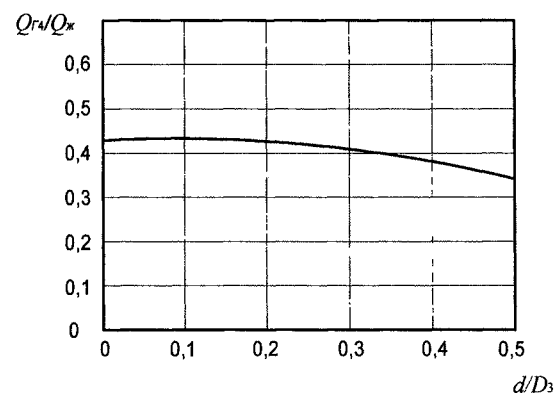


Рис. 3. Зависимость отношения объемных расходов газа и жидкости за прыжком перемешивания от относительного диаметра капель

Для выявления дополнительных ограничений на производительность эжектора проанализируем процесс смены структуры двухфазного потока в прыжке перемешивания. До прыжка перемешивания в пространстве рабочей камеры распределены капли жидкости, отделенные друг от друга газовой средой. В прыжке газ сжимается, его давление растет, а объемный расход падает. Этот процесс сопровождается смыканием капель жидкости. В итоге происходит смена сплошной фазы в двухфазном потоке. До прыжка перемешивания сплошной средой был газ, за прыжком поток представляет собой жидкость с диспергированными в ней пузырьками газа. Если принять такую модель течения двухфазной среды в рабочей камере и отождествить все жидкие капли шариками с одним и тем же диаметром d , то из условия заполнения цилиндрического пространства камеры смешения жидкими шариками (рис. 4) приходим к следующему соотношению объемных расходов газа $Q_{Г4}$ и жидкости $Q_{Ж}$ за прыжком перемешивания [6–8]:

$$\frac{Q_{Г4}}{Q_{Ж}} = \frac{27}{2\pi(3 + \frac{d^2}{D_3^2})} - 1, \tag{5}$$

где D_3 – диаметр камеры смешения.

Расчет и конструирование

Зависимость (5) проиллюстрирована на рис. 3 [8].

Видно, что при $d/D_3 < 0,1$ соотношение объемных расходов стабилизируется и становится равным 0,43. При изотермическом сжатии объемный расход на входе в приемную камеру $Q_{Г2} = Q_{Г4} \cdot \varepsilon_{42}$. Отсюда предельный коэффициент эжекции, соответствующий второму предельному режиму

$$\alpha'_{**} = 0,43 \cdot \varepsilon_{42}. \quad (6)$$

При давлениях за камерой смешения P_4 , при которых по всей длине наблюдается бурное течение газожидкостной среды, при достаточной длине смесительной камеры вероятно существование пенистого потока, в котором сплошной фазой также является жидкость. В этих условиях предельной структурой может быть плотная упаковка пузырьков газа, окруженных жидкостью (рис. 5). Такое состояние потока назовем третьим предельным режимом, для которого

$$\alpha_2 < \alpha_{**} = 2,33 \cdot \varepsilon_{42}. \quad (7)$$

Выражение (7) является третьим необходимым условием, ограничивающим максимальную величину коэффициента эжекции.

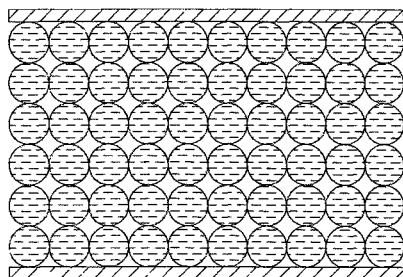


Рис. 4. Смыкание капель жидкости в камере смешения

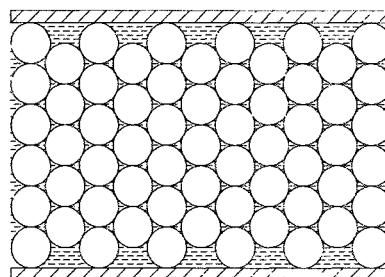


Рис. 5. Смыкание пузырьков воздуха в пенистом потоке

Кривые предельных по структуре режимов рассчитанные по зависимостям (1)–(4), (6), (7) показаны на рис. 7–9 (кривые второго режима – линиями 2, третьего – линиями 3) и на рис. 6, 10 (кривые второго режима – линиями 3, третьего – линиями 4).

Линиями 1 на рис. 6–10 изображены безразмерные напорные характеристики для нескольких относительных площадей сопла и параметров Γ , при коэффициентах сопротивления смесительной камеры $\zeta_{34} = 0,6$ и диффузора $\zeta_{45} = 0,4$. Данные характеристики имеют относительно пологую часть с незначительным падением степени сжатия на начальном интервале значений коэффициента эжекции и участок резкого снижения степени сжатия.

Так как существование критических режимов по структуре двухфазного потока требует экспериментального подтверждения, нанесем экспериментальные точки на поля теоретических напорных характеристик. Для этого воспользуемся экспериментальными данными Р.Ж. Каннингем [2, 3] для одноструйного водовоздушного эжектора с диффузором и без него, а также опытными данными Ю.Н. Васильева [4] для эжектора с двенадцатиструйным соплом при различных значениях безразмерного параметра Γ .

В опытах Р.Ж. Каннингем испытывается эжектор при параметрах: $P_2 = 89,8$ кПа; $\Omega_0 = 0,3$; $\Gamma = 14,8$; $\Omega_{54} = 4,25$. Экспериментальные точки для данного струйного аппарата с нанесенной теоретической характеристикой, а также кривыми предельных режимов представлены на рис. 7.

Сравнение опытных данных с теоретической характеристикой (см. рис. 6, 7) дает удовлетворительное соответствие на начальном (небольшие коэффициенты эжекции α_2) участке; при дальнейшем увеличении коэффициента эжекции происходит резкое падение опытной степени повышения давления. Из характеристик, приведенных на рис. 6 и 7, видно, что начало участка падения степени повышения давления практически совпадает с точкой пересечения напорной характеристики эжекторов с кривой третьего предельного режима (т. е. режима насыщения двухфазного потока пузырьками газа).

В экспериментах Ю.Н. Васильева экспериментальные точки получены при нескольких параметрах Γ . Для опытов при $\Gamma = 7,37$ и $\Gamma = 16,5$ точки получены для эжекторов при разных давлениях питания P_1 и давлениях всасывания P_2 (см. рис. 6, 9).

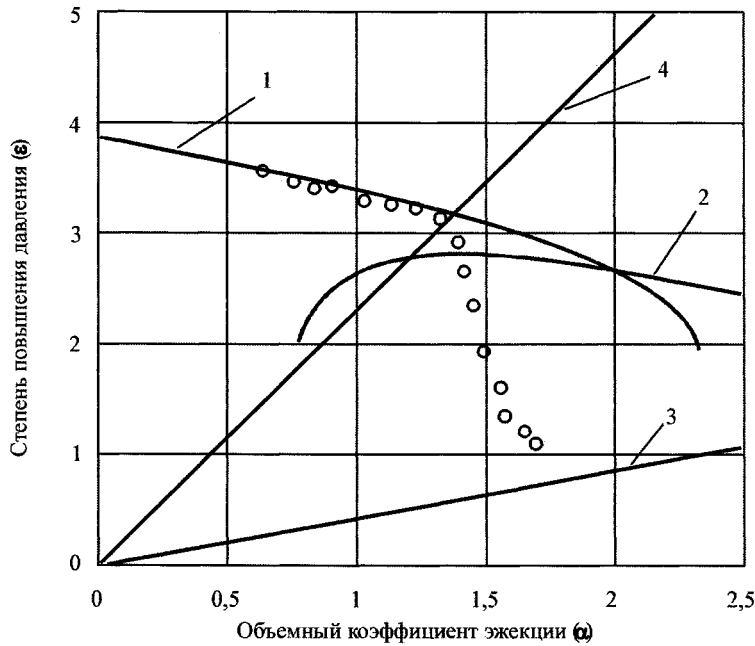


Рис. 6. Кривые предельных режимов в поле напорной характеристики двухфазного эжектора без диффузора $\Gamma=14,8$ (опыты Каннингем): 1 – теоретическая напорная характеристика двухфазного эжектора; 2 – кривая предельного режима по коэффициенту скольжения; 3 – кривая 2-го предельного режима; 4 – кривая 3-го предельного режима

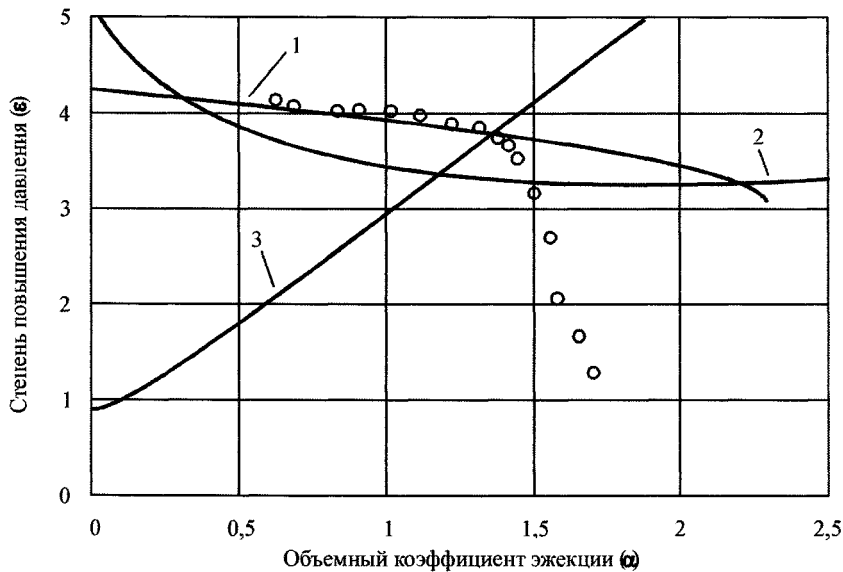


Рис. 7. Кривые предельных режимов в поле напорной характеристики двухфазного эжектора с диффузором $\Gamma=14,8$ (опыты Каннингем): 1 – теоретическая напорная характеристика двухфазного эжектора; 2 – кривая 2-го предельного режима; 3 – кривая 3-го предельного режима

Экспериментальным точкам, нанесенным на график маркерами круглой формы, соответствуют значения: $P_1 = 2$ МПа; $P_2 = 0,4$ МПа при $\Gamma = 7,37$; $P_2 = 0,2$ МПа при $\Gamma = 16,5$. Экспериментальным точкам нанесенным на график маркерами ромбической формы соответствуют значения $P_1 = 4$ МПа; $P_2 = 0,8$ МПа при $\Gamma = 7,37$; $P_2 = 0,4$ МПа при $\Gamma = 16,5$. Остальные параметры: $\Omega_{03} = 0,3$; $\Omega_{54} = 16$. На поле данных точек также нанесены теоретические напорные характеристики, рассчитанные по зависимостям (1)–(4), и дополненные кривыми предельных по структуре потока режимов, (см. рис. 8–10).

Сопоставляя опыты Васильева с расчетными напорными характеристиками, обнаруживаем их качественное согласие до участка резкого падения опытной степени сжатия. Отличие между

Расчет и конструирование

экспериментальными характеристиками (см. рис. 8, 9) при одинаковых значениях Γ объясняется разными значениями коэффициентов потерь смесительной камеры и диффузора. При расчете теоретической напорной характеристики их величины, за отсутствием точных данных, принимались ориентировочно ($\zeta_{34} = 0,6$; $\zeta_{45} = 0,4$), причем равными для всех величин давления питания и всасывания, что, несомненно, влечет некоторую погрешность.

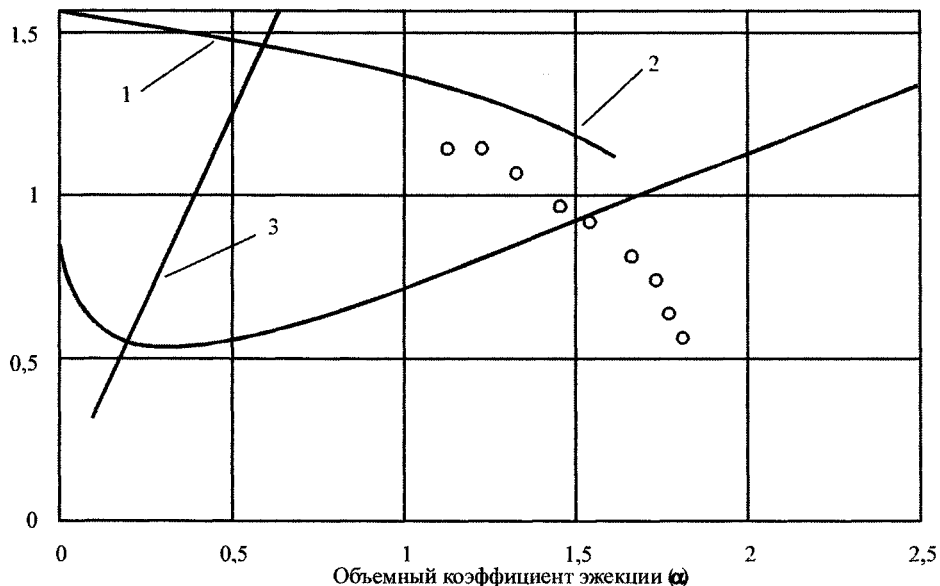


Рис. 8. Кривые предельных режимов в поле напорной характеристики двухфазного эжектора с диффузором $\Gamma=2,76$ (опыты Ю.Н. Васильева): 1 – теоретическая напорная характеристика двухфазного эжектора; 2 – кривая 2-го предельного режима; 3 – кривая 3-го предельного режима

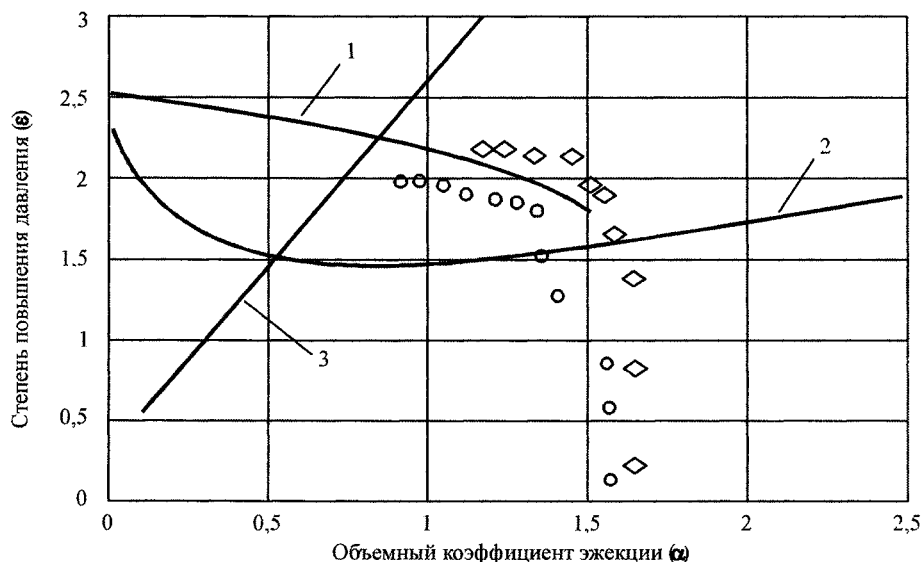


Рис. 9. Кривые предельных режимов в поле напорной характеристики двухфазного эжектора с диффузором $\Gamma=7,37$ (опыты Ю.Н. Васильева): 1 – теоретическая напорная характеристика двухфазного эжектора; 2 – кривая 2-го предельного режима; 3 – кривая 3-го предельного режима

Следует отметить тот факт, что при параметре $\Gamma = 14,8...16,5$ (см. рис. 6, 7, 10) взаимное расположение кривых напорных характеристик и кривых предельных режимов по насыщенности потока газовыми пузырьками практически одинаково для рассмотренных опытов обоих авторов. То есть, обрыв относительно пологой части напорной характеристики определяется началом третьего предельного режима (в точке пересечения с соответствующей кривой), в то время как все экспериментальные точки пологой части кривой лежат в области достижимой с точки зрения

второго предельного режима (режима смыкания капель жидкости в камере смешения) (см. рис. 6, 9). При параметрах $\Gamma = 2,76$ и $\Gamma = 7,37$ пологая часть напорных характеристик попадает в поле между вторым и третьим режимом.

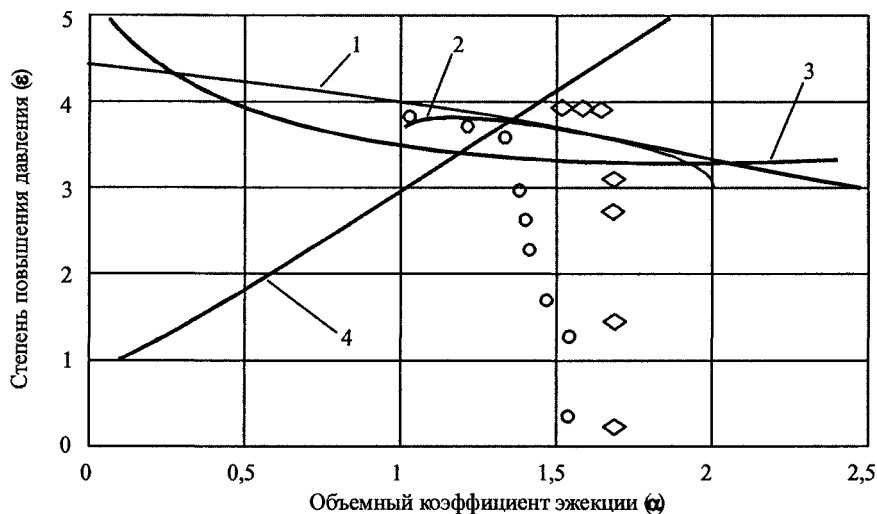


Рис. 10. Кривые предельных режимов в поле напорной характеристики двухфазного эжектора с диффузором $\Gamma=16,5$ (опыты Ю.Н. Васильева): 1 — теоретическая напорная характеристика двухфазного эжектора; 2 — кривая предельного режима по коэффициенту скольжения; 3 — кривая 2-го предельного режима; 4 — кривая 3-го предельного режима

Таким образом, физико-математическая модель удовлетворительно описывает явления, происходящие в жидкостногазовых эжекторах как на допредельных, так и на предельных режимах (экспериментальные точки удовлетворительно укладываются на теоретические кривые напорных характеристик). Причем достижение предельных режимов может быть обусловлено как предельной структурой пенного потока, так и структурой, образованной плотной упаковкой капель жидкости. Можно ожидать, что в первом случае на всем протяжении смесительной камеры наблюдается бурное газожидкостное течение, а во втором случае на выходном участке камеры смешения наблюдается спокойное течение.

Литература

1. Соколов, Е.Я. Струйные аппараты — 3-е изд., перераб. / Е.Я. Соколов, Н.М. Зингер. — М.: Энергоатомиздат, 1989. — 352 с.
2. Каннингем, Р.Ж. Сжатие газа с помощью жидкоструйного насоса / Р.Ж. Каннингем // Теоретические основы инженерных расчетов. — М.: Мир, 1974. — №3. — С. 112–127.
3. Каннингем, Р.Ж. Длины участка разрушения струи и смешивающей горловины жидкостноструйного насоса для перекачки газа / Р.Ж. Каннингем, Р.И. Допкин // Теоретические основы инженерных расчетов. — М.: Мир, 1974. — №3. — С. 128–141.
4. Васильев, Ю.Н. Экспериментальное исследование напорного водовоздушного эжектора при высоких давлениях рабочих тел / Ю.Н. Васильев, Е.П. Гладков // Труды ЦИАМ. Центральный институт авиационного моторостроения, 1980.
5. Спиридонов, Е.К. Энергетический анализ жидкостногазовых течений / Е.К. Спиридонов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение», 2003. — Вып. 3. — №1 (17). — С. 141–150.
6. Спиридонов, Е.К. Исследование экстремальных характеристик водовоздушного эжектора / Е.К. Спиридонов, В.К. Темнов // Динамика пневмогидравлических систем: Тематич. сб. научн. тр. — Челябинск: ЧПИ, 1983. — С. 62–75.
7. Спиридонов, Е.К. Предельные режимы работы двухфазного струйного эжектора / Е.К. Спиридонов, С.Б. Школин // Динамика машин и рабочих процессов: сборник докладов Всероссийской научно-технической конференции. — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. — С. 167–172.
8. Шпитов, А.Б. О предельных режимах работы жидкостногазового эжектора / А.Б. Шпитов, Е.К. Спиридонов // Исследование силовых установок и шасси транспортных и тяговых машин: Тематич. сб. научн. тр. — Челябинск: ЧТУ, 1991. — С. 129–134.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В ТОНКИХ ПРОФИЛИРОВАННЫХ ЗАЗОРАХ С ВИБРАЦИЕЙ, ОБЪЕДИНЕННЫХ В Т-ОБРАЗНУЮ СТРУКТУРУ

С.Г. Некрасов, Н.А. Пашнина

Рассмотрена математическая модель течения газа в профилированных зазорах с вибрацией, последовательно соединенных в Т-образную структуру. Т-образная структура сформирована из профилированных плоского слоя и цилиндрического капилляра. Представлены результаты численного решения модельных уравнений с использованием метода конечных разностей в сравнении с результатами аналитического решения, полученного при использовании асимптотического анализа. Исследованы интегральные характеристики зазоров с вибрацией, совместно работающих в Т-образной структуре, а также определены геометрические параметры таких зазоров, оказывающие значительное влияние на интегральные характеристики.

Введение. В теории газовой смазки эффект создания избыточного давления газа под действием вибрации в тонком слое называют обычно «вибронесущим» или эффектом «сдавливания слоя» и относят к разновидности газодинамического эффекта.

В теории и практике вибронесущих опор наблюдаются массовые потоки, ухудшающие такие характеристики опор как, например, несущая способность, точность позиционирования. Однако эффект направленного течения газа может быть использован и самостоятельно для создания ряда технических устройств компрессорного типа.

Предлагаемый способ создания направленного течения газа [1] связан с тем, что профилирование, т. е. придание определенной формы зазору, способствует генерации в нем распределения давлений, отражающего форму профиля. Этот эффект рассматривался авторами при исследовании интегральных характеристик плоского слоя с вибрацией [2, 3], где ряд выводов были получены на основе асимптотического анализа. Однако, более полное представление об интегральных характеристиках слоя можно получить, основываясь на результатах численного решения модельных уравнений, определяющих течение газа в слое. В частности, численное моделирование позволяет получить результаты, достоверно отражающие работу слоя как в диапазоне больших частот, используемых для формирования эффекта «сдавливания слоя», так и в диапазоне малых частот. Именно в диапазоне малых частот можно ожидать переход количественных изменений характеристик слоя в качественные, например, появление расхода слоя, достаточного для промышленного использования в области приборостроения.

Не менее перспективным можно считать создание гибридных устройств в виде комбинации слоев различных конфигураций, например профилированные плоский и цилиндрический, плоский и капилляр. Здесь уже необходимо согласование толщины зазора, глубины и формы профиля в одном слое с этими же параметрами в другом. Не менее важным, особенно в области малых частот вибрации, является направление движения ограничивающих слой поверхностей в каждом из слоев, например, синфазное или противофазное.

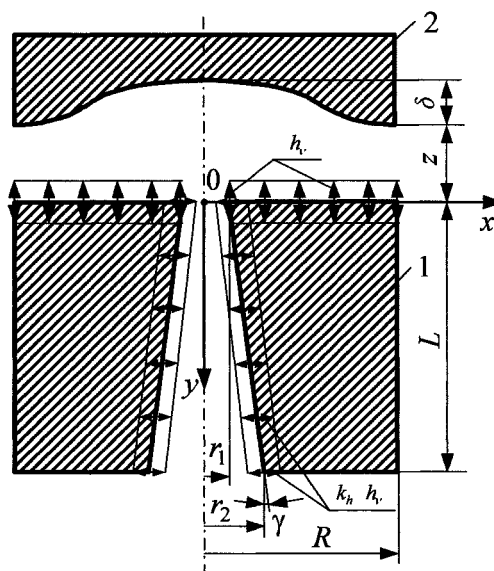


Рис. 1. Осесимметричная Т-образная структура последовательно соединенных профилированных плоского слоя и цилиндрического капилляра с вибрацией

Математическая модель. На рис. 1 приведена схема одного из возможных сопряжений профилированных плоского слоя и капилляра с вибрацией, образующих осесимметричную T-образную структуру при их последовательном соединении.

Профилированный капилляр выполнен в элементе 1 в виде отверстия длиной L с входным r_1 и выходным r_2 радиусами.

Профилированный плоский слой образован профилированной поверхностью диска 2 с глубиной профиля δ и плоской поверхностью элемента 1. Поверхности элементов 1 и 2, формирующих плоский слой, расположены на расстоянии z друг от друга. Элемент 1 совершает вынужденные колебания обычно на одной из резонансных частот с амплитудой h_v . Боковые поверхности элемента 1 совершают колебания с амплитудой в k_h раз меньше амплитуды h_v , где k_h – безразмерный коэффициент, близкий к коэффициенту Пуассона материала элемента 1.

Представленная на рис. 1 структура отражает конструктивные черты реального устройства, но имеет все необходимые признаки обобщенных сопряженных профилированных зазоров и позволяет, не теряя общности рассуждений, распространить полученные результаты на сопряженные зазоры других конфигураций.

Функции зазоров, образованных смазываемыми поверхностями элементов 1 и 2, определяются видом (1) для профилированного плоского слоя в полярной системе координат, и видом (2) для профилированного капилляра в цилиндрической системе координат:

$$h_{pl} = z + \delta \cos\left(\frac{x-r_1}{R-r_1} \frac{\pi}{2}\right) + h_v \cos(\tau), \quad (1)$$

$$h_{is} = r_1 + \operatorname{tg}(\gamma)y + k_h h_v \cos(\tau), \quad (2)$$

где x – радиальная координата ($r_1 \leq x \leq R$); y – продольная координата ($0 \leq y \leq L$); n – показатель степени; $\tau = vt$ – безразмерное время; v – циклическая частота колебаний элемента 1; t – время.

В (1) второе слагаемое определяет профиль зазора, для описания которого используется тригонометрическая функция косинуса со степенной зависимостью от показателя крутизны профиля n ($0 < n < \infty$), что позволяет универсально описывать осесимметричный профиль рабочей поверхности элемента 2 любой формы. Третьи слагаемые в (1) и (2) определяют вибрационную составляющую зазора. В (2) второе слагаемое определяет вид профиля капилляра.

Для получения универсальных моделей вместо размерных величин вводятся безразмерные величины, так функция (1) относится к максимальному значению зазора ($\delta+z$), функция (2) к радиусу входного отверстия r_1 , радиальная координата к радиусу R и продольная координата к длине L . Вводятся следующие безразмерные величины: $r = x/R$ – безразмерная радиальная координата ($\kappa \leq r \leq 1$), где $\kappa = r_1/R$; $Z = z/(\delta+z)$; $\Delta = \delta/(\delta+z)$; $H_{pl\tau} = h_v/(\delta+z)$; $w = y/L$ – безразмерная продольная координата ($0 \leq w \leq 1$), где $K = \operatorname{tg}(\gamma) \cdot L/r_1$; $H_{is\tau} = k_h \cdot h_v/r_1$.

С учетом введенных безразмерных величин функции (1) и (2) принимают вид

$$H_{pl} = H_{pl0} + H_{pl\tau} \cos(\tau), \quad H_{is} = H_{is0} + H_{is\tau} \cos(\tau),$$

где $H_{pl0} = \Delta \cos^n\left(\frac{r-\kappa}{1-\kappa} \frac{\pi}{2}\right) + Z$, $H_{is0} = 1 + Kw$ – независимые от времени составляющие функций зазоров.

Для описания течения газа используем обычные допущения теории смазки. Полагаем, что смазочное вещество (газ) может рассматриваться как сплошная среда, динамический коэффициент вязкости не зависит от давления, режим течения в смазочном слое является ламинарным, тепловой режим изотермическим, силами инерции можно пренебречь по сравнению с силами вязкости, давление не зависит от поперечной зазору координаты, характерный продольный размер слоя много больше поперечного. В этих условиях для описания ламинарного изотермического течения газа с числами Рейнольдса порядка $Re \sim 1$ в тонких газовых слоях с вибрацией можно использовать уравнение Рейнольдса [4], при этом математическую модель задачи получаем, решая его совместно с уравнениями неразрывности и состояния. В результате получаем уравнение, описывающее распределение давления в слое для вспомогательной функции $\Psi = PH$, где P – давление в слое. Функция Ψ обладает рядом полезных по сравнению с давлением P свойств и, в частности, существенно большей гладкостью, так как направления изменения входящих в нее множителей всегда противоположны. Данный факт давно подмечен в теории смазки и использу-

Расчет и конструирование

ется для поиска приближенных аналитических решений, но он не менее полезен и при численном решении, так как позволяет существенно улучшить сходимость задачи.

Тогда, следуя работе [5], получаем следующие модельные уравнения в полярной системе координат (r, θ) для осесимметричного течения газа в плоском слое и капилляре в цилиндрической системе координат (w, θ) :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{H_{pl}}{2} \frac{\partial \Psi_{pl}^2}{\partial r} - \Psi_{pl}^2 \frac{\partial H_{pl}}{\partial r} \right) \right] = r \Lambda_{v,pl} \frac{\partial \Psi_{pl}}{\partial \tau}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial w} \left[H_{is0} \left(\frac{H_{is}}{2} \frac{\partial \Psi_{is}^2}{\partial w} - \Psi_{is}^2 \frac{\partial H_{is}}{\partial w} \right) \right] = H_{is0} \Lambda_{v,is} \frac{\partial \Psi_{is}}{\partial \tau}, \quad (4)$$

где $\Lambda_{v,pl} = \frac{12\mu\nu R^2}{P_a(\delta+z)^2}$ и $\Lambda_{v,is} = \frac{6\mu\nu L^2}{P_a r_1^2}$ – безразмерные частотные параметры сжимаемости

профилированных плоского слоя и капилляра; μ – динамическая вязкость, P_a – атмосферное давление.

Уравнение (4) получено для цилиндрического капилляра по аналогии с уравнением для цилиндрического слоя в предельном случае, когда радиус внутренней ограничивающей слой поверхности стремится к нулю, что ведет к переходу номинального зазора слоя в радиус капилляра, при сохранении такой фундаментальной характеристика слоя, как зазор.

Система граничных и начальных условий для уравнений (3) и (4) при независимом рассмотрении плоского слоя и капилляра отражает их естественный характер и может быть определена в виде

$$\Psi_{pl}(r=\kappa) = H_{pl}(r=\kappa), \quad \Psi_{pl}(r=1) = H_{pl}(r=1), \quad \Psi_{pl}(\tau=0) = \Psi_{pl0} = H_{pl0}, \quad (5)$$

$$\Psi_{is}(w=0) = H_{is}(w=0), \quad \Psi_{is}(w=1) = H_{is}(w=1), \quad \Psi_{is}(\tau=0) = \Psi_{is0} = H_{is0}, \quad (6)$$

$$\Psi_{pl}(\tau) = \Psi_{pl}(\tau+2\pi), \quad \Psi_{is}(\tau) = \Psi_{is}(\tau+2\pi). \quad (7)$$

При рассмотрении Т-образной структуры краевые условия (5) и (6) для общей точки, принадлежащей плоскому слою и капилляру с координатами $r=\kappa$ и $w=0$, заменяются условиями равенства давлений в общей точке и условием равенства расходов в плоском слое и капилляре.

Краевые задачи (3)–(7) будут использоваться для получения численного решения.

Численное решение. Для линеаризации задачи воспользуемся итерационной схемой с линеаризацией по методу Ньютона [6]

$$L'_{\Psi_0}(\Psi_{n+1}) = L'_{\Psi_0}(\Psi_n) - L(\Psi_n), \quad (8)$$

где пространственно-временные дифференциальные операторы имеют вид

$$L(\Psi_{pl}) = \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{H_{pl}}{2} \frac{\partial \Psi_{pl}^2}{\partial r} - \Psi_{pl}^2 \frac{\partial H_{pl}}{\partial r} \right) \right] - r \Lambda_{v,pl} \frac{\partial \Psi_{pl}}{\partial \tau} \quad \text{– для плоского слоя,}$$

$$L(\Psi_{is}) = \frac{\partial}{\partial w} \left[H_{is0} \left(\frac{H_{is}}{2} \frac{\partial \Psi_{is}^2}{\partial w} - \Psi_{is}^2 \frac{\partial H_{is}}{\partial w} \right) \right] - H_{is0} \Lambda_{v,is} \frac{\partial \Psi_{is}}{\partial \tau} \quad \text{– для капилляра,}$$

Ψ_0 – начальное приближение для искомых функций, Ψ_n и Ψ_{n-1} – соответственно n и $n+1$ итерационное приближение, L' – производная Фреше в виде следующих линейных операторов:

$$L'_{\Psi_0}(\Psi_{pl}) = \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(H_{pl} \Psi_{pl0} \frac{\partial \Psi_{pl}}{\partial r} - 2\Psi_{pl0} \Psi_{pl} \frac{\partial H_{pl}}{\partial r} \right) \right] - r \Lambda_{v,pl} \frac{\partial \Psi_{pl}}{\partial \tau},$$

$$L'_{\Psi_0}(\Psi_{is}) = \frac{\partial}{\partial w} \left[H_{is0} \left(H_{is} \Psi_{is0} \frac{\partial \Psi_{is}}{\partial w} - 2\Psi_{is0} \Psi_{is} \frac{\partial H_{is}}{\partial w} \right) \right] - H_{is0} \Lambda_{v,is} \frac{\partial \Psi_{is}}{\partial \tau}.$$

В результате, после преобразований, уравнение (8) принимает вид уравнения (9) для плоского слоя и (10) для капилляра:

$$\frac{\partial}{\partial r} W_{pl} - \frac{\partial}{\partial \tau} E_{pl} = \frac{\partial}{\partial r} \Phi_{pl}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial w} W_{is} - \frac{\partial}{\partial \tau} E_{is} = \frac{\partial}{\partial w} \Phi_{is}, \quad (10)$$

где по аналогии с уравнением теплопроводности введены следующие функции:

– функции источника

$$\Phi_{pl} = r \left(H_{pl} \frac{\partial \Psi_{pl0} \Psi_{pln}}{\partial r} - 2 \Psi_{pl0} \Psi_{pln} \frac{\partial H_{pl}}{\partial r} - \frac{H_{pl}}{2} \frac{\partial \Psi_{pln}^2}{\partial r} + \Psi_{pln}^2 \frac{\partial H_{pl}}{\partial r} \right), \quad (11)$$

$$\Phi_{ts} = H_{ts0} \left(H_{ts} \frac{\partial \Psi_{ts0} \Psi_{tsn}}{\partial w} - 2 \Psi_{ts0} \Psi_{tsn} \frac{\partial H_{ts}}{\partial w} - \frac{H_{ts}}{2} \frac{\partial \Psi_{tsn}^2}{\partial w} + \Psi_{tsn}^2 \frac{\partial H_{ts}}{\partial w} \right), \quad (12)$$

– функции потока

$$W_{pl} = r \left(H_{pl} \frac{\partial \Psi_{pl0} \Psi_{pln+1}}{\partial r} - 2 \Psi_{pl0} \Psi_{pln+1} \frac{\partial H_{pl}}{\partial r} \right), \quad (13)$$

$$W_{ts} = H_{ts0} \left(H_{ts} \frac{\partial \Psi_{ts0} \Psi_{tsn+1}}{\partial w} - 2 \Psi_{ts0} \Psi_{tsn+1} \frac{\partial H_{ts}}{\partial w} \right), \quad (14)$$

– функции энергии

$$E_{pl} = r \Lambda_{vpl} \Psi_{pln+1}, \quad (15)$$

$$E_{ts} = H_{ts0} \Lambda_{vts} \Psi_{tsn+1}. \quad (16)$$

Дивергентная форма записи уравнений (9) и (10) позволяет, воспользовавшись формулой Грина, представить их в интегральной форме:

$$\oint_D E_{pl} \partial r - W_{pl} \partial \tau = - \iint_G \frac{\partial}{\partial r} \Phi_{pl} \partial r \partial \tau, \quad (17)$$

$$\oint_I E_{ts} \partial w - W_{ts} \partial \tau = - \iint_J \frac{\partial}{\partial w} \Phi_{ts} \partial w \partial \tau, \quad (18)$$

где D и I – замкнутые кусочно-гладкие контуры, ограничивающие на плоскостях (r, τ) и (w, τ) области G и J соответственно.

В соответствии с идеей интегро-интерполяционного метода [7], построим консервативные схемы на основе интегральных уравнений (17) и (18) для чего вводим в рассматриваемых областях сеточное разбиение

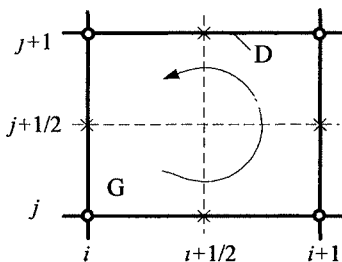


Рис. 2. Ячейка сеточной области

$$r_{set} = \{ (r_i, \tau_j), (r_{i\pm 1/2}, \tau_j); r_{i\pm 1} = r_i \pm \Delta r, r_{i\pm 1/2} = r_i \pm 1/2 \Delta r, i = 1, 2, \dots, N_{pl} + 1; \tau_{j-1} = \tau_j + \Delta \tau, j = 1, 2, \dots \}.$$

$$w_{set} = \{ (w_i, \tau_j), (w_{i\pm 1/2}, \tau_j); w_{i\pm 1} = w_i \pm \Delta w, w_{i\pm 1/2} = w_i \pm 1/2 \Delta w, i = 1, 2, \dots, N_{ts} + 1; \tau_{j-1} = \tau_j + \Delta \tau, j = 1, 2, \dots \},$$

где N_{pl} , N_{ts} – количество узлов сетки по координате для плоского слоя и капилляра соответственно.

Сеточные функции источника и потока для плоского слоя и капилляра будем относить к полуцелым точкам $(r_{i\pm 1/2}, \tau_j)$ и $(w_{i\pm 1/2}, \tau_j)$, а функции энергии, давления и зазора к целым узлам сетки. Интегральные уравнения (18) и (19)

применим к соответствующим контурам D и I , охватывающим элементарные ячейки разностных сеток. В результате получим разностные уравнения, аппроксимирующие дифференциальные уравнения (9) и (10):

$$\Delta r (E_{pli}^{j+1} - E_{pli}^j) - \Delta \tau (W_{pli+1/2}^{j+1/2} - W_{pli-1/2}^{j+1/2}) = - \Delta \tau (\Phi_{pli+1/2}^{j+1/2} - \Phi_{pli-1/2}^{j+1/2}), \quad (19)$$

$$\Delta w (E_{tsi}^{j+1} - E_{tsi}^j) - \Delta \tau (W_{tsi+1/2}^{j+1/2} - W_{tsi-1/2}^{j+1/2}) = - \Delta \tau (\Phi_{tsi+1/2}^{j+1/2} - \Phi_{tsi-1/2}^{j+1/2}), \quad (20)$$

где $W_{i\pm 1/2}^{j+1/2} = \sigma W_{i\pm 1/2}^{j+1} + (1 - \sigma) W_{i\pm 1/2}^j$, $\Phi_{i\pm 1/2}^{j+1} = \sigma \Phi_{i\pm 1/2}^{j+1} + (1 - \sigma) \Phi_{i\pm 1/2}^j$, σ – параметр, позволяющий варьировать интерполяцию сеточных функций ($0 \leq \sigma \leq 1$), причем при $\sigma = 0,5$ получаем второй порядок аппроксимации по времени.

Путем интегрирования по отрезкам $r_{i-1} \leq r \leq r_i$ функций (11), (13) и $w_{i-1} \leq w \leq w_i$ функций (12), (14) определяем разностные выражения функций потока и источника для плоского слоя и капилляра, после подстановки которых в уравнения (19) и (20) получаем разностный аналог интегральных уравнений (17) и (18):

Расчет и конструирование

$$\begin{aligned}
 & (\Psi_{pln+1})_i^{j+1} [\Delta r r_i \Lambda_{vpl} + \sigma C_{pl}^{j+1}] - (\Psi_{pln+1})_{i+1}^{j+1} \sigma A_{pl+1}^{j+1} - (\Psi_{pln+1})_{i-1}^{j+1} \sigma A_{pl-1}^{j+1} = \\
 & = (\Psi_{pln+1})_i^j [\Delta r r_i \Lambda_{vpl} - (1-\sigma) C_{pl}^j] + (\Psi_{pln+1})_{i+1}^j (1-\sigma) A_{pl+1}^j + \\
 & + (\Psi_{pln+1})_{i-1}^j (1-\sigma) A_{pl-1}^j - \Delta \tau [\sigma (\Phi_{pl+1/2}^{j+1} - \Phi_{pl-1/2}^{j+1}) + (1-\sigma) (\Phi_{pl+1/2}^j - \Phi_{pl-1/2}^j)],
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 & (\Psi_{tsn+1})_i^{j+1} [\Delta w (H_{ts0})_i \Lambda_{vts} + \sigma C_{ts}^{j+1}] - (\Psi_{tsn+1})_{i+1}^{j+1} \sigma A_{ts+1}^{j+1} - (\Psi_{tsn+1})_{i-1}^{j+1} \sigma A_{ts-1}^{j+1} = \\
 & = (\Psi_{tsn+1})_i^j [\Delta w (H_{ts0})_i \Lambda_{vts} - (1-\sigma) C_{ts}^j] + (\Psi_{tsn+1})_{i+1}^j (1-\sigma) A_{ts+1}^j + \\
 & + (\Psi_{tsn+1})_{i-1}^j (1-\sigma) A_{ts-1}^j - \Delta \tau [\sigma (\Phi_{ts+1/2}^{j+1} - \Phi_{ts-1/2}^{j+1}) + (1-\sigma) (\Phi_{ts+1/2}^j - \Phi_{ts-1/2}^j)],
 \end{aligned} \tag{22}$$

где $A_{pli\pm 1} = (\Psi_{pl0})_{i\pm 1} r_{i\pm 1/2} \frac{\Delta \tau}{\Delta r} \left[\frac{H_{pli\pm 1} + H_{pli}}{2} - (H_{pli\pm 1} - H_{pli}) \right]$,

$$C_{pli} = (\Psi_{pl0})_i \frac{\Delta \tau}{\Delta r} \left\{ \left[\frac{H_{pli+1} + H_{pli}}{2} + (H_{pli+1} - H_{pli}) \right] r_{i+1/2} + \right. \\
 \left. + \left[\frac{H_{pli} + H_{pli-1}}{2} - (H_{pli} - H_{pli-1}) \right] r_{i-1/2} \right\},$$

$$A_{tsi\pm 1} = (\Psi_{ts0})_{i\pm 1} \frac{(H_{ts0})_{i\pm 1} + (H_{ts0})_i}{2} \frac{\Delta \tau}{\Delta w} \left[\frac{H_{tsi\pm 1} + H_{tsi}}{2} - (H_{tsi\pm 1} - H_{tsi}) \right],$$

$$C_{tsi} = (\Psi_{ts0})_i \frac{\Delta \tau}{\Delta w} \left\{ \left[\frac{H_{tsi+1} + H_{tsi}}{2} + (H_{tsi+1} - H_{tsi}) \right] \frac{(H_{ts0})_{i+1} + (H_{ts0})_i}{2} + \right. \\
 \left. + \left[\frac{H_{tsi} + H_{tsi-1}}{2} - (H_{tsi} - H_{tsi-1}) \right] \frac{(H_{ts0})_i + (H_{ts0})_{i-1}}{2} \right\}.$$

Очевидно, что уравнения (21) и (22) линейны, так как имеющиеся нелинейности, следуя методу решения, отнесены в правую часть уравнений и определены или на предыдущем j -ом временном слое или на предыдущей итерации n и поэтому известны.

Краевые условия (5), (6) при независимом рассмотрении плоского слоя и капилляра на $j+1/2$ временном слое аппроксимируем следующим образом

$$(\Psi_{pln+1})_1^{j+1} = H_{pl1}^{j+1}, \quad (\Psi_{pln+1})_{N_{pl}+1}^{j+1} = H_{plN_{pl}+1}^{j+1}, \tag{23}$$

$$(\Psi_{tsn+1})_1^{j+1} = H_{ts1}^{j+1}, \quad (\Psi_{tsn+1})_{N_{ts}+1}^{j+1} = H_{tsN_{ts}+1}^{j+1}. \tag{24}$$

Начальные условия (7) принимают вид

$$(\Psi_{pl0})_i = H_{pl0}, \quad (\Psi_{ts0})_i = H_{ts0}. \tag{25}$$

Разностные выражения расходов, записанных в полуцелых точках, определяются в виде

$$M_{pli+1/2} = -2\pi \frac{K_{pl} r_i + r_{i+1}}{\Delta r} \frac{2}{2} \left[\frac{H_{pli} + H_{pli+1}}{2} (\Psi_{pli+1}^2 - \Psi_{pli}^2) - \right. \\
 \left. - (\Psi_{pli+1}^2 + \Psi_{pli}^2) (H_{pli+1} - H_{pli}) \right], \tag{26}$$

$$M_{tsi+1/2} = -2\pi \frac{K_{ts} (H_{ts0})_i + (H_{ts0})_{i+1}}{\Delta w} \frac{2}{2} \left[\frac{H_{tsi} + H_{tsi+1}}{2} (\Psi_{tsi+1}^2 - \Psi_{tsi}^2) - \right. \\
 \left. - (\Psi_{tsi+1}^2 + \Psi_{tsi}^2) (H_{tsi+1} - H_{tsi}) \right], \tag{27}$$

где $K_{pl} = \frac{\rho_a P_a (\delta + z)^3}{24\mu}$, $K_{ts} = \frac{\rho_a P_a r_1^4}{32\mu L}$ – коэффициенты расхода, величина которых зависит от введенного ранее масштаба безразмерных величин, ρ_a – плотность воздуха при давлении P_a .

Для численного моделирования совместной работы последовательно соединенных в Т-образную структуру плоского слоя и капилляра используются ранее полученные трехточечные

итерационные разностные уравнения (21) и (22). Вводится общая сетка для рассмотрения Т-образной структуры с общим количеством узлов $i=N_{ts}+N_{pl}+1$.

При сращении двух моделей, построенных для тонких профилированных зазоров различной конфигурации, вводится в рассмотрение общая точка (точка сращения) $i=N_{ts}+1$, принадлежащая одновременно сеточной области плоского слоя и капилляра. Особенности в схему вносятся дополнительные краевыми условиями, записанными для точки сращения. Для плоского слоя это точка с координатой $r_i=\kappa$, а для капилляра $w_i=0$. Дополнительные краевые условия

– условие равенства давлений $P_{pl}(r_i=\kappa)=P_{ts}(w_i=0)$, в точке сращения

$$\frac{\Psi_{pl i}}{H_{pl i}} = \frac{\Psi_{ts i}}{H_{ts i}}, \text{ где } i=N_{ts}+1; \quad (28)$$

– условие равенства расходов $M_{pl}(r_i=\kappa+1/2\Delta r)=M_{ts}(w_i=0+1/2\Delta w)$, записанное на основе выражений массовых расходов плоского слоя и капилляра [3], с линеаризацией по методу Ньютона

$$\frac{K_{pl}}{K_{ts}} (W_{pl})_{i+1/2}^{j+1/2} - (W_{ts})_{i-1/2}^{j+1/2} = \frac{K_{pl}}{K_{ts}} (\Phi_{pl})_{i+1/2}^{j+1/2} - (\Phi_{ts})_{i-1/2}^{j+1/2}. \quad (29)$$

Интегрируя функции Φ_{pl} , W_{pl} по отрезку $r_i \leq r \leq r_{i+1}$ и функции Φ_{ts} , W_{ts} по отрезку $w_i \leq w \leq w_{i-1}$ ($i=N_{ts}+1$) и подставляя результат в (29) с учетом (28), получим разностное уравнение, используемое в качестве дополнительного для формирования решения в точке сращения:

$$\begin{aligned} & (\Psi_{ts n+1})_i^{j+1} \sigma C_i^{j+1} - (\Psi_{pl n+1})_{i+1}^{j+1} \sigma A_{i+1}^{j+1} - (\Psi_{ts n+1})_{i-1}^{j+1} \sigma B_{i-1}^{j+1} = \\ & = -(\Psi_{ts n+1})_i^j (1-\sigma) C_i^j + (\Psi_{pl n+1})_{i+1}^j (1-\sigma) A_{i+1}^j + (\Psi_{ts n+1})_{i-1}^j (1-\sigma) B_{i-1}^j + \\ & + \frac{K_{pl}}{K_{ts}} \left[\sigma (\Phi_{pl})_{i+1/2}^{j+1} + (1-\sigma) (\Phi_{pl})_{i+1/2}^j \right] - \left[\sigma (\Phi_{ts})_{i-1/2}^{j+1} + (1-\sigma) (\Phi_{ts})_{i-1/2}^j \right], \end{aligned} \quad (30)$$

$$\text{где } A_{i+1} = -\frac{(\Psi_{pl 0})_{i+1} K_{pl} r_{i+1} + r_i}{\Delta r K_{ts} 2} [H_{pl i+1} + H_{pl i} - 2(H_{pl i+1} - H_{pl i})];$$

$$B_{i-1} = -\frac{(\Psi_{ts 0})_{i-1} (H_{ts 0})_i + (H_{ts 0})_{i-1}}{\Delta w 2} [H_{ts i} + H_{ts i-1} + 2(H_{ts i} - H_{ts i-1})];$$

$$C_i = \frac{H_{pl i} (\Psi_{pl 0})_i r_{i+1} + r_i K_{pl}}{H_{ts i} \Delta r 2 K_{ts}} [- (H_{pl i+1} + H_{pl i}) - 2(H_{pl i+1} - H_{pl i})] +$$

$$+ \frac{(\Psi_{ts 0})_i (H_{ts 0})_i + (H_{ts 0})_{i-1}}{\Delta w 2} [- (H_{ts i} + H_{ts i-1}) + 2(H_{ts i} - H_{ts i-1})].$$

Уравнение (30) является связующим для уравнений (22) и (21) при переходе от расчета функции Ψ_{ts} для капилляра к функции Ψ_{pl} для плоского слоя, причем при проведении расчетов следует соблюдать условие гладкости функций, входящих в уравнение (30) в точке сращения, что обеспечивает устойчивость разностной схемы, что было подтверждено, в том числе и экспериментально. Трехточечный вид конечно-разностного уравнения (30) позволяет проводить решение методом прогонки [8] на каждом временном слое.

Помимо рассмотренных дополнительных краевых условий в месте сращения Т-образной структуры участвуют и естественные граничные условия, аналогичные используемым ранее, т. е.

$$(\Psi_{pl n+1})_{N_{ts}+N_{pl}+1}^{j+1} = (H_{pl})_{N_{ts}+N_{pl}+1}^{j+1}, \quad (\Psi_{ts n+1})_1^{j+1} = (H_{ts})_1^{j+1}. \quad (31)$$

Основным критерием качества построенных схем является их сходимость, которая следует из аппроксимации и устойчивости. Погрешность аппроксимации [7] зависит от шага сетки и порядка аппроксимации, причем с увеличением порядка аппроксимации и с уменьшением шага сетки точность решения увеличивается. Для рассматриваемых дифференциальных уравнений выбран второй порядок аппроксимации по пространству $O(\Delta r^2)$, $O(\Delta w^2)$ и по времени $O(\Delta \tau^2)$, что обеспечено записью разностных уравнений с использованием центральных разностей в полущелых точках сетки, а так же использованием схемы Кранка–Никольсона при $\sigma=0,5$. Шаги сетки по координате Δr , Δw выбираются из условия размещения 7–10 узлов сетки в краевых

Расчет и конструирование

зонах, в которых наблюдаются наибольшие градиенты давления. Величина зон определяется отношением $1/\sqrt{A_v}$ [9].

Качественную оценку сходимости численной задачи к модельной можно получить через оценку сходимости линеаризованной численной модели к прямому конечноразностному аналогу нелинейной модельной задачи. Для этого введем в рассмотрение конечноразностную невязку по формулам

$$\lambda_{pl} = \sum_j \sum_i \left\langle \Delta \tau \left[r_i \left(\frac{H_{pli}^{j+1} (\Psi_{pl}^2)_{i+1}^{j+1} - (\Psi_{pl}^2)_{i+1}^{j+1}}{2 \Delta r} - (\Psi_{pl}^2)_{i+1}^{j+1} \frac{H_{pli+1}^{j+1} - H_{pli}^{j+1}}{\Delta r} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - r_{i-1} \left(\frac{H_{pli-1}^{j+1} (\Psi_{pl}^2)_{i-1}^{j+1} - (\Psi_{pl}^2)_{i-1}^{j+1}}{2 \Delta r} - (\Psi_{pl}^2)_{i-1}^{j+1} \frac{H_{pli}^{j+1} - H_{pli-1}^{j+1}}{\Delta r} \right) \right] - \Delta r \Lambda_{vpl} r_i (\Psi_{pl}^{j+1} - \Psi_{pl}^j) \right\rangle,$$

$$\lambda_{is} = \sum_j \sum_i \left\langle \Delta \tau \left[(H_{is0})_i \left(\frac{H_{is1}^{j+1} (\Psi_{is}^2)_{i+1}^{j+1} - (\Psi_{is}^2)_{i+1}^{j+1}}{2 \Delta w} - (\Psi_{is}^2)_{i+1}^{j+1} \frac{H_{is1+1}^{j+1} - H_{is1}^{j+1}}{\Delta w} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - (H_{is0})_{i-1} \left(\frac{H_{is1-1}^{j+1} (\Psi_{is}^2)_{i-1}^{j+1} - (\Psi_{is}^2)_{i-1}^{j+1}}{2 \Delta w} - (\Psi_{is}^2)_{i-1}^{j+1} \frac{H_{is1}^{j+1} - H_{is1-1}^{j+1}}{\Delta w} \right) \right] - \Delta w \Lambda_{vis} (H_{is0})_i (\Psi_{is}^{j+1} - \Psi_{is}^j) \right\rangle.$$

Значения невязок численных схем плоского слоя и капилляра для случая $n=10$, $\kappa=0,024$, $Z=0,67$, $A=0,33$, $k_h=0,35$, $K=0,083$ и $H_{pl0}=0,5$ при различных значениях частотного параметра представлены на рис. 3 и 4. Шаг сетки по времени при этом равен шагу сетки по координате. Увеличение числа узлов сетки по времени на период в 10 раз по отношению к максимальному числу узлов на изображенных здесь графиках приводит к изменению наиболее чувствительных к точности расчета величин расходов в плоском слое и капилляре не более чем на 0,0006 процента. Полученное значение сравнимо с точностью расчетов, что позволяет минимизировать время решения задачи.

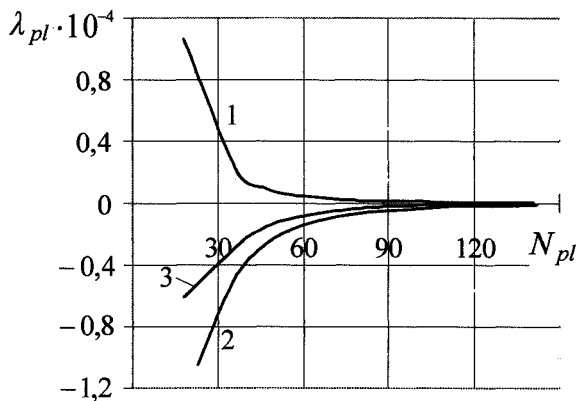


Рис. 3. Значение невязок численной схемы плоского слоя: 1 – $\Lambda_v=1$; 2 – $\Lambda_v=10$; 3 – $\Lambda_v=100$

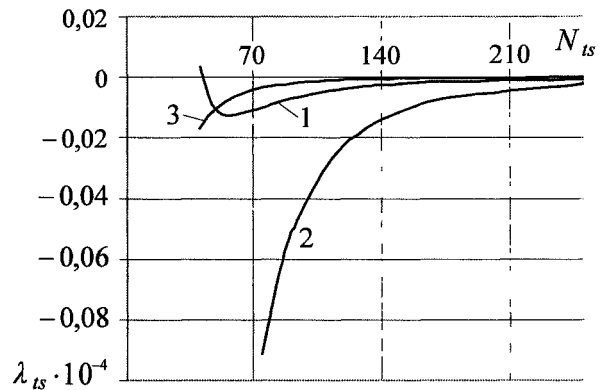


Рис. 4. Значение невязок численной схемы капилляра: 1 – $\Lambda_v=1$; 2 – $\Lambda_v=10$; 3 – $\Lambda_v=100$

Понятие устойчивости включает в себя условия существования, единственности и непрерывности решения при различных начальных условиях. В [7] показано, что разностные схемы, по типу аналогичные построенным нами, но с постоянными коэффициентами, являются абсолютно устойчивыми при $\sigma=1$ (неявная схема) и $\sigma=0,5$. Исследования устойчивости для уравнений подобного типа с переменными коэффициентами, что и характерно для задач с переменным по координате зазором, показывают, что возможна неустойчивость при наличии зон конфузорного и диффузорного типа. Однако в данных задачах функция зазора монотонна и полученные разностные схемы также устойчивы.

Сходимость численной схемы складывается из итерационной (характеризует близость решений для n и $n+1$ итерационного приближения в j -й момент времени) и временной (характеризует близость решений в моменты времени $j=0$ и $j=2\pi$ для $n+1$ итерационного приближения) сходимости. При реализации разностных схем итерационная сходимость оценивается косвенно

$$\left| \frac{\Psi_{n+1} - \Psi_n}{\Psi_n} \right| \leq \varepsilon, \tag{32}$$

где ε – малая заданная величина порядка 10^{-8} .

Решение задач проводится на установление переходного процесса во времени, для чего необходимо проверять на каждом периоде с точностью $\varepsilon_1 > \varepsilon$ выполнение условий периодичности (7). Выполнение этого условия не всегда обеспечивает временную сходимость схем. Экспериментальная проверка путем увеличения времени решения задачи без ограничения точности показала, что медленной сходимости численной задачи здесь не существует. Сетка с количеством узлов 100 (по координате) и 100 (по времени на период) является достаточной для сходимости при любых значениях частотных параметров Λ_v .

Результаты численных расчетов и параметрическая оптимизация. Решения, полученные при реализации разностных схем (21), (22) и (30), проиллюстрируем эпюрами средних за период избыточных давлений для плоского слоя (рис. 5) и капилляра (рис. 6) в сравнении с аналогичными эпюрами, полученными при аналитическом исследовании, проведенном с использованием асимптотического анализа [3].

На рис. 5 приведены эпюры давлений, полученные из асимптотического анализа и численного решения для плоского слоя и капилляра. Во внутренней области зазоров результаты численных и аналитических расчетов практически совпадают при значениях частотного параметра порядка 100 и выше, что явно отражено на рис. 5. Результаты, полученные при значениях частотного параметра Λ_v порядка 1, представляют наибольший интерес для исследования и практики, поскольку значения частот вибрации рабочих поверхностей ν в этом случае наиболее близки к частотам реально эксплуатируемых устройств компрессорного типа.

Проведем параметрическую оптимизацию рассматриваемой Т-образной структуры, исходя из критерия максимума расхода и сравнительный анализ численных и аналитических (на основе асимптотического метода [9]) характеристик плоского слоя и Т-образной структуры.

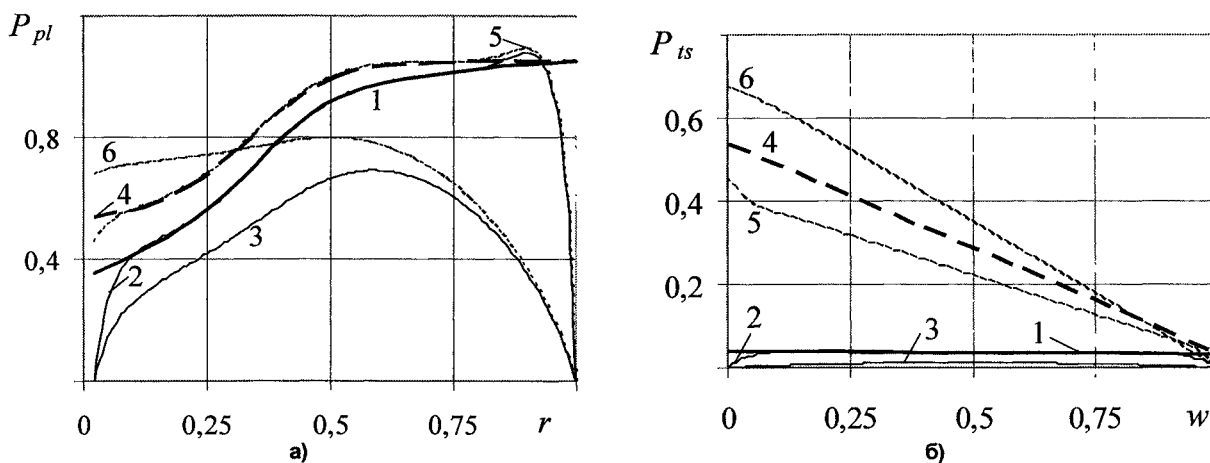


Рис. 5. Распределение избыточного среднего за период давления: а – в плоском слое; б – в капилляре. 1, 2, 3 – при независимом рассмотрении плоского слоя и капилляра 4, 5, 6 – при последовательном соединении плоского слоя и капилляра в Т-образную структуру 1, 4 – результаты асимптотического анализа; 2, 5 – результаты численного решения для $\Lambda_v=100$; 3, 6 – результаты численного решения для $\Lambda_v=1$

Рассмотрим влияние на интегральные характеристики устройства параметра крутизны профиля n . Для поиска максимума расхода значение параметра n будем варьировать в диапазоне от 0 до 10 при прочих постоянных безразмерных параметрах $\kappa=0,024$, $Z=0,67$, $\Delta=0,33$, $k_h=0,35$, $K=0,083$ и $H_{pl}=0,5$.

Очевидно, что максимум безразмерного расхода в плоском слое при значении параметра $n=0,17$, полученный на основе асимптотического анализа (кривая 1 на рис. 6, а), существенно смещен относительно аналогичных экстремумов при различных значениях частотного параметра (кривые 2–7 на рис. 6, а), полученных при численном решении. Из рис. 6, а видно, что при уменьшении частоты вибрации для обеспечения максимума расхода требуется более пологая форма профилированной поверхности плоского слоя, характеризуемая большей величиной параметра крутизны профиля, причем максимум становится не столь выраженным. Так

Расчет и конструирование

например, для $\Lambda_{vpl}=1$ оптимальное значение крутизны профиля $n=3$, что значительно отличается от результата, полученного на основе асимптотического анализа.

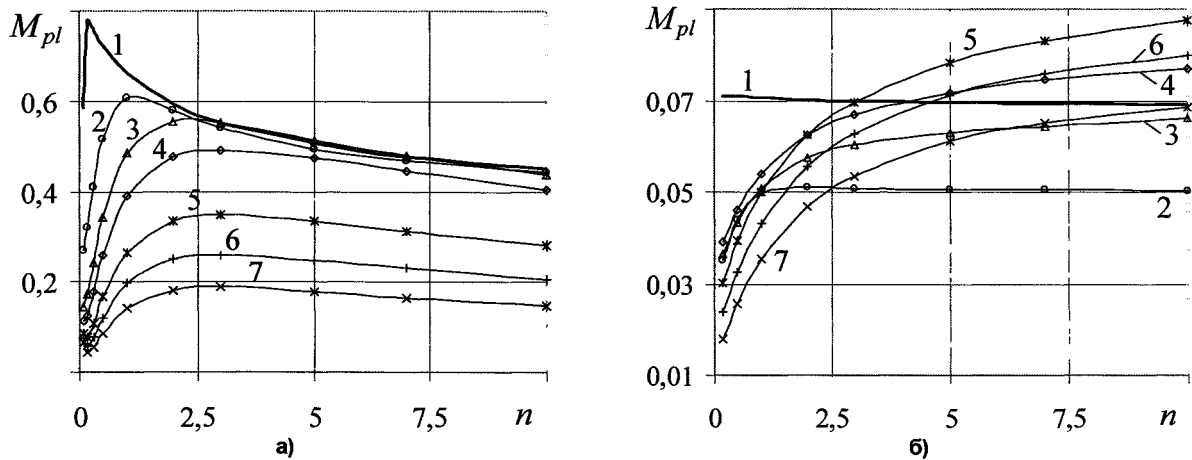


Рис. 6. Зависимость безразмерного расхода от параметра n : а – плоского слоя; б – Т-образной структуры. 1 – результат асимптотического решения; результаты численного решения: 2 – $\Lambda_{vpl}=100$; 3 – $\Lambda_{vpl}=5$; 4 – $\Lambda_{vpl}=3$; 5 – $\Lambda_{vpl}=1$; 6 – $\Lambda_{vpl}=0,7$; 7 – $\Lambda_{vpl}=0,5$

Этот факт имеет четкую физическую интерпретацию. С уменьшением частотного параметра увеличивается ширина краевых зон и если максимум градиента зазора попадает в краевую зону, то, естественно, соответствующего ему изменения давлений в слое нет и, следовательно, нет необходимого для генерации расхода градиента давления. Уменьшение параметра n приводит к смещению максимума градиента зазора внутрь слоя, минуя краевую зону, что и позволяет появиться необходимому перепаду давлений и отражено наличием максимума расхода на графиках.

Отсюда следует, что профилирование зазора надо выполнять в его внутренней области на достаточном удалении от границ при сохранении максимальной крутизны профиля.

Иная картина наблюдается при рассмотрении Т-образной структуры. Из графиков на рис. 6, б следует, что об оптимальном значении параметра n можно говорить только при значениях частотного параметра более 100 и, кроме того, структура обладает явной чувствительностью к частоте вибрации рабочих поверхностей зазоров, причем максимального значения расхода можно добиться приблизительно при $\Lambda_{vpl}=1$.

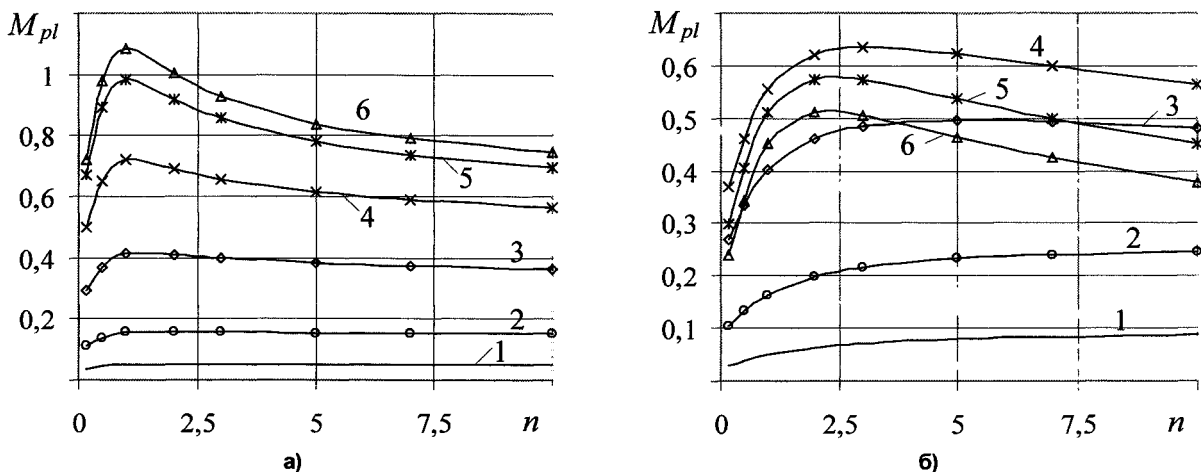


Рис. 7. Зависимость безразмерного расхода Т-образной структуры от параметра n : а – $\Lambda_{vpl}=100$; б – $\Lambda_{vpl}=1$; 1 – $\kappa=0,024$; 2 – $\kappa=0,034$; 3 – $\kappa=0,05$; 4 – $\kappa=0,07$; 5 – $\kappa=0,1$; 6 – $\kappa=0,12$

В Т-образной структуре интегральные характеристики в значительной мере зависят от параметров капилляра, например, от входного радиуса r_1 или соответствующей ему безразмерной величины κ , поэтому зависимости расхода от крутизны профиля n на рис. 7 отличаются от приведенных выше.

Например, на рис. 6, б показаны зависимости, полученные для наименьшего из рассматриваемых значений входного радиуса капилляра $\kappa=0,024$. Но как показано на рис. 7, а для значения

частотного параметра $A_{vpl}=100$, при увеличении значения параметра k расход значительно увеличивается, причем четко определяется оптимальное значение параметра $n=1$, при котором достигается максимальный расход, во всем диапазоне изменения параметра k .

Иная картина наблюдается для варианта, представленного на рис. 7, б, где построены зависимости расхода от крутизны профиля для значения частотного параметра $A_{vpl}=1$. Здесь четко просматривается зависимость расхода от входного радиуса капилляра и своего максимума расход достигает при значении $\kappa=0,07$, при этом дальнейшее увеличение параметра k приводит к уменьшению расхода. На фоне явной зависимости расхода от входного радиуса капилляра наблюдается максимум расхода по параметру крутизны профиля n . Так для $\kappa=0,034$ оптимальное значение крутизны профиля $n=10$, для $\kappa=0,05$ – $n=5$, для $\kappa=0,07$ – $n=3$, для $\kappa=0,12$ – $n=2$.

Из проведенного исследования, очевидно, что для Т-образной структуры геометрические параметры значительно влияют на интегральные характеристики. В частности, следует обратить внимание на значение частотного параметра A_v в каждой конкретной задаче, поскольку от него в значительной мере будет зависеть поиск оптимальных параметров зазоров.

Выводы. В работе рассмотрен вопрос о совместной работе последовательно соединенных плоского слоя и капилляра в осесимметричную Т-образную структуру. Построена математическая модель течения газа в профилированных зазорах с вибрацией и численная конечно-разностная модель с использованием интегро-интерполяционного метода. Исследована сходимость численной схемы.

Применение метода конечных разностей является, по нашему убеждению, наиболее перспективным для решения подобного класса задач в гидродинамике. Особенность заключается в том, что для обеспечения временной сходимости колебательной задачи необходимо десятки, а то и сотни тысяч раз циклически повторять изменение области определения (геометрии) задачи для обеспечения требуемой точности. Например, в методе конечных элементов такое повторение с требуемой точностью просто не возможно, так как в процессе решения придется многократно перестраивать конечно-элементное разбиение, что по определению содержит произвол. Этого нет в методе конечных разностей, где разбиение создается единожды и, тем самым, совершенно стабильно.

Выявлена высокая чувствительность расхода к выбору конструктивных параметров, что нежелательно для промышленного использования компрессоров подобного типа, так как требует не только оптимизации конструкции на этапе проектирования, но и поддержания рабочих режимов в процессе длительных сроков эксплуатации.

Литература

1. Пат. 2121612 РФ, МКИ В 05 В 17/04. Ультразвуковой газовый компрессор и ороситель на его основе / С.Г. Некрасов и др. – № 93032626/06; заявлено 21.06.93; опублик. 10.11.98, бюл. 31.
2. Некрасов, С.Г. Задатчик расхода на основе осесимметричного профилированного зазора с вибрацией / С.Г. Некрасов, Н.А. Пашнина // Известия Челябинского научного центра УрО РАН. – 2004. – № 1. – С. 180–185. – Режим доступа: http://csc.ac.ru/news/2004_1/2004_1_11_1r.pdf, свободный.
3. Некрасов, С.Г. Эффект образования направленного движения газа в тонких профилированных зазорах с вибрацией / С.Г. Некрасов, Н.А. Пашнина // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ. – 2005. – № 14 (54). – С. 37–43.
4. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1973. – 741 с.
5. Константиnescу, В.Н. Газовая смазка / В.Н. Константиnescу. – М.: Машиностроение, 1968. – 718 с.
6. Канторович, Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 741 с.
7. Самарский, А.А. Разностные методы решения задач газовой динамики / А.А. Самарский, Ю.П. Попов. – М.: Наука, 1980. – 351 с.
8. Самарский, А.А. Методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 589 с.
9. Pan, C.N.T. An Asymptotic Analysis of Gaseous Squeeze-Film Bearing / C.N.T. Pan // Journal of Lubrication Technology: Trans. ASME; Ser. F. – 1967. – Vol. 89, № 3. – P. 245–253.

АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА МОДЕЛИРОВАНИЯ И АНАЛИЗА СПОСОБОВ ФОРМИРОВАНИЯ ЗУБЬЕВ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС

Б.А. Лопатин, С.А. Хаустов

Описывается автоматизированная система моделирования и анализа, позволяющая создавать твердотельные компьютерные модели зубьев зубчатых колес путем эмуляции их обработки различными методами. Полученные модели позволяют в дальнейшем оценивать точность формирования зубчатого профиля, осуществлять компоновку различных передач и производить их инженерный анализ.

В настоящее время проектирование зубчатых передач происходит в основном аналитически. В этом случае результат расчета составляет набор параметров, который не дает возможности без изготовления пробного экземпляра представить геометрию профилей зубьев зубчатых колес.

Проведенный анализ существующих программных продуктов показал, что на настоящий момент не существует универсальных разработок, позволяющих произвести генерацию более чем одного типа зубчатых колес. Кроме того, указанные программные продукты представляют только графическое изображение зубчатого колеса без возможности дальнейшего применения, а библиотеки САД-систем представляют лишь упрощенное изображение, которое не позволяет оценить геометрию рабочей поверхности зубьев.

В связи с этим создание автоматизированной системы моделирования, предназначенной для генерации компьютерной модели зубчатого колеса, которую можно было бы в дальнейшем редактировать и компоновать, осуществлять автоматизированный инженерный (силовой, кинематический и динамический) анализ стандартными САД и САЕ средствами, является актуальной задачей. Это позволит вместо трудоемкого и дорогостоящего пробного нарезания использовать компьютерное моделирование процесса формирования зубьев различным зуборезным инструментом.

Анализ различных методов обработки зубчатых колес показал, что основными являются методы обработки профиля зуба долбяком и инструментом на основе производящего реечного контура. При этом в ряде случаев перемещение инструмента относительно заготовки может происходить по криволинейной траектории.

Целью работы являлось создание автоматизированной системы моделирования способов формирования зубьев колес различных типов зубчатых передач. Разработанная система предоставляет широкие возможности проектировщикам зубчатых передач за счет следующих программ, включенных в ее состав.

1. Программа эмуляции формообразования эвольвентного цилиндрического зубчатого колеса инструментом реечного типа [1].

Основными преимуществами данного решения является то, что существует возможность, варьируя параметрами производящего реечного контура (рис. 1) и параметрами процесса обката, получить твердотельную компьютерную модель зубчатого колеса (рис. 2). Программа позволяет эмулировать процесс зубонарезания нетрадиционных зубчатых передач, например, с использованием несимметричного производящего реечного контура (рис. 3). Кроме того в процессе эмуляции возможно учитывать влияние технологических погрешностей на формирование профилей зубьев колес путем внесения поправок в параметры зуборезного инструмента и схему обката. Программа позволяет рассчитывать контрольный размер по роликам для нарезаемого колеса, что впоследствии позволяет формировать конструкторскую документацию.

2. Программа для эмуляции процесса формообразования эвольвентных зубчатых колес с внешними и внутренними зубьями (рис. 4, 5) долбяком [2].

Формирование модели долбяка при этом происходит аналогично вышеописанному формообразованию цилиндрического колеса с внешними зубьями производящим реечным контуром.

Программа позволяет получать модели зубчатых колес с внешними и внутренними зубьями, а также рассчитывать межцентровое расстояние станочного зацепления a_w и контрольный размер по роликам.

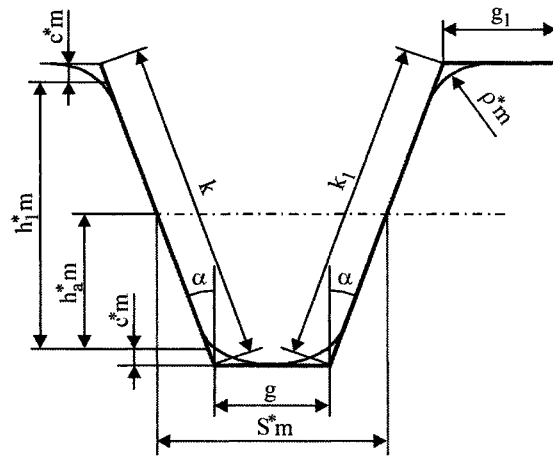


Рис. 1. Параметры производящего реечного контура

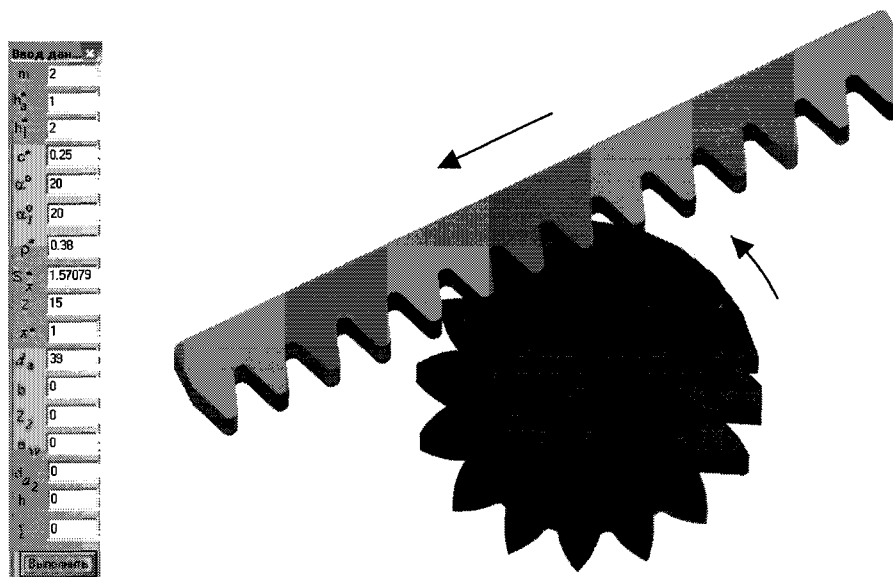


Рис. 2. Пример нарезания зубчатого колеса стандартной производящей рейкой ($m=2, z=15, x=1$)

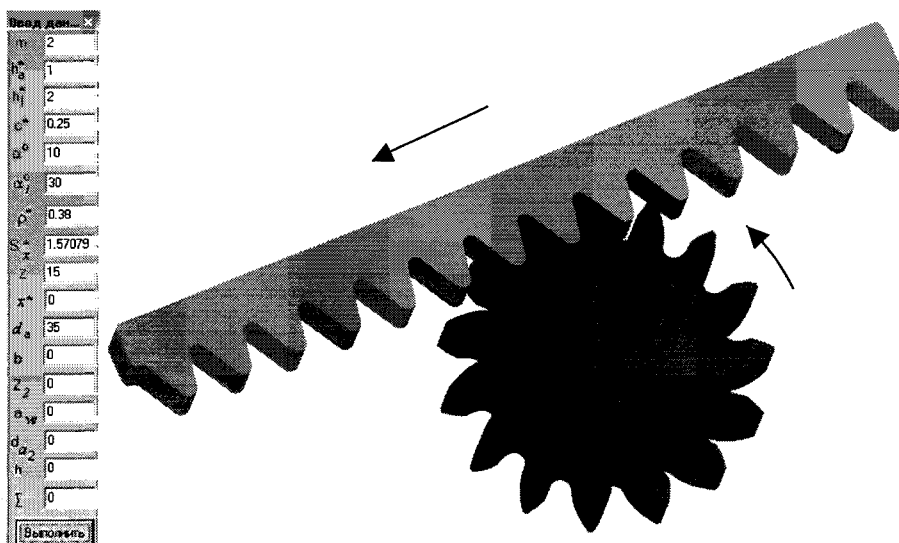


Рис. 3. Пример нарезания зубчатого колеса производящей рейкой с несимметричным профилем ($m=2, z=15, x=1$)

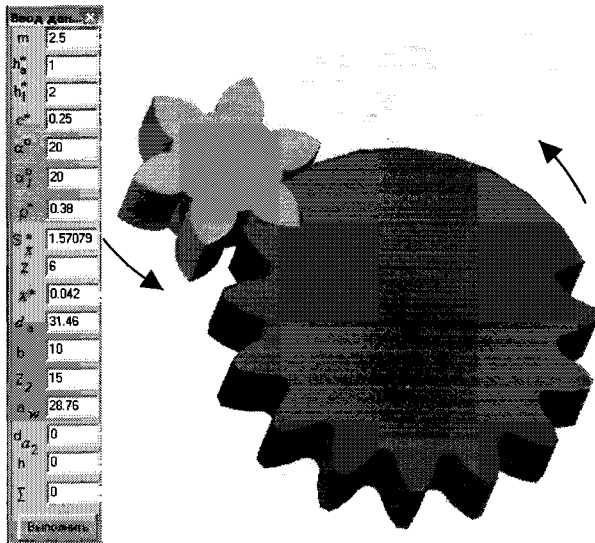


Рис. 4. Пример нарезания зубчатого колеса долбяком ($m=2,5, z_0=6, x_0=0,042, z=15, a_w=28,76$)

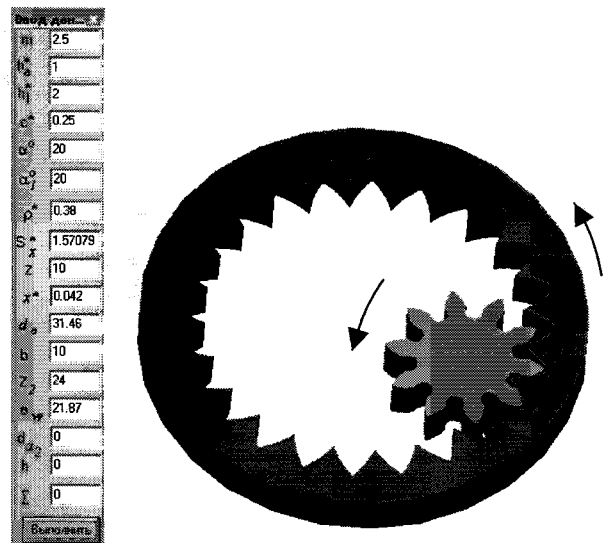


Рис. 5. Пример нарезания зубчатого колеса долбяком ($m=2,5, z_0=10, x_0=0,042, z=24, a_w=21,87$)

3. Программа для эмуляции процесса формообразования неэвольвентных конических зубчатых колес (рис. 6) долбяком с внешними зубьями и межосевым углом Σ [3].

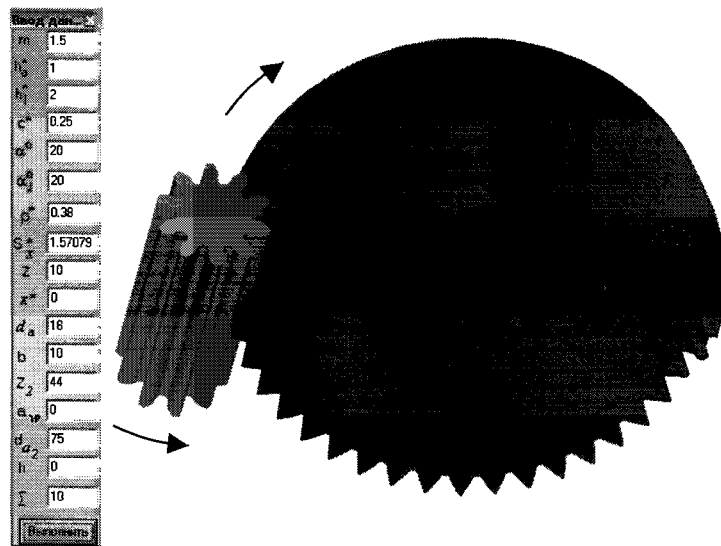


Рис. 6. Пример нарезания конического зубчатого колеса долбяком с внешними зубьями ($m=1,5, z_0=10, x_0=0, z=44, \Sigma=10^\circ$)

4. Программа для эмуляции процесса формообразования неэвольвентных плоских зубчатых колес (рис. 7) долбяком [4].

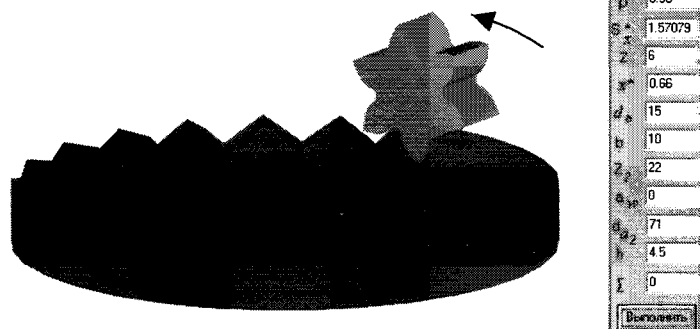


Рис. 7. Пример нарезания неэвольвентного плоского зубчатого колеса долбяком ($m=2, z_0=6, x_0=0,66, z=22$)

5. Программа для эмуляции процесса формообразования незвольвентных зубчатых колес с внешними зубьями (рис. 8) производящим реечным контуром, перемещаемым по задаваемой траектории [5].

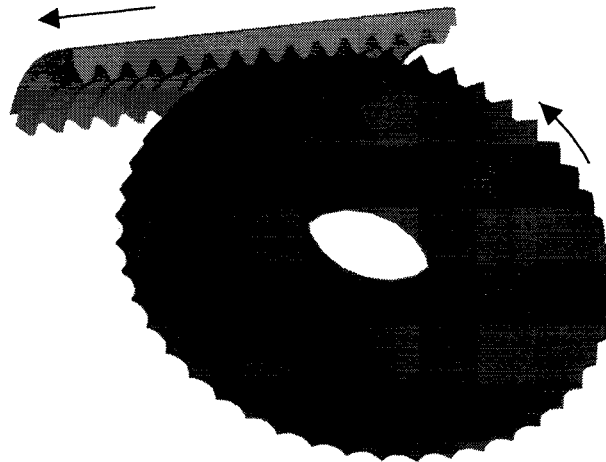
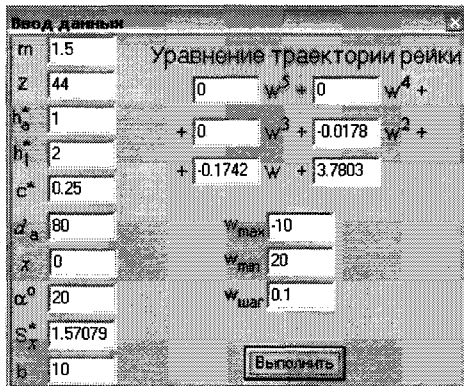


Рис. 8. Пример нарезания незвольвентного зубчатого колеса производящим реечным контуром, перемещаемым по заданной траектории ($m=1,5$, $z=44$, уравнение траектории $y(w)=-0,0178w^2-0,1742w+3,7803$)

6. Программа для эмуляции процесса формообразования незвольвентных зубчатых колес с внешними зубьями (рис. 9) долбяком с внутренними зубьями.

Разработанные программы дают возможность получать твердотельные модели различных зубчатых колес.

Преимуществом представленной автоматизированной системы являются возможности синтеза и анализа зубчатых передач, построенных на основе полученных компьютерных твердотельных моделей стандартными средствами CAD.

Так, например, с помощью программ, представленных в пунктах 1 и 2 данной статьи был разработан программно-методический комплекс «Эмуляция зацеплений волновых и планетарных зубчатых передач» [6]. Он предназначен для компоновки волновых и планетарных зубчатых передач. В его состав входят: программа для получения компьютерной модели гибкого зубчатого колеса [1]; программа для получения компьютерной модели жесткого зубчатого колеса [2]; файл шаблона Microsoft Excel предназначенный для подготовки данных для построения кулачка; программа для получения компьютерной модели кулачка; алгоритм взаимного расположения гибкого и жесткого колес передачи; алгоритм компоновки волнообразователя; алгоритм компоновки волновой передачи.

После формирования зубчатых колес и кулачка осуществляется компоновка передачи. Для этого комплекс содержит описания действий для достижения необходимого взаиморасположения зубчатых колес, экспорта компьютерных моделей в пакет САПР SolidWorks и компоновки гибкого колеса на кулачек.

После компоновки передачи возможен просмотр интересующей зоны зацепления в требуемом масштабе, например, для оценки многопарности зацепления (рис. 10, а) и интерференции зубьев на выходе из зацепления (рис. 10, б), с возможностью выдачи на печать.

Аналогичным образом может осуществляться анализ планетарных передач (рис. 11).

Данный комплекс был использован при анализе геометрии волновых зубчатых передач электромеханических приводов космической техники на предприятии РКЦ «ЦСКБ-Прогресс» (г. Самара). Были проанализированы 32 волновые передачи электромеханических приводов раз-

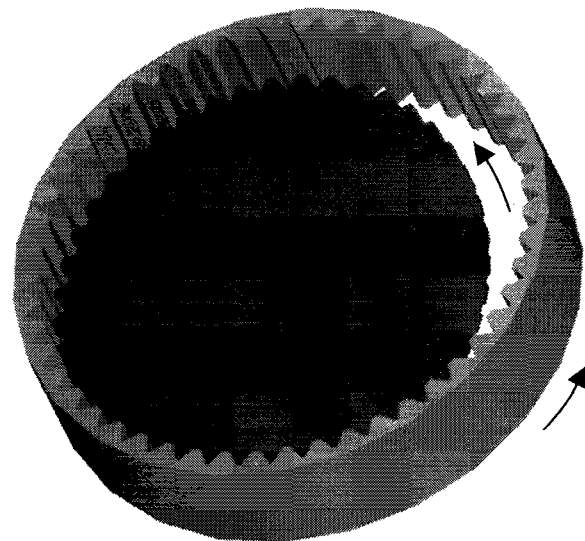


Рис. 9. Пример нарезания незвольвентного конического зубчатого колеса долбяком с внутренними зубьями ($m=1,5$, $z_0=52$, $\alpha_0=2,516$, $z=46$, $\Sigma=10^\circ$)

личной геометрии. В ходе анализа были выявлены конструктивные и технологические ошибки элементов передач, приводящие к интерференции зубьев в зацеплении. В результате были выданы рекомендации по доводке приводов с учетом выявленных ошибок.

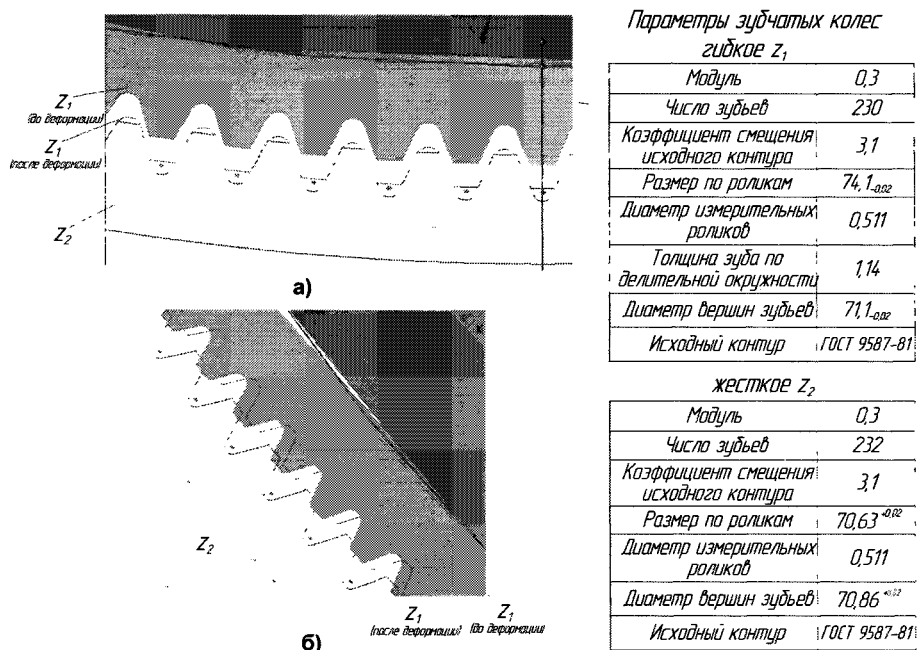


Рис. 10. Пример анализа геометрии волновой передачи

Программа, представленная в пункте 4 статьи, была использована при проектировании плоскоколесных передач самоблокирующегося дифференциала автомобиля [7]. Полученные твердотельные модели колес применялись для анализа напряженно-деформированного состояния зубьев колес [8].

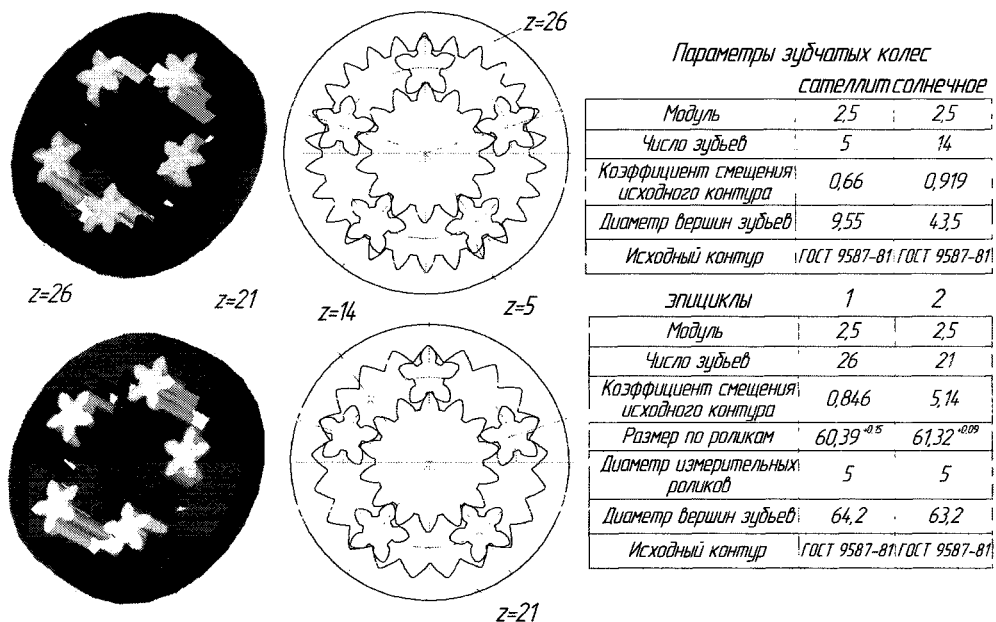


Рис. 11. Пример анализа геометрии планетарной передачи

При проектировании планетарных редукторов с внутренними цилиндрическими зацеплениями электромеханических приводов космической техники (рис. 12) использовались программы, представленные пунктами 5 и 6. Программа эмуляции обработки незвольвентного конического зубчатого колеса долбяком позволила получить теоретические профили зубьев в каждом торцовом сечении, а программа эмуляции обработки незвольвентного конического зубчатого ко-

леса производящим реечным контуром, перемещаемым по криволинейной траектории [5] способствовала практической реализации способа нарезания конических колес с невольвентным профилем эвольвентной червячной фрезой [9].

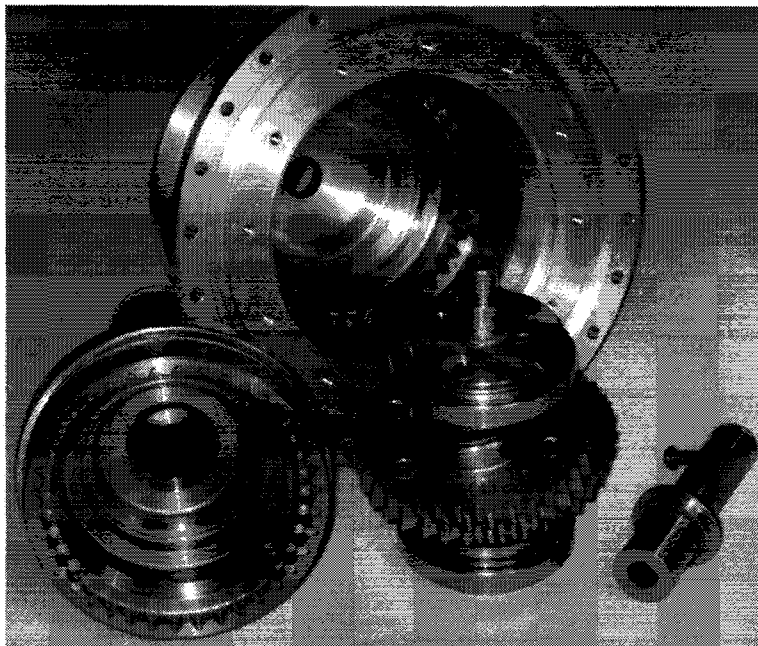


Рис. 12. Элементы планетарного редуктора с цилиндроконическими зубчатыми зацеплениями

Приведенные примеры подтверждают универсальность и эффективность предложенной автоматизированной системы моделирования и анализа способов формирования зубьев зубчатых колес.

Литература

1. Свидетельство об отраслевой регистрации разработки № 6853. Эмуляция нарезания эвольвентного цилиндрического зубчатого колеса производящим реечным контуром / Б.А. Лопатин, С.А. Хаустов // ОФАП. – 2006.
2. Свидетельство об отраслевой регистрации разработки № 6854. Эмуляция обработки зубчатого колеса с внешними и внутренними зубьями долбяком / Б.А. Лопатин, С.А. Хаустов // ОФАП. – 2006.
3. Свидетельство об отраслевой регистрации разработки № 7141. Эмуляция обработки невольвентного конического зубчатого колеса с внешними зубьями долбяком с внешними зубьями / Б.А. Лопатин, С.А. Хаустов // ОФАП. – 2006.
4. Свидетельство об отраслевой регистрации разработки № 6855. Эмуляция обработки плоского зубчатого колеса долбяком / Б.А. Лопатин, С.А. Хаустов // ОФАП. – 2006.
5. Свидетельство об отраслевой регистрации разработки № 7230. Эмуляция обработки зубчатого колеса производящим реечным контуром, перемещаемым по задаваемой траектории / Б.А. Лопатин, С.А. Хаустов // ОФАП. – 2006.
6. Свидетельство об отраслевой регистрации разработки № 7079. Эмуляция зацеплений волновых и планетарных зубчатых передач / Б.А. Лопатин, С.А. Хаустов // ОФАП. – 2006.
7. Патент на полезную модель № 581196. Самоблокирующийся дифференциал / Б.А. Лопатин, Р.И. Зайнетдинов, В.Г. Сапрыкин и др. – Б.И. – 10.11.2006. № 31.
8. Калашиников, Д.Б. Автоматизация расчета на прочность зубьев плоскоколесных передач с применением метода конечных элементов / Д.Б. Калашиников // Технология машиностроения. – М.: Машиностроение, 2007. – №10. – С.67–69.
9. Патент на изобретение № 2175593. Способ нарезания зубьев конической шестерни цилиндро-конической передачи / Б.А. Лопатин, Р.И. Зайнетдинов, О.Н. Цуканов, С.В. Плотникова. – Б.И. – 10.11.2001. – № 31.

Сведения об авторах

Держанский Виктор Борисович. Доктор технических наук, профессор, заслуженный машиностроитель РФ, заведующий кафедрой гусеничных машин Курганского государственного университета. Область научных интересов – динамика управляемого движения транспортных машин.

Victor B. Derganskey. The doctor of engineering science, professor, the Honoured machines builder RF, the head of «Caterpillar machines» department of the Kurgan State University. The area of scientific interests – a track record of the operated moving the transport machines.

Кайгородцев Максим Игоревич. Аспирант кафедры «Системы управления и математическое моделирование» Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов – имитационное моделирование систем и процессов.

Maksim I. Kaygorodtsev. The postgraduate student of «Control system and mathematical modeling» department of the South Ural State University. The area of scientific interests – simulation modeling of the systems and processes.

Карташева Марина Анатольевна. Научный сотрудник кафедры «Двигатели летательных аппаратов» Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов – математическое моделирование обтекания летательных аппаратов, проектирование сложных технических систем, исследование гидрогазодинамических процессов и процессов теплообмена в технических системах.

Marina A. Kartasheva. The research engineer of «Engines of flying machines» department of the South Ural State University. The area of scientific interests – mathematical simulation of airflow of aircraft, designing of complex engineering systems, investigation of hydro-, gasdynamics processes and processes of heat transfer in engineering systems.

Киселёв Владимир Иванович. Кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Прикладная информатика и математика» Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов – математическое моделирование управляемых систем.

Vladimir I. Kiselev. The candidate of engineering science, the head of «Applied information science and mathematics» department. Область научных интересов – математическое моделирование управляемых систем.

Климова Александра Сергеевна. Аспирант кафедры гусеничных машин Курганского государственного университета. Область научных интересов – динамическая нагруженность и управление транспортными машинами.

Alexandra S. Klimova. The post-graduate student of «Caterpillar machines» department of the Kurgan State University. The Area scientific interest – a dynamic load and operated moving the transport machines.

Лопатин Борис Александрович. Доктор технических наук, профессор, почетный работник высшего профессионального образования, заместитель директора по научно-исследовательской работе филиала Южно-Уральского государственного университета в г. Златоусте, заведующий кафедрой «Техническая механика». Область научных интересов – машиноведение и детали машин, технология машиностроения, зубчатые передачи.

Boris A. Lopatin. The doctor of engineering science, professor, the Honored worker of the higher vocational education, the deputy director on research work of the Zlatoust branch of the South Ural State University, the head of the «Technical mechanic» department. The area of scientific interests – machine science, machine components, manufacturing engineering and gears.

Некрасов Сергей Геннадьевич. Доктор технических наук, профессор кафедры «Информационно измерительная техника» Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов – ультразвуковая техника и связанные с ней вопросы виброреологии, численные расчеты на основе конечно-разностных и конечно-элементных методов в задачах гидродинамики.

Sergey G. Nekrasov. The doctor of engineering science, professor of «Information measuring equipment» department of the South Ural State University. The area of scientific interests – ultrasonic equipment and connected with that vibroreology questions, numerical solution on the basis of finite-difference and finite-element methods in gas-dynamic problems.

Пашнина Надежда Александровна. Аспирант кафедры «Информационно измерительная техника» Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов – метрология в газодинамических задачах приборостроения.

Nadezhda A. Pashnina. The postgraduate student of «Information measuring equipment» department of the South Ural State University. The area of scientific interests – metrology in gas-dynamic problems of industry.

Сидельников Рудольф Васильевич. Кандидат технических наук, доцент кафедры «Летательные аппараты и автоматические установки» Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов – моделирование газовых процессов.

Rudolf V. Sidelnikov. The candidate of engineering science, senior lecturer of «Flying Devices and Automatic Plant» department of the South Ural State University. The area of scientific interests – computational fluid dynamics.

Смирнов Владимир Алексеевич. Кандидат технических наук, доцент кафедры «Автоматизация механосборочного производства» Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов – современные методы управления технологическим оборудованием.

Vladimir A. Smirnov. The candidate of engineering science, senior lecturer of «Mechano-Assembly Automation» department of the South Ural State University. The area of scientific interests – modern methods of control of manufacturing equipments.

Спиридонов Евгений Константинович. Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Гидравлика и гидропневмосистемы», декан Аэрокосмического факультета Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов – прикладная гидромеханика и гидравлика, струйные аппараты, лопастные насосы и напорные гидросистемы.

Evgeny K. Spiridonov. The doctor of engineering science, professor, the head of «Hydraulics and hydro-pnevmosystems» department, dean of aerospace faculty of the South Urals State University. The area of scientific interests – applied hydromechanics and hydraulics, stream devices, lobe pumps and pressure head hydraulic-circuit systems.

Тараторкин Игорь Александрович. Кандидат технических наук, доцент кафедры гусеничных машин Курганского государственного университета. Область научных интересов – динамическая нагрузка и управление транспортными машинами.

Igor A. Taratorkin. The candidate of engineering sciences, senior lecturer of «Caterpillar machines» department of the Kurgan State University. The Area scientific interest – a dynamic load and operated moving the transport machines.

Телегин Александр Иванович. Доктор физико-математических наук, профессор, декан Электротехнического факультета Миасского филиала Южно-Уральского государственного университета, заведующий кафедрой «Системы управления и математическое моделирование». Область научных интересов – математическое моделирование управляемых систем.

Alexander I. Telegin. The doctor of physical-mathematical science, professor, the dean of the Electro-technical faculty of the Miass branch of the South Ural State University, the head of «Control system and mathematical modeling» department. The area of scientific interests – mathematical modeling of the controllable systems.

Телегин Вадим Александрович. Аспирант кафедры «Экономико-математические методы и статистика» Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов – имитационное моделирование систем и процессов.

Vadim A. Telegin. The postgraduate student of «Economic and mathematical methods and statistics» department of the South Ural State University. The area of scientific interests – simulation modeling of the systems and processes.

Терёхин Александр Александрович. Аспирант кафедры «Летательные аппараты и автоматические установки» Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов – моделирование газовых процессов.

Alexander A. Terehin. The postgraduate student of «Flying Devices and Automatic Plant» department of the South Ural State University. The area of scientific interests – computational fluid dynamics.

Терёхина Татьяна Валерьевна. Аспирант кафедры «Летательные аппараты и автоматические установки» Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов – моделирование газовых процессов.

Tatyana V. Terehina. The postgraduate student of «Flying Devices and Automatic Plant» department of the South Ural State University. The area of scientific interests – computational fluid dynamics.

Федоров Виктор Борисович. Кандидат технических наук, доцент кафедры «Автоматизация механосборочного производства» Южно-Уральского государственного университета. Область научных

Сведения об авторах

интересов – расчет и контроль массо-геометрических характеристик, современные методы управления технологическим оборудованием.

Victor B. Fedorov. The candidate of engineering science, senior lecturer of «Mechano-Assembly Automation» department of the South Ural State University. The area of scientific interest – account and monitoring of mass-geometrical characteristics, modern methods of control of manufacturing equipments.

Хаустов Сергей Андреевич. Аспирант Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов – САПР в области конструирования, анализа и производства, компьютерное моделирование и анализ зубчатых колес.

Sergey A. Khaustov. The post-graduate student of the South Ural State University. The area of scientific interests – CAD/CAE/CAM, a computer modeling and an analysis of cogwheels.

Школин Сергей Борисович. Аспирант кафедры «Гидравлика и гидропневмосистемы» Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов – прикладная гидромеханика и гидравлика, струйные аппараты.

Sergey B. Shkolin. The postgraduate student of «Hydraulics and hydropnevmosystems» department of South Urals State University. The area of scientific interests – applied hydromechanics and hydraulics, stream devices.

**ВЕСТНИК
ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА**

№ 10 (110) 2008

**Серия
«МАШИНОСТРОЕНИЕ»
Выпуск 11**

Издательство Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 03.03.2008. Формат 60×84 1/8. Печать трафаретная.
Усл. печ. л. 9,30. Уч.-изд. л. 8,89. Тираж 500 экз. Заказ 49/162.

Отпечатано в типографии Издательства ЮУрГУ. 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.